

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓ เล่ม ๑

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑



ผู้เรียบเรียง

อาจารย์วัฒนา นิธิติลล

อาจารย์เจริญ ราคาแก้ว

ผู้ตรวจ

ดร.กิตติปกรณ อัมเถื่อน

อาจารย์วุฒิชัย ภูติ

อาจารย์ปาณิตา อาจวงษ์

บรรณาธิการ

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิรัช นิลสระคู

คำนำ

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 1 นี้ เป็นหนังสือที่จัดทำขึ้นตามตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 โดยเนื้อหาในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เล่มนี้ มีทั้งหมด 5 หน่วยการเรียนรู้ ได้แก่ พื้นที่ผิวและปริมาตร ระบบสมการ การแยกตัวประกอบของพหุนาม สมการกำลังสองตัวแปรเดียว และฟังก์ชันกำลังสอง

เนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ประกอบด้วย เนื้อหา ความคิดรวบยอด ตัวอย่าง เกร็ดความรู้ และแบบฝึกหัด ที่มีความเหมาะสมและเข้าใจง่าย เพื่อที่จะมุ่งส่งเสริมพัฒนาความรู้ความเข้าใจทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ การให้เหตุผล การแก้ปัญหา ส่งเสริมการเรียนรู้ด้วยวิธีการที่หลากหลายและพัฒนาคุณภาพของผู้เรียนตามศักยภาพ เพื่อให้ครูและนักเรียนสามารถนำไปใช้ประกอบการเรียนการสอนต่อไป

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 1 นี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ส่งเสริมพัฒนานักเรียนให้รักและมีความสุขในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และเป็นพื้นฐานสำคัญในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ชั้นสูงต่อไปได้เป็นอย่างดี

อาจารย์วัฒนา นิธิศดิลก

อาจารย์เจริญ ราคาแก้ว

สถาบันพัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.)

สงวนลิขสิทธิ์

สำนักพิมพ์ บริษัทพัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.) จำกัด

พ.ศ. ๒๕๖๓

พิมพ์ครั้งที่ ๑ จำนวน ๒๐,๐๐๐ เล่ม

สถาบันพัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.)

๑๒๕๖/๙ ถนนนครไชยศรี แขวงถนนนครไชยศรี เขตดุสิต กรุงเทพฯ ๑๐๓๐๐

โทร. ๐-๒๒๔๓-๘๐๐๐ (อัตโนมัติ ๑๕ สาย), ๐-๒๒๔๑-๘๙๙๙

แฟกซ์ : ทุกหมายเลข, แฟกซ์อัตโนมัติ : ๐-๒๒๔๑-๔๑๓๑, ๐-๒๒๔๓-๗๖๖๖

website : www.iadth.com

สารบัญ

หน้า

หน่วยการเรียนรู้ที่

1

พื้นที่ผิวและปริมาตร

6

1. ทบหาหน้ารูปเรขาคณิตสามมิติ
2. พื้นที่ผิวและปริมาตรของพีระมิด
3. พื้นที่ผิวและปริมาตรของกรวย
4. พื้นที่ผิวและปริมาตรของทรงกลม

8

10

22

31

หน่วยการเรียนรู้ที่

2

ระบบสมการ

36

1. ทบหาสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
2. ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
3. โจทย์ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

38

48

70

หน่วยการเรียนรู้ที่

3

การแยกตัวประกอบของพหุนาม

80

1. ทบหาการแยกตัวประกอบของพหุนาม
2. การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสูงกว่าสอง

82

85

หน้า

หน่วยการเรียนรู้ที่

4

สมการกำลังสองตัวแปรเดียว

104

1. การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวโดยวิธีแยกตัวประกอบ
2. การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวโดยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์
3. การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวโดยใช้สูตร
4. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว

106

115

123

129

หน่วยการเรียนรู้ที่

5

ฟังก์ชันกำลังสอง

134

1. ฟังก์ชันกำลังสอง
2. กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง
3. จุดต่ำสุดหรือสูงสุด
4. โจทย์ปัญหาของฟังก์ชันกำลังสอง

136

140

160

164

บรรณานุกรม

168

พื้นที่ผิวและปริมาตร

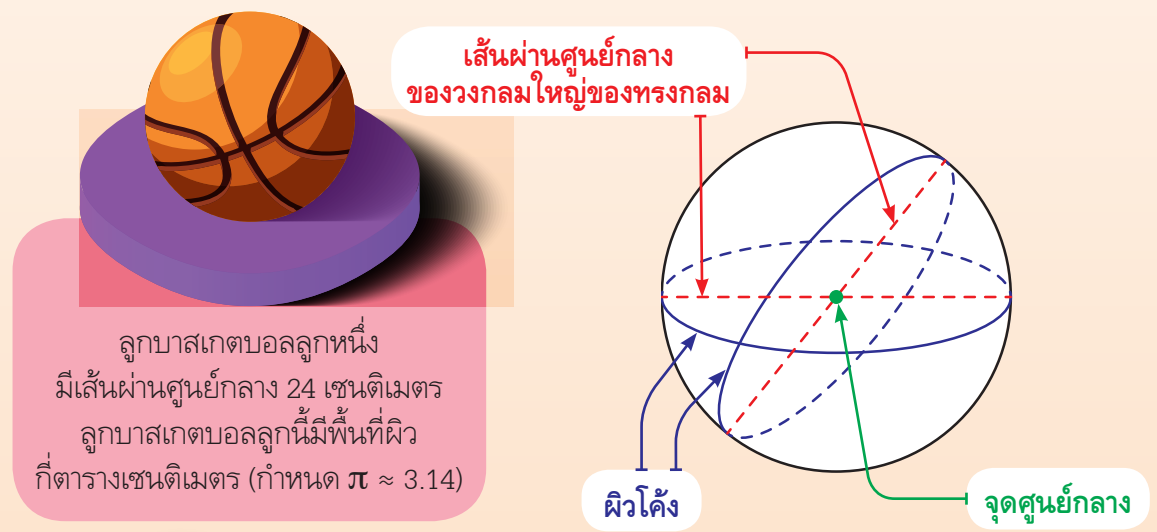
แผนผังสาระการเรียนรู้



ตัวชี้วัด

1. ประยุกต์ใช้ความรู้เรื่องพื้นที่ผิวของพีระมิด กรวย และทรงกลมในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริง (ค 2.1 ม.3/1)
2. ประยุกต์ใช้ความรู้เรื่องปริมาตรของพีระมิด กรวย และทรงกลมในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริง (ค 2.1 ม.3/2)

การหาพื้นที่ผิวของทรงกลม



วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \text{ลูกบาสเกตบอลมีรัศมี} &= \frac{24}{2} = 12 \text{ เซนติเมตร} \\
 \text{พื้นที่ผิวของทรงกลม} &= 4\pi r^2 \\
 &\approx 4 \times 3.14 \times 12^2 \\
 &= 4 \times 3.14 \times 144 \\
 &= 1,808.64 \text{ ตารางเซนติเมตร}
 \end{aligned}$$

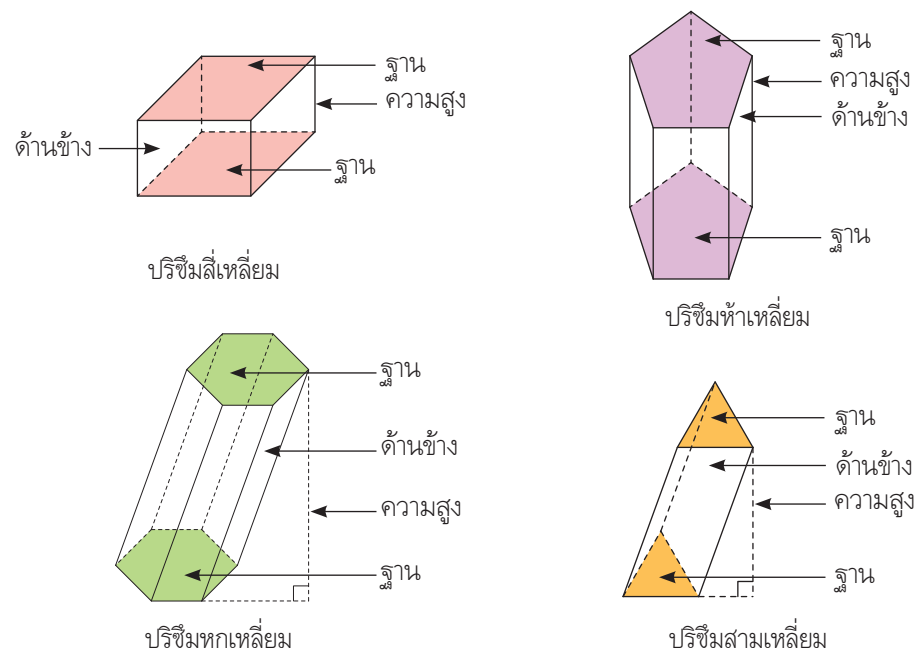
ดังนั้น ลูกบาสเกตบอลลูกนี้มีพื้นที่ผิวประมาณ 1,808.64 ตารางเซนติเมตร



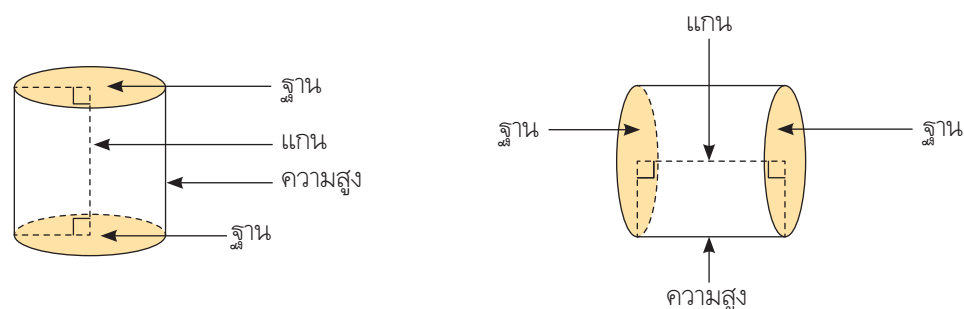
1. ทบทวนรูปเรขาคณิตสามมิติ

รูปเรขาคณิตสามมิติ คือ รูปเรขาคณิตที่มีลักษณะสำคัญ ได้แก่ ความกว้าง ความยาว และความสูง หรือความลึก เช่น ปริซึม ทรงกระบอก พีระมิด กรวย ทรงกลม

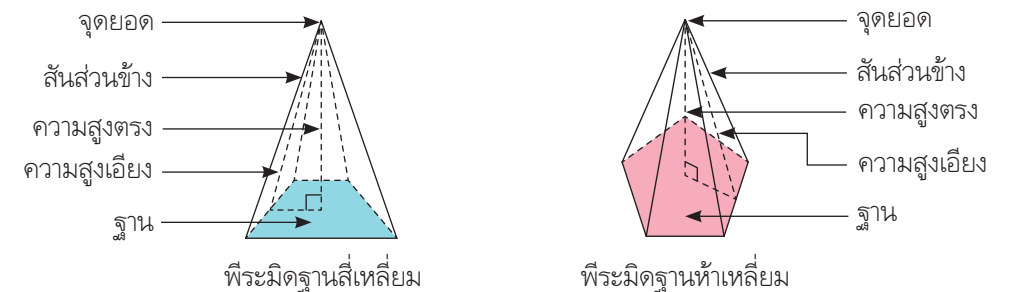
ปริซึม (prism) คือ รูปเรขาคณิตสามมิติที่มีฐานทั้งสองเป็นรูปหลายเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ ฐานทั้งสองอยู่บนระนาบที่ขนานกัน ในกรณีที่เป็นปริซึมตรงผิวข้างของปริซึมแต่ละรูปเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ในกรณีที่เป็นปริซึมเอียงผิวข้างของปริซึมเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน การเรียกชื่อปริซึมจะเรียกตามลักษณะของฐาน



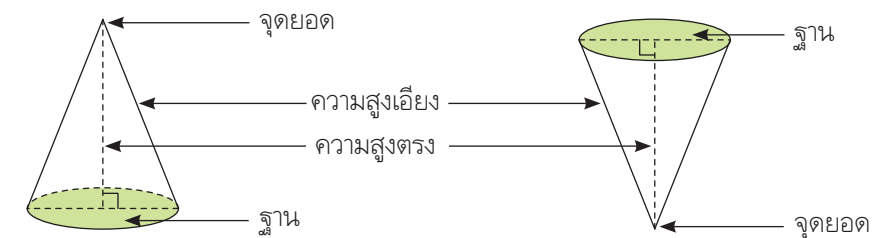
ทรงกระบอก (cylinder) คือ รูปเรขาคณิตสามมิติที่มีฐานทั้งสองเป็นวงกลมที่เท่ากันทุกประการ และอยู่บนระนาบที่ขนานกัน เมื่อตัดทรงสามมิตินี้ด้วยระนาบที่ขนานกับฐานแล้ว จะได้รอยตัดเป็นวงกลมที่เท่ากันทุกประการกับฐาน



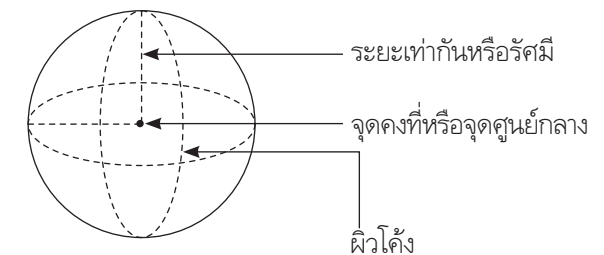
พีระมิด (pyramid) คือ รูปเรขาคณิตสามมิติที่มีฐานเป็นรูปหลายเหลี่ยมใด ๆ มียอดแหลมซึ่งไม่อยู่บนระนาบเดียวกันกับฐาน หน้าทุกหน้าเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดร่วมกันที่จุดยอดของพีระมิด และการเรียกชื่อพีระมิดเรียกตามลักษณะของฐานของพีระมิด



กรวย (cone) คือ รูปเรขาคณิตสามมิติที่มีฐานเป็นวงกลม มียอดแหลมที่ไม่อยู่บนระนาบเดียวกันกับฐาน และเส้นที่ต่อระหว่างจุดยอดกับจุดใด ๆ บนขอบของฐานเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรง



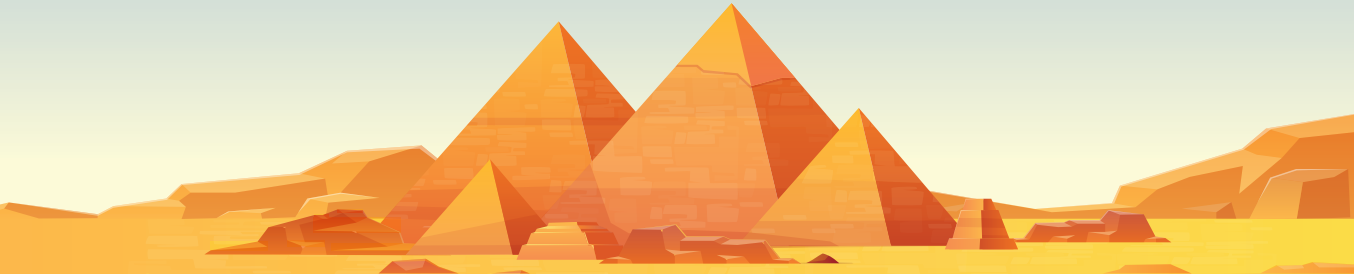
ทรงกลม (sphere) คือ รูปทรงเรขาคณิตสามมิติที่มีผิวโค้งเรียบ และจุดทุกจุดบนผิวโค้งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะเท่ากัน



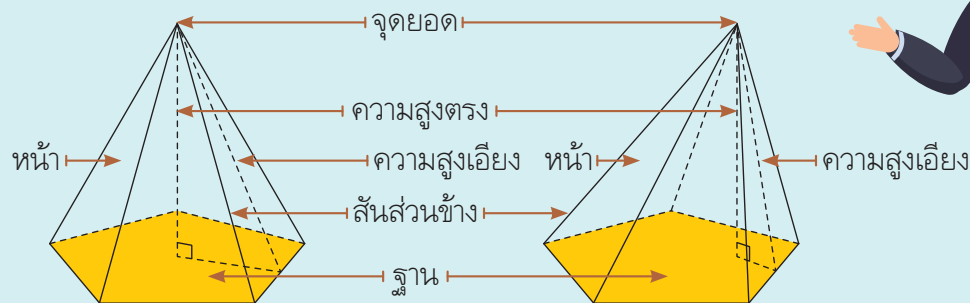
นักเรียนจะพบเห็นรูปเรขาคณิตสามมิติชนิดต่าง ๆ ในชีวิตประจำวัน เช่น ตู้เย็น ท่อน้ำที่มีหน้าตัดเป็นวงกลม ลูกฟุตบอล ลูกตุ้ม กรวยจราจร และมีสิ่งประดิษฐ์อีกมากมายล้วนเกี่ยวข้องกับรูปเรขาคณิตสามมิติทั้งสิ้น นักเรียนจะได้ศึกษาการหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของพีระมิด กรวย และทรงกลม ดังต่อไปนี้

2. พื้นที่ผิวและปริมาตรของพีระมิด

พีระมิดที่ได้รับการยกย่องว่าเป็นสิ่งมหัศจรรย์ของโลก ได้แก่ พีระมิดเมื่องกิซา ซึ่งเป็นที่บรรจุพระบรมศพของกษัตริย์คืออปส์ หรือคูฟู ซึ่งพระองค์เป็นผู้สร้างขึ้นเองเมื่อก่อนคริสตกาล ถือเป็นพีระมิดที่ยิ่งใหญ่ที่สุดในโลก ตั้งอยู่กึ่งกลางทะเลทราย ใช้หินทรายตัดเป็นแท่ง หน้าประมาณก้อนละ 2 ตันครึ่ง โดยการนำเอามาซ้อนกันเป็นชั้นขึ้นไป เชื่อกันว่า พีระมิดองค์นี้ จะทนแดดทนฝนอยู่ได้อีกนานกว่า 5,000 ปี และเป็นสิ่งมหัศจรรย์ของยุคโบราณสิ่งเดียวเท่านั้นที่มีอายุยืนยาวมาจนถึงปัจจุบัน



พีระมิดเป็นรูปเรขาคณิตสามมิติ มีทั้งพีระมิดตรงและพีระมิดเอียง มีฐานเป็นรูปหลายเหลี่ยมใด ๆ มียอดแหลมซึ่งไม่อยู่บนระนาบเดียวกันกับฐาน หน้าทุกหน้าเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดของพีระมิด เพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจในการนำไปใช้ในการแก้ปัญหา ศึกษาส่วนประกอบต่าง ๆ ดังนี้



ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นจะกล่าวถึงพีระมิดตรงเท่านั้น

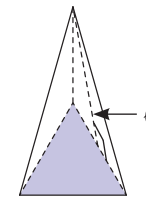


ข้อสังเกต

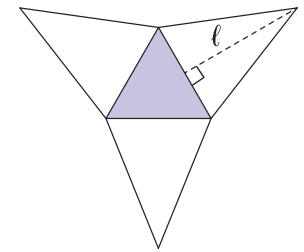
- การเรียกชื่อพีระมิดจะเรียกชื่อตามฐาน
- ฐานของพีระมิดมีฐานเดียวเป็นรูปหลายเหลี่ยมใด ๆ มียอดปลายแหลม
- หน้าทุกหน้าของพีระมิดเป็นรูปสามเหลี่ยม มีจำนวนเท่ากับจำนวนเหลี่ยมของฐาน
- ส่วนสูงของพีระมิดตรงใด ๆ จะตั้งฉากกับฐานที่จุดซึ่งอยู่ห่างจากจุดยอดของรูปหลายเหลี่ยมที่เป็นฐานเป็นระยะทางเท่ากัน
- พีระมิดตรงที่มีฐานเป็นรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า จะมีสูงเอียงทุกเส้นยาวเท่ากันและมีส่วนข้างยาวเท่ากัน



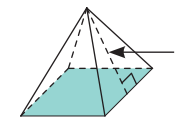
2.1 พื้นที่ผิวของพีระมิด



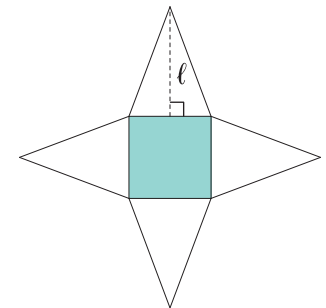
รูปคลี่



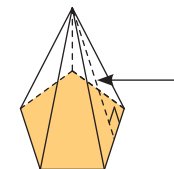
พีระมิดฐานสามเหลี่ยมด้านเท่า



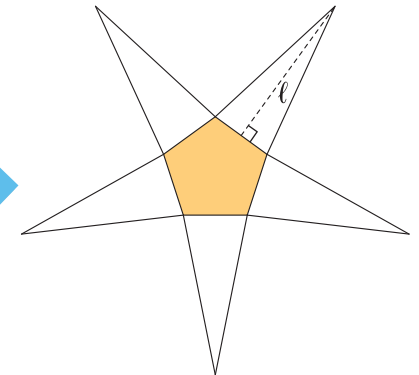
รูปคลี่



พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปคลี่



พีระมิดฐานห้าเหลี่ยมด้านเท่า

จากรูปคลี่พีระมิดรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าได้ว่า ฐานของพีระมิด คือ รูปหลายเหลี่ยมที่เป็นฐานและหน้าของพีระมิดเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มีจำนวนเท่ากับจำนวนเหลี่ยมของฐานนั้น ดังนั้น พื้นที่ผิวทั้งหมดของพีระมิดประกอบด้วย พื้นที่ฐานและพื้นที่ผิวข้าง และพื้นที่ผิวข้างของพีระมิดเท่ากับจำนวนหน้าของพีระมิดหรือจำนวนเหลี่ยมของฐานคูณด้วยพื้นที่รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ดังนั้น

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ผิวข้างของพีระมิด} &= \frac{1}{2} \times \text{ความยาวของฐาน} \times \text{ความสูงเอียง} \\ \text{พื้นที่ผิวทั้งหมดของพีระมิด} &= \text{พื้นที่ฐาน} + \text{พื้นที่ผิวข้าง} \end{aligned}$$

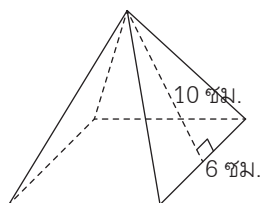
การหาพื้นที่ฐานของพีระมิด คณิตศาสตร์ต่อไปนี้

1. พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม = $\frac{1}{2} \times \text{ความยาวของฐาน} \times \text{ความสูง}$
2. พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{ความยาวของด้าน})^2$
3. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส = $(\text{ความยาวของด้าน})^2$
4. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = $\text{ความกว้าง} \times \text{ความยาว}$
5. พื้นที่ของรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า = $\frac{3\sqrt{3}}{2} \times (\text{ความยาวของด้าน})^2$

ตัวอย่างที่ 1

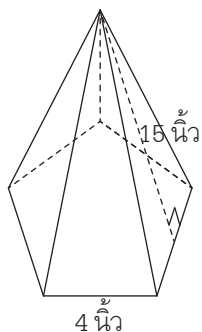
หาพื้นที่ผิวข้างของพีระมิดฐานรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าต่อไปนี้

1)



$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ผิวข้าง} &= \text{จำนวนหน้า} \times \text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว} \\ &= 4 \times \frac{1}{2} \times \text{ความยาวของฐาน} \times \text{ความสูงเอียง} \\ &= 4 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \\ &= 120 \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$

2)

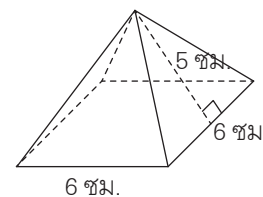


$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ผิวข้าง} &= \text{จำนวนหน้า} \times \text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว} \\ &= 5 \times \frac{1}{2} \times \text{ความยาวของฐาน} \times \text{ความสูงเอียง} \\ &= 5 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 15 \\ &= 150 \text{ ตารางนิ้ว} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2

หาพื้นที่ผิวของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสต่อไปนี้

1)

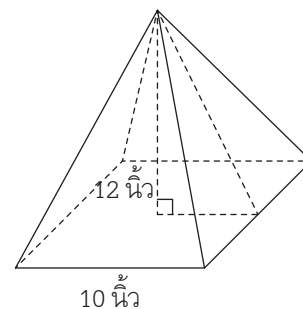


$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ฐาน} &= (\text{ความยาวของด้าน})^2 \\ &= 6^2 \\ &= 36 \text{ ตารางเซนติเมตร} \\ \text{พื้นที่ผิวข้าง} &= \text{จำนวนหน้า} \times \text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว} \\ &= 4 \times \frac{1}{2} \times \text{ความยาวของฐาน} \times \text{ความสูงเอียง} \\ &= 4 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \\ &= 60 \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \text{พื้นที่ผิวของพีระมิด} &= \text{พื้นที่ฐาน} + \text{พื้นที่ผิวข้าง} \\ &= 36 + 60 \end{aligned}$$

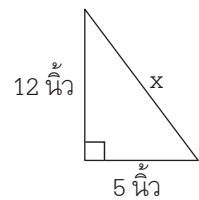
$$\begin{aligned} \text{หรือ} \quad \text{พื้นที่ผิวของพีระมิด} &= \text{พื้นที่ฐาน} + \text{พื้นที่ผิวข้าง} \\ &= (\text{ความยาวของด้าน})^2 + (\text{จำนวนหน้า} \times \text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม}) \\ &= 6^2 + \left(4 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 5\right) \\ &= 36 + 60 \\ &= 96 \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$

2)



$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ฐาน} &= (\text{ความยาวของด้าน})^2 \\ &= 10^2 \\ &= 100 \text{ ตารางนิ้ว} \end{aligned}$$

จากรูป ยังไม่ทราบความสูงของรูปสามเหลี่ยมหรือความสูงเอียงของพีระมิด นักเรียนสามารถใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสในการหาความสูงเอียงได้ ดังนี้



จากทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ว่า

$$\begin{aligned}x^2 &= 5^2 + 12^2 \\&= 25 + 144 \\&= 169 \\x &= 13\end{aligned}$$

ดังนั้น ความสูงของรูปสามเหลี่ยม คือ 13 นิ้ว
จะได้ พื้นที่ผิวข้าง = จำนวนหน้า $\times$ พื้นที่รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

$$= 4 \times \frac{1}{2} \times 10 \times 13$$

$$= 260 \text{ ตารางนิ้ว}$$

พื้นที่ผิวของพีระมิด = พื้นที่ฐาน + พื้นที่ผิวข้าง

$$= 100 + 260$$

$$= 360 \text{ ตารางนิ้ว}$$

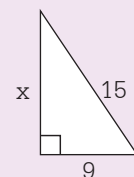
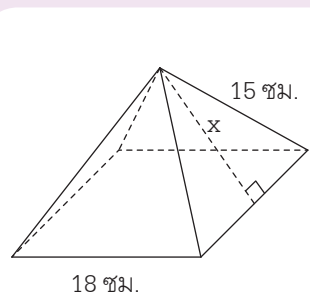
ตัวอย่างที่ 3

พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีฐานยาวด้านละ 18 เซนติเมตร สันยาว 15 เซนติเมตร
หาความสูงเอียงและพื้นที่ผิวข้างของพีระมิด

วิธีทำ

ให้ความยาวของความสูงเอียง x เซนติเมตร

จะได้ว่า



$$\begin{aligned}x^2 &= 15^2 - 9^2 \\&= 225 - 81 \\&= 144 \\x &= 12\end{aligned}$$

ดังนั้น ความยาวของความสูงเอียงเท่ากับ 12 เซนติเมตร
จะได้ พื้นที่ผิวข้าง = จำนวนหน้า $\times$ พื้นที่รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

$$= 4 \times \frac{1}{2} \times 18 \times 12$$

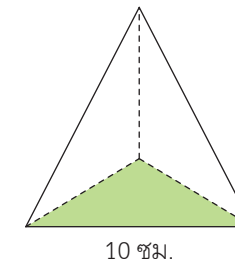
$$= 432 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

ดังนั้น พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดเท่ากับ 432 ตารางเซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 4

พีระมิดฐานสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งมีฐานยาวด้านละ 10 เซนติเมตร พื้นที่ฐานของพีระมิดเป็นเท่าไร

วิธีทำ



เนื่องจาก พีระมิดฐานสามเหลี่ยมด้านเท่า ยาวด้านละ 10 เซนติเมตร
ฉะนั้น พื้นที่ฐานของพีระมิด = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{ความยาวของด้าน})^2$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 10^2$$

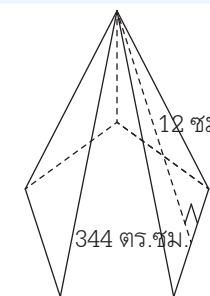
$$= 25\sqrt{3} \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

ดังนั้น พื้นที่ฐานของพีระมิดเท่ากับ $25\sqrt{3}$ ตารางเซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 5

พีระมิดฐานห้าเหลี่ยมด้านเท่าที่มีพื้นที่ผิวทั้งหมด 614 ตารางเซนติเมตร ฐานของพีระมิดมีพื้นที่
344 ตารางเซนติเมตร พีระมิดมีความสูงเอียง 12 เซนติเมตร ฐานของพีระมิดมีความยาว
ด้านละกี่เซนติเมตร

วิธีทำ



พื้นที่ผิวของพีระมิด = พื้นที่ฐาน + พื้นที่ผิวข้าง
แทนค่า $614 = 344 + \left(5 \times \frac{1}{2} \times \text{ความยาวของด้าน} \times 12\right)$

$$= 344 + (\text{ความยาวของด้าน} \times 30)$$

ความยาวด้าน = $\frac{614 - 344}{30}$
ความยาวด้าน = $\frac{270}{30}$
ความยาวด้าน = 9 เซนติเมตร

ดังนั้น ฐานของพีระมิดมีความยาวด้านละ 9 เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 6

ต้องการหาสี่พีระมิดด้านข้างใหม่ โดยที่พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาวฐานด้านละ 5 เมตร ความสูงเอียง 10 เมตร ต้องใช้สีกี่ถัง ถ้าสี 1 ถัง ทาได้พื้นที่ 8 ตารางเมตร

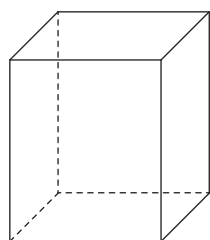
วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ผิวข้าง} &= \text{จำนวนหน้า} \times \text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม} \\ &= 4 \times \frac{1}{2} \times 5 \times 10 \\ &= 100 \quad \text{ตารางเมตร} \end{aligned}$$

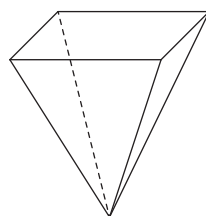
ต้องการหาสีผิวด้านข้างโดยสี 1 ถัง ทาได้พื้นที่ 8 ตารางเมตร
ดังนั้น ต้องใช้สีทั้งหมด $100 \div 8 = 12.5$ ถัง

2.2 ปริมาตรของพีระมิด

นักเรียนปฏิบัติกิจกรรม ดังนี้



ปริซึม



พีระมิด

เตรียมปริซึมและพีระมิดที่มีฐานและความสูงเท่ากัน

นำพีระมิดไปตวงทรายจนเต็ม แล้วเทใส่ปริซึม พบว่า ต้องตวงทรายใส่พีระมิดจนเต็มถึงสามครั้ง
จึงจะเททรายใส่ปริซึมเต็มพอดี แสดงว่า ปริมาตรของพีระมิดเป็น $\frac{1}{3}$ ของปริมาตรปริซึม จากที่
นักเรียนเคยศึกษามาแล้วว่า

$$\text{ปริมาตรของปริซึม} = \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$$

ดังนั้น

$$\text{ปริมาตรของพีระมิด} = \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$$

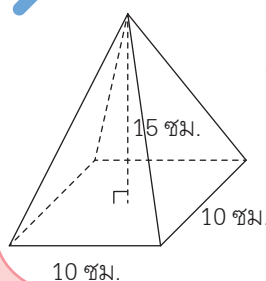


ข้อสังเกต

ความสูง หมายถึง ความสูงตรงของพีระมิด

ตัวอย่างเช่น

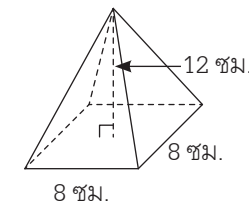
$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรของพีระมิด} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง} \\ &= \frac{1}{3} \times (\text{ความยาวของด้าน})^2 \times \text{ความสูง} \\ &= \frac{1}{3} \times 10^2 \times 15 \\ &= 500 \quad \text{ลูกบาศก์เซนติเมตร} \end{aligned}$$



ตัวอย่างที่ 1

หาปริมาตรของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีฐานยาวด้านละ 8 เซนติเมตร และสูงตรง 12 เซนติเมตร

วิธีทำ



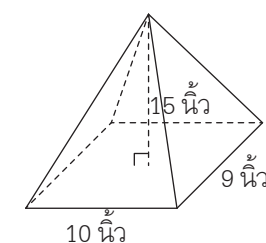
$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรของพีระมิด} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง} \\ &= \frac{1}{3} \times (\text{ความยาวของด้าน})^2 \times \text{ความสูง} \\ &= \frac{1}{3} \times 8^2 \times 12 \\ &= 256 \quad \text{ลูกบาศก์เซนติเมตร} \end{aligned}$$

ดังนั้น ปริมาตรของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่ากับ 256 ลูกบาศก์เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 2

พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง 9 นิ้ว ยาว 10 นิ้ว และสูงตรง 15 นิ้ว
พีระมิดมีปริมาตรกี่ลูกบาศก์นิ้ว

วิธีทำ



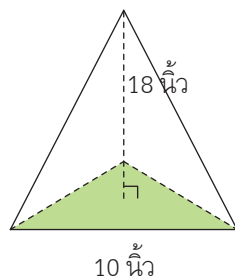
$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรของพีระมิด} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง} \\ &= \frac{1}{3} \times (\text{ความกว้าง} \times \text{ความยาว}) \times \text{ความสูง} \\ &= \frac{1}{3} \times (9 \times 10) \times 15 \\ &= 450 \quad \text{ลูกบาศก์นิ้ว} \end{aligned}$$

ดังนั้น พีระมิดมีปริมาตร 450 ลูกบาศก์นิ้ว

ตัวอย่างที่ 3

หาปริมาตรของพีระมิดฐานสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งมีฐานยาวด้านละ 10 นิ้ว และสูง 18 นิ้ว

วิธีทำ



$$\begin{aligned}\text{ปริมาตรของพีระมิด} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง} \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{ความยาวของด้าน})^2 \right) \times \text{ความสูง} \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 10^2 \times 18 \right) \\ &= \frac{1 \times \sqrt{3} \times 100 \times 18}{3 \times 4} \\ &= 150\sqrt{3} \text{ ลูกบาศก์นิ้ว}\end{aligned}$$

ดังนั้น ปริมาตรของพีระมิดเท่ากับ $150\sqrt{3}$ ลูกบาศก์นิ้ว

ตัวอย่างที่ 4

พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีปริมาตร 256 ลูกบาศก์เซนติเมตร มีฐานยาวด้านละ 8 เซนติเมตร หาคความสูงของพีระมิด

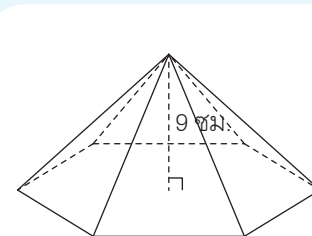
$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \text{ปริมาตรของพีระมิด} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง} \\ \text{ปริมาตรของพีระมิด} &= \frac{1}{3} \times (\text{ความยาวของด้าน})^2 \times \text{ความสูง} \\ 256 &= \frac{1}{3} \times 8^2 \times \text{ความสูง} \\ \text{ความสูง} &= \frac{256 \times 3}{64} \\ \text{ความสูง} &= 12 \text{ เซนติเมตร}\end{aligned}$$

ดังนั้น ความสูงของพีระมิดเท่ากับ 12 เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 5

พีระมิดฐานหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีปริมาตรเท่ากับ $1,800\sqrt{3}$ ลูกบาศก์เซนติเมตร ความสูงของพีระมิด 9 เซนติเมตร หาคความยาวรอบฐาน

วิธีทำ



ปริมาตร $1,800\sqrt{3}$ ลบ.ซม.

ให้ฐานของพีระมิด ยาวด้านละ x เซนติเมตร

$$\begin{aligned}\text{ปริมาตรของพีระมิด} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง} \\ 1,800\sqrt{3} &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \times x^2 \right) \times 9 \\ x^2 &= \frac{(1,800\sqrt{3})(2)}{9\sqrt{3}} \\ x^2 &= 400 \\ x &= 20\end{aligned}$$

ฐานของพีระมิดยาวด้านละ 20 เซนติเมตร

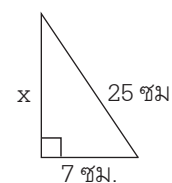
ดังนั้น ความยาวรอบฐานของพีระมิด $6 \times 20 = 120$ เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 6

พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งวัดโดยรอบฐานยาว 56 เซนติเมตร และความสูงเอียง 25 เซนติเมตร พีระมิดมีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร

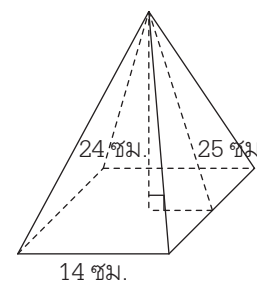
วิธีทำ เนื่องจากโจทย์ไม่ทราบพื้นที่ฐานและความสูงตรง ดังนั้น ต้องหาความยาวของฐานและความสูงตรง ดังต่อไปนี้

ความยาวรอบฐานยาว 56 เซนติเมตร จะได้ว่า พีระมิดมีความยาวของฐานด้านละ $\frac{56}{4} = 14$ เซนติเมตร และหาความสูงตรง โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ดังนี้



$$\begin{aligned}\text{ให้ } x &= \text{เป็นความสูงของพีระมิด} \\ x^2 &= 25^2 - 7^2 \\ &= 625 - 49 \\ &= 576 \\ x &= 24\end{aligned}$$

จะได้ว่า พีระมิดสูง 24 เซนติเมตร และมีความยาวของฐาน 14 เซนติเมตร



$$\begin{aligned}\text{ปริมาตรของพีระมิด} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง} \\ &= \frac{1}{3} \times (\text{ความยาวของด้าน})^2 \times \text{ความสูง} \\ &= \frac{1}{3} \times 14^2 \times 24 \\ &= 1,568 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}\end{aligned}$$

ดังนั้น พีระมิดมีปริมาตร 1,568 ลูกบาศก์เซนติเมตร

แบบฝึกหัดที่ 1



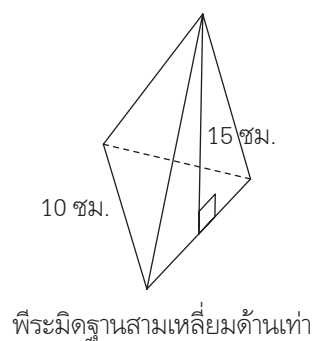
1. จากรูปที่กำหนด ตอบคำถามต่อไปนี้

1)



- (1) ความยาวของฐานเป็นเท่าไร
- (2) ความสูงตรงเป็นเท่าไร
- (3) ความสูงเอียงเป็นเท่าไร
- (4) ความยาวรอบฐานเป็นเท่าไร

2)



- (1) ความยาวของฐานเป็นเท่าไร
- (2) ความสูงตรงเป็นเท่าไร
- (3) ความสูงเอียงเป็นเท่าไร
- (4) ความยาวรอบฐานเป็นเท่าไร

3)



- (1) ความยาวของฐานเป็นเท่าไร
- (2) ความสูงตรงเป็นเท่าไร
- (3) ความสูงเอียงเป็นเท่าไร
- (4) ความยาวรอบฐานเป็นเท่าไร

2. แสดงวิธีทำ

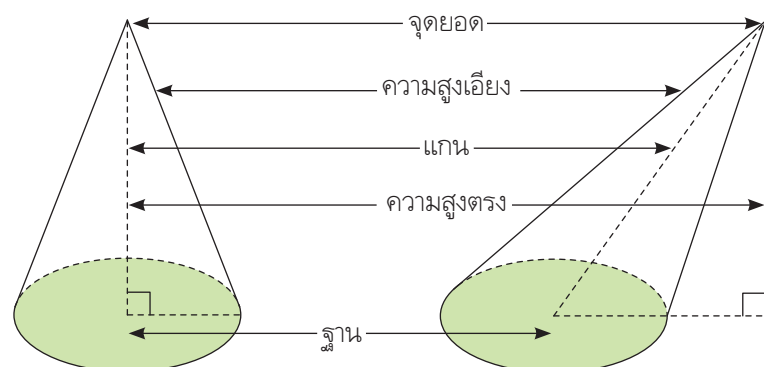
- 1) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีฐานยาวด้านละ 40 เซนติเมตร และมีเส้นยาว 29 เซนติเมตร
พีระมิดนี้มีความสูงกี่เซนติเมตร
- 2) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีพื้นที่ผิวทั้งหมดไม่รวมฐาน 1,500 ตารางนิ้ว ฐานพีระมิดยาวด้านละ 30 นิ้ว พีระมิดนี้มีความสูงเอียงกี่นิ้ว
- 3) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีพื้นที่ผิวทั้งหมด 304 ตารางนิ้ว ฐานพีระมิดยาวด้านละ 8 นิ้ว
พีระมิดนี้มีความสูงเอียงกี่นิ้ว
- 4) หาพื้นที่ฐานของพีระมิดฐานสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งมีฐานยาวด้านละ 8 เซนติเมตร
- 5) หาพื้นที่ฐานและพื้นที่ผิวข้างของประติมากรรมรูปพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีฐานยาวด้านละ 10 เมตร ความสูงเอียง 14 เมตร
- 6) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีฐานยาวด้านละ 10 เซนติเมตร ความสูง 12 เซนติเมตร
พีระมิดนี้มีพื้นที่ฐานและพื้นที่ผิวข้างกี่ตารางเซนติเมตร
- 7) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีฐานยาวด้านละ 32 เมตร ความสูง 12 เมตร
หาพื้นที่ผิวของพีระมิด
- 8) พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็น 644 ตารางเซนติเมตร ความสูงเอียง 23 เซนติเมตร หาความยาวรอบฐานและพื้นที่ฐานของพีระมิด
- 9) พีระมิดฐานห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ซึ่งมีฐานยาวด้านละ 14 นิ้ว และเส้นของพีระมิดยาว 25 นิ้ว หาพื้นที่ผิวข้างของพีระมิด
- 10) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาวรอบฐาน 60 นิ้ว ความสูงเอียง 16 นิ้ว ถ้าวัดความยาวของฐาน และความสูงเอียงลงด้านละ 1 นิ้ว พื้นที่ผิวเมื่อลดความยาวลงเป็นกี่ตารางนิ้ว

3. แสดงวิธีทำ

- 1) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีพื้นที่ฐาน 180 ตารางนิ้ว สูง 10 นิ้ว พีระมิดนี้มีปริมาตรกี่ลูกบาศก์นิ้ว
- 2) พีระมิดฐานสามเหลี่ยมด้านเท่ามีพื้นที่ 1,440 ตารางเซนติเมตร ความสูง 20 เซนติเมตร พีระมิดนี้มีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร
- 3) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาวรอบฐาน 60 เมตร พีระมิดสูง 6 เมตร พีระมิดนี้มีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เมตร
- 4) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความสูง 9 เมตร และมีปริมาตร 1,323 ลูกบาศก์เมตร พีระมิดนี้มีความยาวรอบฐานกี่เมตร
- 5) ช่างออกแบบเพนุ่หล่อพีระมิดทรงตันฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีความกว้าง 6 เมตร ความยาว 10 เมตร และความสูง 5 เมตร ช่างต้องใช้ปูนคิดเป็นปริมาตรกี่ลูกบาศก์เมตร
- 6) พีระมิดฐานหกเหลี่ยมด้านเท่ามีปริมาตร $4,500\sqrt{3}$ ลูกบาศก์เซนติเมตร ความสูง 27 เซนติเมตร ความยาวรอบฐานของพีระมิดเป็นกี่เซนติเมตร
- 7) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีปริมาตร 320 ลูกบาศก์เซนติเมตร ซึ่งมีฐานยาว 8 เซนติเมตร พีระมิดนี้มีความสูงเอียงกี่เซนติเมตร

3. พื้นที่ผิวและปริมาตรของกรวย

กรวย คือ รูปเรขาคณิตสามมิติที่มีฐานเป็นวงกลม มียอดแหลมที่ไม่อยู่บนระนาบเดียวกันกับฐาน และเส้นที่ต่อระหว่างจุดยอดกับจุดใด ๆ บนขอบของฐานเป็นส่วนของเส้นตรง

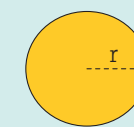
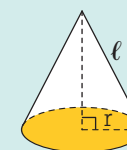


ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นจะกล่าวถึงกรวยตรงเท่านั้น

3.1 พื้นที่ผิวของกรวย

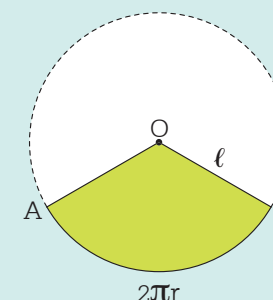
รูปคลี่ของกรวยประกอบด้วย วงกลมซึ่งเป็นฐานของกรวยจำนวน 1 รูป และส่วนของวงกลมจำนวน 1 รูป ดังนี้

พื้นที่ผิวกรวย



ส่วนของฐาน
พื้นที่ฐานเป็นวงกลม
 $= \pi r^2$

เมื่อนำกรวยตัดตามแนวสูงเอียง (l) และคลี่ออกจะได้ ดังรูป



จากรูป กรวยมีความสูงเอียงยาว l รัศมีของฐานยาว r และความยาวเส้นรอบวง (ฐาน) เท่ากับ $2\pi r$ เมื่อคลี่กรวยออกจะได้รูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง ซึ่งจะเป็นส่วนหนึ่งของวงกลมที่จุดศูนย์กลางเป็นจุดยอดของกรวย

เมื่อ พื้นที่วงกลม O เท่ากับ πl^2 ความยาวเส้นรอบวงกลม O เท่ากับ $2\pi l$

พื้นที่รูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง OAB คือ พื้นที่ผิวข้างของกรวย

ความยาวส่วนโค้ง AB คือ เส้นรอบฐานของกรวย

เนื่องจากอัตราส่วนของพื้นที่ของวงกลม O กับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง OAB

เท่ากับอัตราส่วนของความยาวเส้นรอบวงกลม O กับความยาวส่วนโค้ง AB

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad \frac{\text{พื้นที่วงกลม } O}{\text{พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง } OAB} &= \frac{\text{ความยาวของเส้นรอบวงกลม } O}{\text{ความยาวส่วนโค้ง } AB} \\ \frac{\pi l^2}{\text{พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง } OAB} &= \frac{2\pi l}{2\pi r} \\ \frac{\pi l^2}{\text{พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง } OAB} &= \frac{l}{r} \\ \text{พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง } OAB &= \frac{\pi l^2 r}{l} \\ &= \pi r l \end{aligned}$$

เพิ่มความเข้าใจ

นักเรียนสามารถศึกษาเกี่ยวกับการสำรวจอัตราส่วนพื้นที่วงกลมกับพื้นที่รูปสามเหลี่ยมฐานโค้งผ่านไฟล์ .GSP เปิดด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ได้จาก <http://bit.ly/2Qt1KDi>

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง OAB หรือพื้นที่ผิวข้างของกรวยเท่ากับ $\pi r l$

ดังนั้น

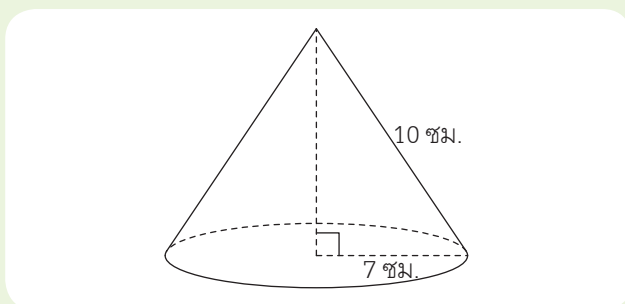
$$\begin{aligned}\text{พื้นที่ผิวของกรวย} &= \text{พื้นที่ฐาน} + \text{พื้นที่ผิวข้าง} \\ \text{พื้นที่ผิวของกรวย} &= \pi r^2 + \pi r l \\ \text{หรือ} &= \pi r (r + l)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1

หาพื้นที่ผิวของกรวยต่อไปนี้ (กำหนด $\pi \approx \frac{22}{7}$)

1)

วิธีทำ



$$\begin{aligned}\text{พื้นที่ฐาน} &= \pi r^2 \\ &\approx \frac{22}{7} \times 7^2 \\ &= 154 \quad \text{ตารางเซนติเมตร}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่ผิวข้าง} &= \pi r l \\ &\approx \frac{22}{7} \times 7 \times 10 \\ &= 220 \quad \text{ตารางเซนติเมตร}\end{aligned}$$

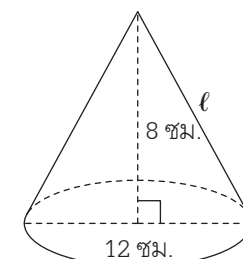
$$\begin{aligned}\text{พื้นที่ผิวของกรวย} &= \text{พื้นที่ฐาน} + \text{พื้นที่ผิวข้าง} \\ &\approx 154 + 220 \\ &= 374 \quad \text{ตารางเซนติเมตร}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{หรือ พื้นที่ผิวของกรวย} &= \pi r^2 + \pi r l \\ &\approx \left(\frac{22}{7} \times 7^2\right) + \left(\frac{22}{7} \times 7 \times 10\right) \\ &= 154 + 220 \\ &= 374 \quad \text{ตารางเซนติเมตร}\end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ผิวของกรวยประมาณ 374 ตารางเซนติเมตร

2)

วิธีทำ



จากรูป หาความยาวของความสูงเอียง โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส
จะได้ $l^2 = 8^2 + 6^2$

$$\begin{aligned}&= 64 + 36 \\ &= 100 \\ l &= 10\end{aligned}$$

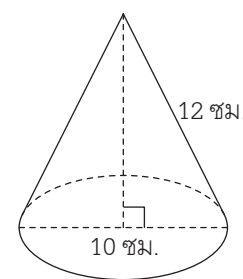
$$\begin{aligned}\text{พื้นที่ผิวของกรวย} &= \pi r^2 + \pi r l \\ &\approx \left(\frac{22}{7} \times 6^2\right) + \left(\frac{22}{7} \times 6 \times 10\right) \\ &= \frac{792 + 1,320}{7} \\ &\approx 301.71 \quad \text{ตารางเซนติเมตร}\end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ผิวของกรวยประมาณ 301.71 ตารางเซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 2

กรวยสัณฐานหนึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานยาว 10 เซนติเมตร และความสูงเอียงยาว 12 เซนติเมตร พื้นที่ผิวของกรวยสัณฐานนี้ประมาณกี่ตารางเซนติเมตร (กำหนด $\pi \approx 3.14$)

วิธีทำ



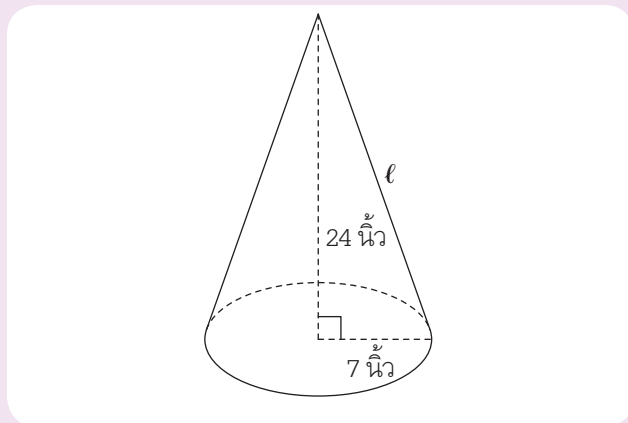
$$\begin{aligned}\text{ให้รัศมีของวงกลมยาว} &= r \quad \text{เซนติเมตร} \\ \text{ดังนั้น} &= \frac{10}{2} = 5 \quad \text{เซนติเมตร} \\ \text{พื้นที่ผิวของกรวย} &= \pi r^2 + \pi r l \\ &\approx (3.14 \times 5^2) + (3.14 \times 5 \times 12) \\ &= 78.5 + 188.4 \\ &= 266.9 \quad \text{ตารางเซนติเมตร}\end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ผิวของกรวยสัณฐานนี้ประมาณ 266.9 ตารางเซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 3

กรวยอันหนึ่งมีรัศมีของฐาน 7 นิ้ว และกรวยสูง 24 นิ้ว พื้นที่ผิวของกรวยประมาณกี่ตารางนิ้ว (กำหนด $\pi \approx \frac{22}{7}$)

วิธีทำ



ให้ความสูงเอียงยาว l นิ้ว

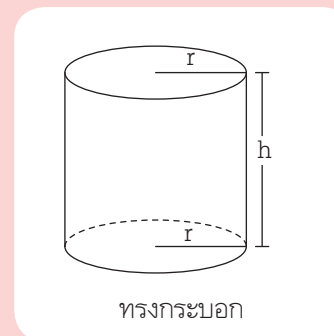
หาความยาวของความสูงเอียง โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad l^2 &= 7^2 + 24^2 \\ &= 49 + 576 \\ &= 625 \\ l &= 25 \\ \text{พื้นที่ผิวของกรวย} &= \pi r^2 + \pi r l \\ &\approx \left(\frac{22}{7} \times 7^2\right) + \left(\frac{22}{7} \times 7 \times 25\right) \\ &= 154 + 550 \\ &= 704 \quad \text{ตารางนิ้ว} \end{aligned}$$

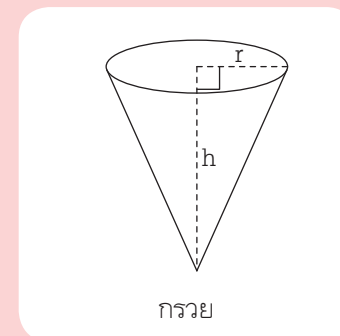
ดังนั้น พื้นที่ผิวของกรวยประมาณ 704 ตารางนิ้ว

3.2 ปริมาตรของกรวย

นักเรียนปฏิบัติกิจกรรม ดังนี้



ทรงกระบอก



กรวย

เตรียมทรงกระบอกและกรวยที่มีรัศมีและความสูงเท่ากัน

นำกรวยไปตวงทรายจนเต็ม แล้วเทใส่ทรงกระบอก พบว่า ต้องตวงทรายใส่กรวยจนเต็มถึงสามครั้ง จึงจะเททรายใส่ทรงกระบอกเต็มพอดี แสดงว่า ปริมาตรของกรวยเป็น $\frac{1}{3}$ ของปริมาตรทรงกระบอก

จะได้ว่า

$$\text{ปริมาตรของกรวย} = \frac{1}{3} \text{ ของปริมาตรของทรงกระบอก}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ \text{เมื่อ } V &\text{ แทน ปริมาตรของกรวย} \\ r &\text{ แทน รัศมีของฐานของกรวย} \\ h &\text{ แทน ความสูงของกรวย} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1

ความสูงของกรวยเป็น 14 เมตร เส้นผ่านศูนย์กลางของฐานมีความยาว 6 เมตร กรวยนี้มีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เมตร กำหนด (กำหนด $\pi \approx \frac{22}{7}$)

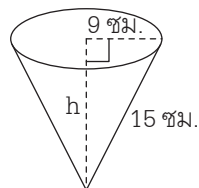
$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{จากโจทย์ รัศมีของฐาน} &= \frac{6}{2} = 3 \text{ เมตร} \\ \text{ปริมาตรของกรวย} &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ &\approx \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 3^2 \times 14 \\ &= 22 \times 3 \times 2 \\ &= 132 \quad \text{ลูกบาศก์เมตร} \end{aligned}$$

ดังนั้น กรวยมีปริมาตรประมาณ 132 ลูกบาศก์เมตร

ตัวอย่างที่ 2

กรวยไอศกรีมอันหนึ่งมีความสูงเอียงยาว 15 เซนติเมตร รัศมีของฐานมีความยาว 9 เซนติเมตร
กรวยจุไอศกรีมได้กี่ลูกบาศก์เซนติเมตร (กำหนด $\pi \approx 3.14$)

วิธีทำ



ให้ความสูงของกรวย h เซนติเมตร

หาความสูงของกรวย โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$h^2 = 15^2 - 9^2$$

$$= 225 - 81$$

$$= 144$$

$$h = 12$$

$$\text{ปริมาตรของกรวย} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$\approx \frac{1}{3} \times 3.14 \times 9^2 \times 12$$

$$= 3.14 \times 27 \times 12$$

$$= 1,017.36 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

ดังนั้น กรวยจุไอศกรีมได้ประมาณ 1,017.36 ลูกบาศก์เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 3

กรวยมีปริมาตร 1,004.80 ลูกบาศก์เซนติเมตร เส้นผ่านศูนย์กลางของฐานมีความยาว 16 เซนติเมตร ความสูงของกรวยเป็นกี่เซนติเมตร (กำหนด $\pi \approx 3.14$)

วิธีทำ จากโจทย์ รัศมีของฐาน $= \frac{16}{2}$
 $= 8$ เซนติเมตร

$$\text{ปริมาตรของกรวย} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$1004.80 \approx \frac{1}{3} \times 3.14 \times 8^2 \times h$$

$$h \approx \frac{1004.80 \times 3}{3.14 \times 64}$$

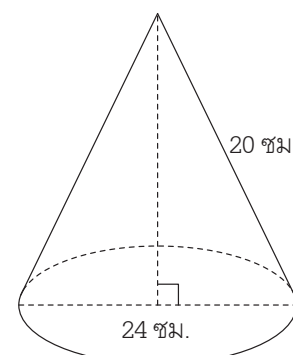
$$h = 15$$

ดังนั้น ความสูงของกรวยประมาณ 15 เซนติเมตร

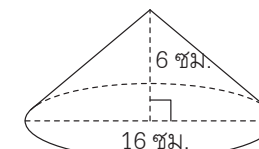
แบบฝึกหัดที่ 2

1. หาพื้นที่ผิวและปริมาตรของกรวยต่อไปนี้ (กำหนด $\pi \approx 3.14$)

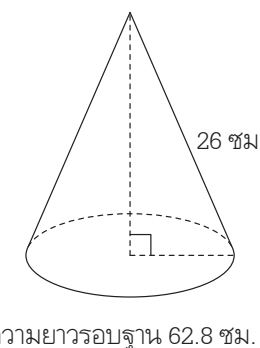
1)



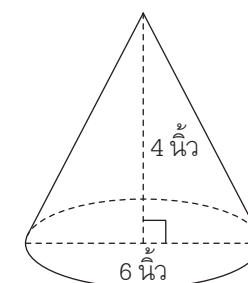
2)



3)



4)



2. แสดงวิธีทำ (กำหนด $\pi \approx 3.14$)

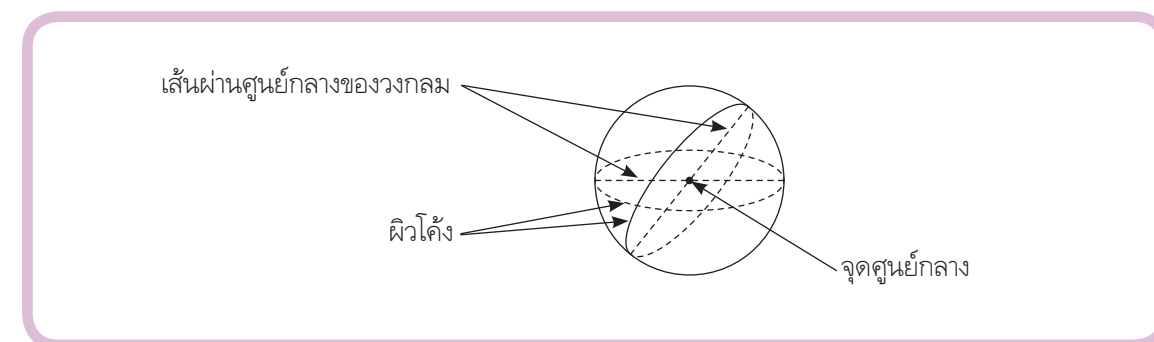
- 1) กรวยอันหนึ่งเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานมีความยาว 20 เซนติเมตร และความสูงเอียงยาว 15 เซนติเมตร พื้นที่ผิวข้างของกรวยเป็นกี่ตารางเซนติเมตร
- 2) กรวยกระดาดอันหนึ่งมีความสูงเอียงยาว 13 เซนติเมตร และสูง 12 เซนติเมตร พื้นที่ผิวของกรวยกระดาดเป็นกี่ตารางเซนติเมตร
- 3) กรวยมีความยาวรอบฐาน 43.96 เซนติเมตร และความสูงเอียง 12 เซนติเมตร กรวยนี้มีพื้นที่ผิวกี่ตารางเซนติเมตร
- 4) กรวยอันหนึ่งมีพื้นที่ผิว 577.76 ตารางนิ้ว และรัศมีของฐานยาว 8 นิ้ว กรวยนี้มีความสูงเอียงยาวกี่นิ้ว
- 5) ทรงกรวยมีพื้นที่ผิว 263.76 ตารางนิ้ว เส้นผ่านศูนย์กลางของฐานมีความยาว 12 นิ้ว กรวยนี้มีความสูงกี่นิ้ว

3. แสดงวิธีทำ (กำหนด $\pi \approx 3.14$)

- 1) กรวยกระดาดสำหรับต้มน้ำ รัศมีปากกรวยยาว 2 เซนติเมตร ความสูง 5 เซนติเมตร กรวยกระดาดนี้ได้อีกกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร
- 2) กรวยมีความสูงเอียงยาว 15 เซนติเมตร รัศมีของฐานยาว 9 เซนติเมตร กรวยนี้มีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร
- 3) กรวยกระดาดมีพื้นที่ผิว 188.4 ตารางเซนติเมตร รัศมีของฐานยาว 5 เซนติเมตร กรวยกระดาดนี้มีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร
- 4) กระโຈມรูปกรวยมีรัศมียาว 20 เซนติเมตร ความสูง 30 เซนติเมตร กระโຈມนี้จุอากาศได้กี่ลูกบาศก์เซนติเมตร
- 5) ช่างต้องการเหล็กถ่วงน้ำหนักรูปกรวย เพื่อใช้ในงานก่อสร้าง โดยเหล็กถ่วงน้ำหนักนี้มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 16 เซนติเมตร ความสูงเอียง 17 เซนติเมตร เหล็กถ่วงน้ำหนักนี้มีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร
- 6) กรวยอันหนึ่งมีรัศมียาว 5 เซนติเมตร โดยความสูงของกรวยมากกว่ารัศมี 10 เซนติเมตร กรวยนี้มีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร
- 7) กรวยมีความยาวรอบฐาน 31.4 นิ้ว ความสูง 12 นิ้ว กรวยนี้มีปริมาตรกี่ลูกบาศก์นิ้ว
- 8) กรวยมีปริมาตร 8,478 ลูกบาศก์นิ้ว รัศมีของฐานยาว 15 นิ้ว กรวยนี้มีพื้นที่ผิวที่ตารางนิ้ว
- 9) กรวยมีปริมาตร 200.96 ลูกบาศก์นิ้ว ความสูงเป็น 3 เท่าของรัศมีของฐาน กรวยนี้มีรัศมีของฐานกี่นิ้ว

4. พื้นที่ผิวและปริมาตรของทรงกลม

ทรงกลม คือ รูปเรขาคณิตสามมิติที่มีผิวโค้งเรียบ และจุดทุกจุดบนผิวโค้งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน



4.1 พื้นที่ผิวของทรงกลม

จะได้จากสูตร

$$\text{พื้นที่ผิวของทรงกลม} = 4\pi r^2$$

ตัวอย่างที่ 1

ลูกโลกลูกหนึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 28 เซนติเมตร ลูกโลกนี้มีพื้นที่ผิวที่ตารางเซนติเมตร (กำหนด $\pi \approx \frac{22}{7}$)

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{จากโจทย์ รัศมีของฐาน} &= \frac{28}{2} = 14 \text{ เซนติเมตร} \\ \text{พื้นที่ผิวของทรงกลม} &= 4\pi r^2 \\ &\approx 4 \times \frac{22}{7} \times 14^2 \\ &= 4 \times 22 \times 2 \times 14 \\ &= 2,464 \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$

ดังนั้น ลูกโลกนี้มีพื้นที่ผิวประมาณ 2,464 ตารางเซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 2

แท่งโมลูกหนึ่งเป็นทรงกลม มีพื้นที่ผิวเท่ากับ 2,816 ตารางเซนติเมตร ถ้าผ่าครึ่งแท่งโมลูกนี้ มีเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมใหญ่กี่เซนติเมตร (กำหนด $\pi \approx \frac{22}{7}$)

วิธีทำ

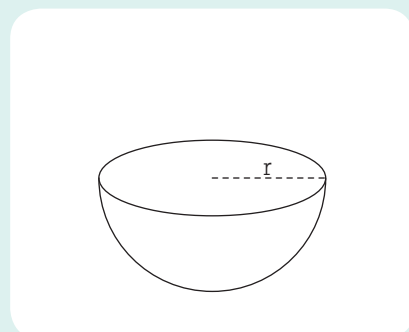
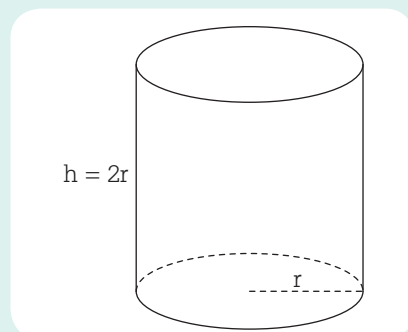
$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ผิวของทรงกลม} &= 4\pi r^2 \\ 2,816 &\approx 4 \times \frac{22}{7} \times r^2 \\ r^2 &\approx \frac{2816 \times 7}{4 \times 22} \\ r^2 &= 224 \\ r &\approx 14.97 \\ r &\approx 15 \end{aligned}$$

จะได้ รัศมียาวประมาณ 15 เซนติเมตร

ดังนั้น แท่งโมมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวประมาณ 30 เซนติเมตร

4.2 ปริมาตรของทรงกลม

นักเรียนปฏิบัติกิจกรรม ดังนี้



เตรียมทรงกระบอกและทรงกลมที่มีรัศมีเท่ากัน และความสูงของทรงกระบอกเท่ากับสองเท่าของรัศมีของทรงกลม

นำครึ่งทรงกลมไปตวงทรายจนเต็ม แล้วเทใส่ทรงกระบอก พบว่า ต้องตวงทรายใส่ครึ่งทรงกลมจนเต็มถึงสามครั้ง จึงจะเททรายใส่ทรงกระบอกเต็มพอดี แสดงว่า ปริมาตรของครึ่งทรงกลมเป็น $\frac{1}{3}$ ใน 3 ของปริมาตรทรงกระบอก

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } \frac{1}{2} \text{ ของปริมาตรของทรงกลม} &= \frac{1}{3} \text{ ของปริมาตรของทรงกระบอก} \\ \text{ปริมาตรของทรงกลม} &= \frac{2}{3} \text{ ของปริมาตรของทรงกระบอก} \\ &= \frac{2}{3} \times \pi r^2 h \\ &= \frac{2}{3} \times \pi r^2 \times 2r \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรของทรงกลม} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \text{เมื่อ } r \text{ แทนรัศมีของทรงกลม} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1

ลูกฟุตบอลพลาสติกมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 14 เซนติเมตร ปริมาตรของอากาศที่บรรจุในลูกฟุตบอลเป็นกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร (กำหนด $\pi \approx \frac{22}{7}$)

วิธีทำ

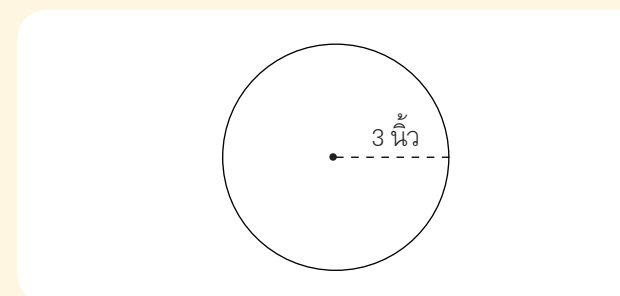
$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรของทรงกลม} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &\approx \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7^3 \\ &= \frac{4}{3} \times 22 \times 7 \times 7 \\ &\approx 1,437.33 \quad \text{ลูกบาศก์เซนติเมตร} \end{aligned}$$

ดังนั้น ปริมาตรอากาศที่บรรจุในลูกฟุตบอลประมาณ 1,437.33 ลูกบาศก์เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 2

ลูกตุ้มทรงกลมตันลูกหนึ่งมีรัศมียาว 3 นิ้ว ถ้าต้องการหล่อลูกตุ้มขนาดเดียวกันจำนวน 7 ลูก ต้องใช้ปูนหล่อทั้งหมดกี่ลูกบาศก์นิ้ว (กำหนด $\pi \approx \frac{22}{7}$)

วิธีทำ



$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรของทรงกลม} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &\approx \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 3^3 \\ &= \frac{4 \times 22 \times 3 \times 3}{7} \\ &= \frac{792}{7} \quad \text{ลูกบาศก์นิ้ว} \end{aligned}$$

ต้องการหล่อลูกตุ้มทั้งหมด 7 ลูก

ดังนั้น ต้องใช้ปูนหล่อทั้งหมดประมาณ $\frac{792}{7} \times 7 = 792$ ลูกบาศก์นิ้ว

ตัวอย่างที่ 3

ทรงกลมมีปริมาตร 38,808 ลูกบาศก์เซนติเมตร ทรงกลมนี้มีพื้นที่ผิวที่ตารางเซนติเมตร (กำหนด $\pi \approx \frac{22}{7}$)

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรของทรงกลม} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ 38808 &\approx \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times r^3 \\ r^3 &\approx \frac{38808 \times 3 \times 7}{4 \times 22} \\ r^3 &= 9261 \\ r &= 21 \end{aligned}$$

ทรงกลมนี้มีรัศมี 21 เซนติเมตร

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ผิวของทรงกลม} &= 4\pi r^2 \\ &\approx 4 \times \frac{22}{7} \times 21^2 \\ &= 4 \times 22 \times 3 \times 21 \\ &= 5,544 \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$

ดังนั้น ทรงกลมนี้มีพื้นที่ผิวประมาณ 5,544 ตารางเซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 4

ทรงกลมตันลูกหนึ่ง มีเส้นรอบวงกลมใหญ่ยาว 176 เซนติเมตร ทรงกลมตันนี้มีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร (กำหนด $\pi \approx \frac{22}{7}$)

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{เส้นรอบวงกลม} &= 2\pi r \\ 176 &\approx 2 \times \frac{22}{7} \times r \\ r &\approx \frac{176 \times 7}{2 \times 22} \\ r &= 28 \end{aligned}$$

ทรงกลมตันมีรัศมียาว 28 เซนติเมตร

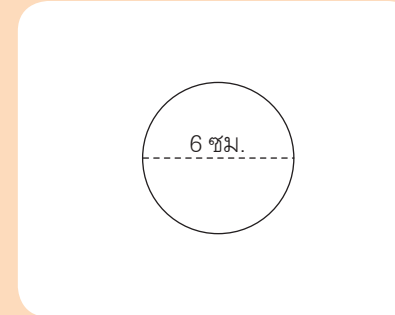
$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรของทรงกลม} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &\approx \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 28^3 \\ &= \frac{4 \times 22 \times 28 \times 28 \times 28}{3 \times 7} \\ &\approx 91,989.33 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} \end{aligned}$$

ดังนั้น ทรงกลมตันนี้มีปริมาตรประมาณ 91,989.33 ลูกบาศก์เซนติเมตร

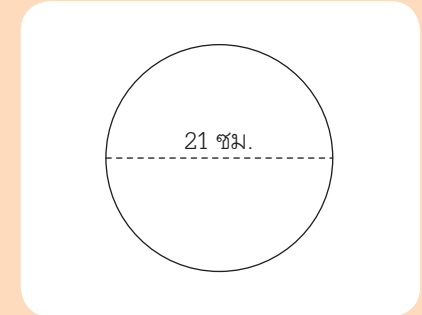
แบบฝึกหัดที่ 3

1. หาพื้นที่ผิวและปริมาตรของทรงกลมต่อไปนี้ (กำหนด $\pi \approx \frac{22}{7}$)

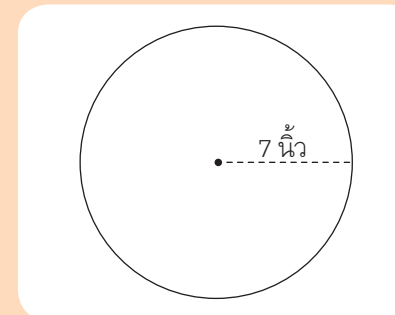
1)



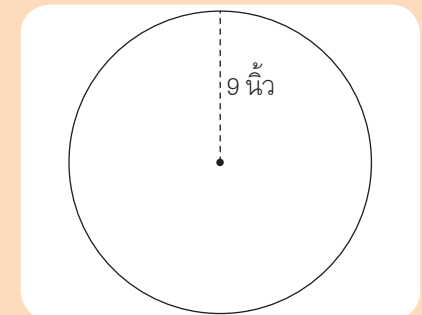
2)



3)



4)



2. แสดงวิธีทำ (กำหนด $\pi \approx \frac{22}{7}$)

- 1) ทรงกลมตันลูกหนึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 12 เซนติเมตร ทรงกลมตันนี้มีพื้นที่ผิวที่ตารางเซนติเมตร
- 2) ทรงกลมตันมีความยาวรอบวง 132 เซนติเมตร ทรงกลมตันนี้มีพื้นที่ผิวที่ตารางเซนติเมตร
- 3) ลูกฟุตบอลพลาสติกมีสี่สลับกัน 4 สี โดยแต่ละสีมีพื้นที่เท่า ๆ กัน ถ้าลูกฟุตบอลนี้มีรัศมียาว 5 นิ้ว พื้นที่ผิวแต่ละสีเป็นกี่ตารางนิ้ว
- 4) ทรงกลมมีพื้นที่ผิว 2,464 ตารางเซนติเมตร ทรงกลมนี้มีรัศมีกี่เซนติเมตร
- 5) ทรงกลมสองทรงกลมมีรัศมียาว 5 และ 8 นิ้ว ตามลำดับ ทรงกลมทั้งสองมีพื้นที่ผิวต่างกันกี่ตารางนิ้ว
- 6) ทรงกลมตันลูกหนึ่ง มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 16 เซนติเมตร ทรงกลมตันนี้มีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร
- 7) ลูกตุ้มทรงกลมตันลูกหนึ่งมีรัศมียาว 6 เซนติเมตร ลูกตุ้มมีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร
- 8) ลูกเปตองลูกหนึ่งมีรัศมียาว 9 เซนติเมตร เมื่อหย่อนลูกเปตองลงในกระป๋องน้ำทรงกระบอกซึ่งใส่น้ำเต็มกระป๋อง น้ำที่ล้นออกมามีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร
- 9) ทรงกลมตันลูกหนึ่งมีพื้นที่ผิว 154 ตารางนิ้ว ทรงกลมตันนี้มีปริมาตรกี่ลูกบาศก์นิ้ว
- 10) สัมไอทรงกลมมีเส้นรอบวงภายนอกยาว 65 เซนติเมตร ถ้าเปลือกสัมไอหนา 0.5 เซนติเมตร ปริมาตรส่วนของเนื้อสัมไอเป็นกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร