

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

เล่ม 1

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ผู้เรียบเรียง

นางวัชรารัตน์ กรอุษณกุล

นางจินดา อยู่เป็นสุข

นางนพรัตน์ วันแก้ว

รศ. ดร.อำพล ธรรมเจริญ

นายรณชัย มาเจริญทรัพย์

นางสาวสายสุณี สุทธิจักร์

นายไอศุรีย์ สุดประเสริฐ

นายวุฒิชัย ศรีสุธากุล

ผู้ตรวจ

ดร.ขวัญ เพี้ยซ้าย

ผศ.รุจิรา พิพิพจนการณ

นางสาวบุรณาด เอยนิน

บรรณาธิการ

นางสาวจันทร์เพ็ญ ชุ่มคช

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ

ปีที่พิมพ์ 2567

พิมพ์ครั้งที่ 1

จำนวนพิมพ์ 10,000 เล่ม

ISBN : 978-616-606-058-4

รหัสสินค้า 3416007

อักษ

www.aksorn.com

จัดพิมพ์และจำหน่ายทั่วประเทศโดย

บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจก. จำกัด

142 ถนนตะนาว เขตพระนคร กรุงเทพมหานคร 10200

โทร. 0 2622 2999 (จัดไปมิต 20 คู่สาย)

แฟกซ์: บริษัท ไทยร่มเกล้า จำกัด โทร. 0 2903 9101-6



หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม
ศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 นี้
ผู้เรียบเรียงได้จัดแบ่งออกเป็น
๓ ดังนี้



สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

QR Code

แบบฝึกหัดเพื่อทบทวนหรือ

ตรวจสอบความ^๒รู้พื้นฐาน^๑ก่อนเรียน

ควรรู้ก่อนเรียน

คำตามประจำหน่วยการเรียนรู้

ที่ครอบคลุมผลการเรียนรู้
ในหน่วยการเรียนรู้

กิจกรรมคณิตศาสตร์

เพื่อส่งเสริมการเรียนรู้
แบบ Active Learning



มุมมองเทคโนโลยี

ความรู้เกี่ยวกับการใช้เทคโนโลยี
เป็นเครื่องมือเพื่อช่วยตรวจสอบคำตอบ



เพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกทำ
จนเกิดความชำนาญ

คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง

ที่เชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์
ไปใช้ในชีวิตจริง



สรุปแนวคิดหลัก

โดยรวมของหน่วยการเรียนรู้

เพื่อทบทวนความรู้ให้แก่ผู้เรียน

แนวข้อสอบ A-Level

แนวข้อสอบเพื่อเข้าศึกษาต่อ
ในระดับอุดมศึกษา



QR Code

ใช้สมาร์ทโฟน
เพื่อสแกนเข้าดู
สื่อดิจิทัลเพิ่มเติม

Thinking Time

คำถามกระตุ้นให้
ผู้เรียนได้คิดต่อยอด
จากเนื้อหาที่เรียน

คณิตน่ารู้

เสริมความรู้ หรือข้อสังเกต
ที่ได้จากเนื้อหาที่เรียน

แนะนำแนวคิด

เทคนิคต่างๆ ที่ชี้แนะวิธีการ
แก้โจทย์ทางคณิตศาสตร์

แบบฝึกทักษะประจำหน่วยการเรียนรู้

เพื่อประเมินความรู้ความเข้าใจของผู้เรียน
ประจำหน่วยการเรียนรู้

กิจกรรมการเรียนรู้เชิงรุก (Active Learning)

กิจกรรมที่เน้น
ให้ผู้เรียนได้ลงมือ
ปฏิบัติจริง เพื่อ
เกิดการเรียนรู้ และ
สร้างองค์ความรู้
ด้วยตัวเอง





สารบัญ คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 1

หน่วยการเรียนรู้ที่

1

เซต

1.1	เซต	4
1.2	เอกภพสัมพัทธ์	10
1.3	สับเซตและเพาเวอร์เซต	12
1.4	แผนภาพเวนน	16
1.5	การดำเนินการของเซต	19
1.6	จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด	28

คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง	38
สรุปแนวคิดหลัก	39
แบบฝึกทักษะประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 1	42

หน่วยการเรียนรู้ที่

2

ตรรกศาสตร์

2.1	ประพจน์	46
2.2	การเชื่อมประพจน์	50
2.3	การหาค่าความจริงของรูปแบบของประพจน์	59
2.4	การสร้างตารางค่าความจริง	63
2.5	รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน	66
2.6	สัจนิรันดร์	72
2.7	การอ้างเหตุผล	79
2.8	ประโยคเปิด	85
2.9	ตัวบ่งปริมาณ	87
2.10	ค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณตัวเดียว	90
2.11	สมมูลและนิเสธของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ	96

คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง	103
สรุปแนวคิดหลัก	104
แบบฝึกทักษะประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 2	106

หน่วยการเรียนรู้ที่

3

จำนวนจริง

108

3.1	จำนวนจริง	110
3.2	สมบัติของระบบจำนวนจริง	116
3.3	การแยกตัวประกอบของพหุนาม	130
3.4	สมการพหุนามตัวแปรเดียว	146
3.5	สมบัติของการไม่เท่ากัน	153
3.6	ช่วงและการแก้อสมการพหุนาม	156
3.7	เศษส่วนของพหุนาม	172
3.8	สมการและอสมการเศษส่วนของพหุนาม	178
3.9	ค่าสัมบูรณ์	186
3.10	สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์ของพหุนาม	190

คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง	200
สรุปแนวคิดหลัก	201
แบบฝึกทักษะประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 3	208

กิจกรรมการเรียนรู้เชิงรุก (Active Learning)

211

บรรณานุกรม

212



คำอธิบายรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์ เล่ม 1

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

เวลา 80 ชั่วโมง

ศึกษาเกี่ยวกับเซต เซตจำกัดและเซตอนันต์ การเท่ากันของเซต เอกภพสัมพัทธ์ สับเซต และเพาเวอร์เซต แผนภาพเวนน การดำเนินการของเซต และจำนวนสมาชิกของเซตจำกัด ประพจน์ การเชื่อมประพจน์ การหาค่าความจริงของรูปแบบของประพจน์ การสร้างตารางค่าความจริง รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน สัจนิรันดร์ การอ้างเหตุผล ประโยคเปิด ตัวบ่งปริมาณ ค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณตัวเดียว สมมูลและนิเสธของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ จำนวนจริง สมบัติของระบบจำนวนจริง การนำเสนอสมบัติของจำนวนจริงไปใช้ในการแก้ปัญหา ค่าสัมบูรณ์ ตัวประกอบของพหุนาม สมการพหุนามตัวแปรเดียว สมบัติของการไม่เท่ากัน ช่วงและการแก้อสมการพหุนาม การดำเนินการของเศษส่วนของพหุนาม สมการและอสมการเศษส่วนของพหุนาม สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์ของพหุนาม

โดยการจัดประสบการณ์หรือสร้างสถานการณ์ในชีวิตประจำวันที่เกี่ยวข้องให้ผู้เรียนได้ศึกษา ค้นคว้า ฝึกทักษะโดยการปฏิบัติจริง ทดลอง สรุป รายงาน เพื่อพัฒนาทักษะ กระบวนการในการคิดคำนวณ การแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และนำประสบการณ์ด้านความรู้ ความคิด ทักษะ และกระบวนการที่ได้ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์

เพื่อให้เห็นคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานได้อย่างเป็นระบบ มีระเบียบ รอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ และมีความเชื่อมั่นในตนเอง

ผลการเรียนรู้

1. เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับเซต ในการสื่อสารและสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับตรรกศาสตร์เบื้องต้น ในการสื่อสาร สื่อความหมาย และอ้างเหตุผล
3. เข้าใจจำนวนจริง และใช้สมบัติของจำนวนจริงในการแก้ปัญหา
4. แก่สมการและอสมการพหุนามตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสี่ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
5. แก่สมการและอสมการเศษส่วนของพหุนามตัวแปรเดียว และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
6. แก่สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์ของพหุนามตัวแปรเดียว และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

รวม 6 ผลการเรียนรู้

เซต

จากการสำรวจความชอบขนมมาการองไส้ต่าง ๆ ของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง พบว่ามีไส้ยอดนิยมสามชนิด คือ มาการองไส้คัสตาร์ด มาการองไส้ช็อกโกแลต และมาการองไส้บัตเตอร์ครีม ทั้งนี้ นักเรียนหนึ่งคนอาจชอบไส้มาการองมากกว่า 1 ชนิด หรือไม่ชอบเลยก็ได้

อยากทราบว่า
นักเรียนที่ชอบมาการอง
ทั้งสามชนิดมีจำนวนเท่าใด
และใช้ความรู้ เรื่อง เซต
ในการหาคำตอบได้อย่างไร



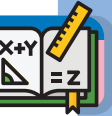
ผลการเรียนรู้

- เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับเซต ในการสื่อสาร และสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

- ความรู้เบื้องต้นและสัญลักษณ์พื้นฐานเกี่ยวกับเซต
- ยูเนียน อินเตอร์เซกชัน และคอมพลีเมนต์ของเซต

ควรรู้ก่อนเรียน



ในโลกนี้มีสัตว์หลายชนิด นักวิทยาศาสตร์จึงได้แบ่งสัตว์เป็น 2 ประเภท โดยใช้กระดูกสันหลังเป็นเกณฑ์ ดังนี้

สัตว์มี
กระดูกสันหลัง

จำแนกออกเป็น
5 ประเภท

1. สัตว์พวกปลา



2. สัตว์สะเทินน้ำสะเทินบก



3. สัตว์เลื้อยคลาน



4. สัตว์จำพวกนก



5. สัตว์เลี้ยงลูกด้วยน้ำนม

สัตว์ไม่มี
กระดูกสันหลัง

จำแนกออกเป็น
8 ประเภท

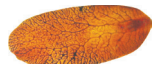
1. พวกฟองน้ำ



2. พวกลำตัวกลวงหรือมีโพรง



3. พวกหนอนตัวแบน



4. พวกหนอนตัวกลม



5. พวกที่มีลำตัวเป็นปล้อง



6. พวกสัตว์ทะเล ผีเสื้อทะเล



7. พวกหอยทะเล
และหมีทะเล



8. พวกที่มีขาเป็นข้อ



ที่มา : <https://www.scimath.org> สืบค้นเมื่อ 13 กันยายน 2566

จากตาราง เป็นตัวอย่างการแบ่งสัตว์ออกเป็นกลุ่มที่มีลักษณะโครงสร้างแตกต่างกัน สำหรับวิชาคณิตศาสตร์มีการแบ่งกลุ่มสิ่งต่าง ๆ ที่สนใจ เช่น จำนวนจริงแบ่งได้เป็นจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ ซึ่งการแบ่งกลุ่มต่าง ๆ นี้ นักเรียนจะศึกษารายละเอียดได้ใน เรื่อง เซต

แบบทดสอบ
พื้นฐานก่อนเรียน



www.aksorn.com/qrcode/a361101

1.1 เซต (Set)

1. เซต (Set)

ในชีวิตประจำวัน นักเรียนเรียกการรวมอยู่ของสิ่งต่าง ๆ ว่า กอง หมู่ ฟุ้ง กลุ่ม เช่น กองหนังสือ หมู่บ้าน ฟุ้งนก กลุ่มดาว เมื่อกล่าวถึงกลุ่มของสิ่งต่าง ๆ ที่ทราบแน่นอนว่าสิ่งใดอยู่ในกลุ่มและสิ่งใดไม่อยู่ในกลุ่ม เช่น กลุ่มของสระในภาษาอังกฤษ กลุ่มของจำนวนเต็มบวก และกลุ่มของสิ่งต่าง ๆ ที่ไม่ทราบแน่นอนว่าสิ่งใดอยู่ในกลุ่มและสิ่งใดไม่อยู่ในกลุ่ม เช่น กลุ่มของสาวสวย กลุ่มของคนดี กลุ่มของคนเก่ง

ในทางคณิตศาสตร์เรียกกลุ่มของสิ่งต่าง ๆ ที่ทราบแน่นอนว่า สิ่งใดอยู่ในกลุ่มและสิ่งใดไม่อยู่ในกลุ่มว่า **เซต (set)** และเรียกสิ่งที่อยู่ในเซตว่า **สมาชิก (element)** เช่น

เซตของสระในภาษาอังกฤษ มีสมาชิก ได้แก่ **a, e, i, o และ u**

เซตของจำนวนเต็มบวกระหว่าง -3 กับ 6 มีสมาชิก ได้แก่ **1, 2, 3, 4 และ 5**

โดยทั่วไปวิธีการเขียนเซตมี 2 แบบ คือ

1) แบบแจกแจงสมาชิก ใช้เมื่อสามารถเขียนสมาชิกแต่ละตัวได้ การเขียนเซตแบบนี้ จะเขียนสมาชิกทุกตัวของเซตลงในวงเล็บปีกกา “{ }” และใช้เครื่องหมายจุลภาค “,” คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว เช่น

เซตของจำนวนคู่บวกที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 8 เขียนแทนด้วย {2, 4, 6, 8} และจะเขียนสมาชิกแต่ละตัวเพียงครั้งเดียว เช่น เซตของพยัญชนะในคำว่า “กรรมกร” เขียนแทนด้วย {ก, ร, ม} เซตของสระในภาษาอังกฤษเขียนแทนด้วย {a, e, i, o, u}

โดยทั่วไปเซตจะแทนด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เช่น A, B, C

ให้ A แทนเซตของจำนวนคู่ลบที่มากกว่า -6 เขียนเซต A แบบแจกแจงสมาชิกได้ ดังนี้

$A = \{-4, -2\}$ อ่านว่า A เป็นเซตที่มี -4 และ -2 เป็นสมาชิก

กรณีที่สมาชิกมีจำนวนมาก ๆ นิยมใช้จุดสามจุด “...” เพื่อแสดงว่ายังมีสมาชิกอื่น ๆ อยู่ในเซตนั้น เช่น

ให้ B แทนเซตของจำนวนนับที่น้อยกว่า 100 เขียนเซต B แบบแจกแจงสมาชิกได้ ดังนี้

$B = \{1, 2, 3, \dots, 99\}$

สัญลักษณ์ “ $\in$ ” ใช้แสดงว่า เป็นสมาชิกของ หรือ อยู่ใน

สัญลักษณ์ “ $\notin$ ” ใช้แสดงว่า ไม่เป็นสมาชิกของ หรือ ไม่อยู่ใน

จากเซต A จะได้ว่า -4 เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $-4 \in A$

-6 ไม่เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $-6 \notin A$

2) แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก โดยทั่วไปใช้สำหรับเซตที่ไม่สามารถเขียนสมาชิกแต่ละตัวได้ จึงต้องใช้การบรรยายลักษณะของสมาชิกหรือเงื่อนไขของสมาชิก หรือความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิก การเขียนเซตแบบนี้ประกอบด้วยวงเล็บปีกกา และใช้ตัวแปรแทนสมาชิกของเซต โดยได้กำหนดเงื่อนไขของสมาชิกไว้หลังเครื่องหมาย “|” แทนคำว่า “โดยที่” เช่น

ให้ B แทนเซตของชื่อวันในหนึ่งสัปดาห์ เขียนเซต B แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกได้ ดังนี้

$B = \{x | x \text{ เป็นวันในหนึ่งสัปดาห์}\}$

การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขอาจเขียนได้มากกว่า 1 แบบ เช่น

ถ้า $C = \{0, 1\}$ จะเขียนได้ ดังนี้

$C = \{x | x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } -1 < x < 2\}$

หรือ $C = \{x | x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } x^2 - x = 0\}$

2. เซตจำกัด (Finite Set) และเซตอนันต์ (Infinite Set)

พิจารณาเซตต่อไปนี้

$A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 100 ตัว

$B = \{x | x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก และ } 3 < x < 4\}$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 0 ตัว

$C = \{1, 2, 3, \dots\}$ มีจำนวนสมาชิกนับไม่ถ้วน และไม่สามารถบอกจำนวนสมาชิกได้

จากเซต A และเซต B นักเรียนสามารถบอกจำนวนสมาชิกของเซตได้ เรียกเซตลักษณะนี้ว่า **เซตจำกัด** และจากเซต C นักเรียนไม่สามารถบอกจำนวนสมาชิกของเซตได้ เรียกเซตลักษณะนี้ว่า **เซตอนันต์**

บทนิยาม

เซตจำกัด เป็นเซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับศูนย์หรือจำนวนเต็มบวก

เซตอนันต์ เป็นเซตที่ไม่สามารถบอกจำนวนสมาชิกของเซตได้

จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $n(A)$

เซตจำกัดที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับศูนย์ คือ เซตที่ไม่มีสมาชิก เรียกว่า **เซตว่าง (Empty Set or Null Set)** เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\{ \}$ หรือ $\emptyset$

บทนิยาม

เซตว่าง เป็นเซตที่ไม่มีสมาชิก



Thinking Time

$\{\emptyset\}$ เป็นเซตว่างหรือไม่ เพราะเหตุใด

ในการเขียนเซตของจำนวน สามารถใช้สัญลักษณ์แทนเซตของจำนวนต่าง ๆ ดังนี้

$\mathbb{Z}^+$ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก	หรือ $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}^-$ แทนเซตของจำนวนเต็มลบ	หรือ $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$
$\mathbb{Z}^0$ แทนเซตของศูนย์	หรือ $\mathbb{Z}^0 = \{0\}$
$\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม	หรือ $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{N}$ แทนเซตของจำนวนนับ	หรือ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Q}$ แทนเซตของจำนวนตรรกยะ	
$\mathbb{Q}'$ แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ	
$\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง	



จดจำ

เซตของจำนวนเต็มบวก คือ เซตของจำนวนนับ หรือ $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$

3. เซตที่เท่ากัน (Equal Sets)

พิจารณา $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } 1 \leq x < 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

และ $C = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } 1 < x \leq 6\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

จะเห็นว่า เซต A และเซต B มีสมาชิกเหมือนกันทุกตัวและมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน จะถือว่าเซตทั้งสองคือเซตเดียวกัน หรือกล่าวได้ว่า เซต A เท่ากับเซต B เขียนแทนด้วย $A = B$

เซต B และเซต C มีจำนวนสมาชิกที่เท่ากันแต่มีสมาชิกไม่เหมือนกัน นั่นคือมีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวของเซต B ที่ไม่ใช่สมาชิกของเซต C หรือมีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวของเซต C ที่ไม่ใช่สมาชิกของเซต B หรือกล่าวได้ว่า เซต B ไม่เท่ากับเซต C เขียนแทนด้วย $B \neq C$

บทนิยาม

เซต A เท่ากับเซต B หมายถึง สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B และสมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกของเซต A

ตัวอย่างที่ 1

กำหนด $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4\}$ และ $C = \{3, 4, 2\}$ ให้พิจารณาว่าเซตใดบ้างเท่ากัน และเซตใดบ้างไม่เท่ากัน

วิธีทำ $A \neq B$ เพราะมี 2 เป็นสมาชิกของเซต A แต่ไม่เป็นสมาชิกของเซต B

$B \neq C$ เพราะมี 2 เป็นสมาชิกของเซต C แต่ไม่เป็นสมาชิกของเซต B

$A = C$ เพราะสมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต C และสมาชิกทุกตัวของเซต C เป็นสมาชิกของเซต A

ลองทำ

กำหนด $A = \{1, 5, 7, 9\}$, $B = \{9, 7, 5\}$ และ $C = \{5, 9, 1, 7\}$ ให้พิจารณาว่าเซตใดบ้างเท่ากัน และเซตใดบ้างไม่เท่ากัน

ตัวอย่างที่ 2

กำหนด $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง } -3 \text{ กับ } 0\}$

$B = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } -1 < x \leq 2\}$

และ $C = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มลบ และ } -2 \leq x < 5\}$

ให้พิจารณาว่าเซตใดบ้างเท่ากัน และเซตใดบ้างไม่เท่ากัน

วิธีทำ เขียนเซต A เซต B และเซต C แบบแจกแจงสมาชิกได้ ดังนี้

$A = \{-2, -1\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ และ $C = \{-2, -1\}$

$A \neq B$ เพราะสมาชิกทุกตัวของเซต A ไม่เป็นสมาชิกของเซต B และสมาชิกทุกตัวของเซต B ไม่เป็นสมาชิกของเซต A

$B \neq C$ เพราะสมาชิกทุกตัวของเซต B ไม่เป็นสมาชิกของเซต C และสมาชิกทุกตัวของเซต C ไม่เป็นสมาชิกของเซต B

$A = C$ เพราะสมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต C และสมาชิกทุกตัวของเซต C เป็นสมาชิกของเซต A

ลองทำ

กำหนด $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง } -1 \text{ กับ } 5\}$

$B = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } -1 \leq x \leq 5\}$

และ $C = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } -2 < x < 6\}$

ให้พิจารณาว่าเซตใดบ้างเท่ากัน และเซตใดบ้างไม่เท่ากัน

แบบฝึกทักษะ 1.1

ระดับพื้นฐาน ★

1. ให้เขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก

- เซตของสี่บนธงชาติไทย
- เซตของจังหวัดในประเทศไทยที่มีพื้นที่ติดทะเล
- เซตของสระในภาษาอังกฤษที่อยู่ในคำว่า "mathematics"
- เซตของจำนวนนับที่มีสองหลักและมีเลขโดด 7 อย่างน้อยหนึ่งหลัก
- เซตของพหุคูณของ 5
- เซตของจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยกว่า -3
- $\{x | x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง } 1 \text{ กับ } 2\}$
- $\{x | x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า } -4 \text{ และน้อยกว่า } 4\}$
- $\{x | x \text{ เป็นจำนวนนับ และ } x \leq 5\}$
- $\{x | x \text{ เป็นจำนวนเต็มลบ และ } x^2 - 1 = 0\}$

ระดับกลาง ★★

2. ให้บอกจำนวนสมาชิกของเซตต่อไปนี้

- $A = \{1, 2, 3\}$
- $B = \{1, 2, \{1\}, \{1, 2, 3\}\}$
- $C = \{x | x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง } -5 \text{ กับ } 5\}$
- $D = \{x | x \text{ เป็นจำนวนเต็มลบที่มากกว่า } 0\}$
- $E = \{x | x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก และ } x^2 - 4 = 0\}$

3. ให้เขียนเซตต่อไปนี้แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก

- $M = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$
- $N = \{1, 4, 7, 10, \dots, 34\}$
- $P = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$
- $R = \{7, 14, 21, \dots, 343\}$
- $S = \{\{-1, 1\}, \{-2, 2\}, \{-3, 3\}, \{-4, 4\}, \dots\}$

4. เซตต่อไปนี้เซตใดเป็นเซตจำกัด เซตใดเป็นเซตอนันต์

- $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$
- $\{x | x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย } 2 \text{ ลงตัว}\}$
- $\{x | x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย } 2 \text{ ลงตัว และน้อยกว่า } 100\}$
- $\{x | x = \frac{n}{n+1} \text{ โดยที่ } n \text{ เป็นจำนวนนับ}\}$
- $\{x | x \text{ เป็นจำนวนเฉพาะที่มากกว่า } 5 \text{ และน้อยกว่า } 7\}$

5. เซตต่อไปนี้เซตใดบ้างเท่ากัน

- $A = \{1, 2, 3\}$
 $B = \{3, 2, 1\}$
- $A = \{123\}$
 $B = \{321\}$
- $A = \{x | x = 1 - \frac{n}{n+1} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนนับ}\}$
 $B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$
- $A = \{x | x \text{ เป็นจำนวนคู่ที่น้อยกว่า } 8\}$
 $B = \{0, 2, 4, 6\}$

ระดับท้าทาย ★★★

6. ให้พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด

- $ab \in \{a, b, \{ab\}, c\}$
- $\{0\} \in \{x | x \text{ เป็นจำนวนคู่บวก}\}$
- $15 \notin \{x | x = n^2 - 1 \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนนับ}\}$
- $\{x | x \text{ เป็นจำนวนนับ และ } x^2 < 0\} = \emptyset$
- ถ้า $A = \{x | x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } (x + \frac{1}{2})^2 \leq 0\}$ แล้วเซต A เป็นเซตจำกัด

1.2 เอกภพสัมพัทธ์ (Relative Universe)

ในการเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก นักเรียนต้องกำหนดเซตขึ้นมาเซตหนึ่งโดยจะไม่กล่าวถึงสิ่งใดนอกเหนือจากสมาชิกของเซตที่กำหนด เรียกเซตนั้นว่า **เอกภพสัมพัทธ์** เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathcal{U}$

บทนิยาม **เอกภพสัมพัทธ์** คือ เซตที่กำหนดขอบข่ายในการพิจารณาสมาชิกของเซตที่กำลังกล่าวถึง

พิจารณา $A = \{x \mid -5 < x < 5\}$ เมื่อ $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$

จะเห็นว่า $\mathcal{U}$ เป็นเซตของจำนวนเต็มลบ ซึ่งเซต A มีสมาชิกเป็นจำนวนเต็มลบที่อยู่ระหว่าง -5 กับ 5 จะได้สมาชิกในเซต A คือ -4, -3, -2 และ -1

ดังนั้น $A = \{-4, -3, -2, -1\}$

ตัวอย่างที่ 3

กำหนด $B = \{x \mid -15 \leq x < 5 \text{ และ } x \text{ หารด้วย 3 ลงตัว}\}$ เมื่อ $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$ ให้เขียนเซต B แบบแจกแจงสมาชิก

วิธีทำ เมื่อ $\mathcal{U}$ เป็นเซตของจำนวนเต็ม ซึ่งเซต B มีสมาชิกเป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า หรือเท่ากับ -15 แต่น้อยกว่า 5 และหารด้วย 3 ลงตัว
จะได้สมาชิกในเซต B คือ -15, -12, -9, -6, -3, 0 และ 3
ดังนั้น $B = \{-15, -12, -9, -6, -3, 0, 3\}$

ลองทำ

- กำหนด $A = \{x \mid -10 \leq x \leq 5\}$ เมื่อ $\mathcal{U} = \mathbb{Z}^+$ ให้เขียนเซต A แบบแจกแจงสมาชิก
- กำหนด $B = \{x \mid -10 \leq x \leq 30 \text{ และ } x \text{ หารด้วย 5 ลงตัว}\}$ เมื่อ $\mathcal{U} = \mathbb{N}$
ให้เขียนเซต B แบบแจกแจงสมาชิก

ตัวอย่างที่ 4

กำหนด $C = \{x \mid x^2 - x = 0\}$

- ให้เขียนเซต C แบบแจกแจงสมาชิก เมื่อ $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$
- ให้เขียนเซต C แบบแจกแจงสมาชิก เมื่อ $\mathcal{U} = \mathbb{Z}^+$

วิธีทำ 1) เมื่อ $\mathcal{U}$ เป็นเซตของจำนวนเต็ม จะได้สมาชิกในเซต C คือ 0 และ 1
ดังนั้น $C = \{0, 1\}$ เมื่อ $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$

- เมื่อ $\mathcal{U}$ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก จะได้สมาชิกในเซต C คือ 1
ดังนั้น $C = \{1\}$ เมื่อ $\mathcal{U} = \mathbb{Z}^+$

ลองทำ

กำหนด $C = \{x \mid 3x^2 - 5x - 2 = 0\}$

- ให้เขียนเซต C แบบแจกแจงสมาชิก เมื่อ $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$
- ให้เขียนเซต C แบบแจกแจงสมาชิก เมื่อ $\mathcal{U} = \mathbb{Z}^+$

จากตัวอย่างที่ 4 การกำหนดเอกภพสัมพัทธ์ที่ต่างกัน อาจทำให้ผลลัพธ์ที่ได้ต่างกัน ดังนั้น เพื่อไม่ให้เกิดการสับสน จึงกำหนดเอกภพสัมพัทธ์ในการเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไข

เช่น $\{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x^2 - x = 0\} = \{1\}$

$\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - x = 0\} = \{0, 1\}$



จดจำ

ถ้ากล่าวถึงเซตของจำนวนและไม่ได้กำหนดว่าเซตใดเป็นเอกภพสัมพัทธ์ ในระดับชั้นนี้ให้ถือว่าเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริง ($\mathbb{R}$)

แบบฝึกทักษะ 1.2

ระดับพื้นฐาน ★

- ให้เขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิกตามเซต $\mathcal{U}$ ที่กำหนด

- $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 3x = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 3x = 0\}$
- $\{x \mid x^2 - 3x = 0\}$

ระดับกลาง ★★

- ให้เขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิกตามเซต $\mathcal{U}$ ที่กำหนด

- $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ}\}$ และ $\{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 20\}$
- $\{x \in \mathbb{N} \mid \text{มีจำนวนเต็ม } n \text{ ซึ่ง } x = \frac{1}{n}\}$ และ $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 0.001\}$
- $\{x \in \mathbb{Z} \mid \text{มีจำนวนเต็ม } n \text{ ซึ่ง } x = 7n\}$ และ $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 300\}$
- $\{x \in \mathbb{Z} \mid \text{มีจำนวนเต็ม } n \text{ ซึ่ง } x = 2n + 1\}$ และ $\{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x \leq 20\}$
- $\{x \in \mathbb{Z}^+ \mid 3 < x < 15 \text{ และ } x \text{ หารด้วย 3 ลงตัว}\}$

1.3 สับเซต (Subset) และเพาเวอร์เซต (Power Set)

1. สับเซต (Subset) และสับเซตแท้ (Proper Subset)

ความสัมพันธ์ระหว่างเซตทั้งสองเซตที่นักเรียนทราบมาแล้ว คือ การเท่ากันของเซต ในหัวข้อนี้ นักเรียนจะได้ศึกษาความสัมพันธ์อีกกรณีหนึ่ง

พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างเซต A กับเซต B ดังนี้

กำหนด $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4\}$

สมาชิกทั้งหมดของเซต A คือ 1 และ 2

สมาชิกทั้งหมดของเซต B คือ 1, 2, 3 และ 4

จะเห็นว่า สมาชิกทั้งหมดของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B ด้วย แต่มีสมาชิกบางตัวของเซต B ไม่เป็นสมาชิกของเซต A เช่น 3 เป็นสมาชิกของเซต B แต่ไม่เป็นสมาชิกของเซต A เรียกเซต A ว่า เป็นสับเซตของเซต B และเรียกเซต B ว่า ไม่เป็นสับเซตของเซต A หรือกล่าวได้ว่า เซต A เป็นสับเซตแท้ของเซต B

บทนิยาม

กำหนด A และ B เป็นเซต กล่าวได้ว่า

เซต A เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B เขียนแทนด้วย $A \subset B$

เซต A ไม่เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวของเซต A ที่ไม่เป็นสมาชิกของเซต B เขียนแทนด้วย $A \not\subset B$

เซต A เป็นสับเซตแท้ของเซต B ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ แต่ $A \neq B$

ตัวอย่างที่ 5

กำหนด $A = \{3, 5\}$, $B = \{3, 5, 7\}$ และ $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ให้พิจารณาว่าเซตคูใดบ้างเป็นสับเซตกัน

วิธีทำ สมาชิกทั้งหมดของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B จะได้ว่า $A \subset B$
สมาชิกทั้งหมดของเซต B เป็นสมาชิกของเซต C จะได้ว่า $B \subset C$
สมาชิกทั้งหมดของเซต A เป็นสมาชิกของเซต C จะได้ว่า $A \subset C$

ลองทำ

กำหนด $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{4, 6, 8\}$ และ $C = \{2, 4\}$ ให้พิจารณาว่าเซตคูใดบ้างเป็นสับเซตกัน

ถ้า A, B เป็นเซต และ $A \subset B$ แล้วสมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B และ $B \subset A$ แล้วสมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกของเซต A จะได้ว่า $A = B$

ในทางตรงกันข้าม เมื่อพิจารณาเซต A และเซต B เมื่อ $A = B$ จะได้ว่า สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B นั่นคือ $A \subset B$ และสมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกของเซต A นั่นคือ $B \subset A$

ดังนั้นจึงสรุปได้ตามบทนิยาม ดังนี้

บทนิยาม

กำหนด A และ B เป็นเซต กล่าวได้ว่า $A \subset B$ และ $B \subset A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$

ตัวอย่างที่ 6

กำหนด $A = \{a, b, c\}$ ให้หาสับเซตที่เป็นไปได้ทั้งหมดของเซต A

วิธีทำ เนื่องจากเซต A มีสมาชิก 3 ตัว จึงทำให้เซตที่เป็นสับเซตของ A มีสมาชิกไม่เกิน 3 ตัว คือ 0, 1, 2 และ 3 ตัว

สับเซตทั้งหมดของเซต A ที่มีสมาชิก 0 ตัว หรือไม่มีสมาชิก คือ $\emptyset$

สับเซตทั้งหมดของเซต A ที่มีสมาชิก 1 ตัว คือ $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$

สับเซตทั้งหมดของเซต A ที่มีสมาชิก 2 ตัว คือ $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ และ $\{a, c\}$

สับเซตทั้งหมดของเซต A ที่มีสมาชิก 3 ตัว คือ $\{a, b, c\} = A$

ดังนั้น สับเซตทั้งหมดของเซต A คือ $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$ และ $\{a, b, c\}$

ลองทำ

กำหนด $B = \{1, 2, 3\}$ ให้หาสับเซตที่เป็นไปได้ทั้งหมดของเซต B

ข้อสังเกต

- เซตว่างเป็นสับเซตของทุกเซต นั่นคือ ถ้าเซต A เป็นเซต แล้ว $\emptyset \subset A$
- เซตทุกเซตเป็นสับเซตของตัวเอง นั่นคือ ถ้าเซต A เป็นเซต แล้ว $A \subset A$

พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสับเซตทั้งหมดของเซต A กับจำนวนสมาชิกของเซต A ต่อไปนี้

เมื่อ $A = \{1\}$ จะพบว่า สับเซตของเซต A ประกอบด้วย $\emptyset$ และ $\{1\}$ จะมีจำนวนสับเซตเท่ากับ 2 เซต เขียนในรูปเลขยกกำลังเท่ากับ 2^1 เซต

เมื่อ $A = \{1, 2\}$ จะพบว่า สับเซตของเซต A ประกอบด้วย $\emptyset, \{1\}, \{2\}$ และ $\{1, 2\}$ จะมีจำนวนสับเซตเท่ากับ 4 เซต เขียนในรูปเลขยกกำลังเท่ากับ 2^2 เซต

เมื่อ $A = \{1, 2, 3\}$ จะพบว่า สับเซตของเซต A ประกอบด้วย $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ และ $\{1, 2, 3\}$ จะมีจำนวนสับเซตเท่ากับ 8 เซต เขียนในรูปเลขยกกำลังเท่ากับ 2^3 เซต

จะเห็นว่า เมื่อ A เป็นเซตจำกัด จำนวนสับเซตของเซต A เขียนในรูปเลขยกกำลังของฐาน 2 ได้

ถ้าเซต A มีสมาชิก n ตัว แล้วจำนวนสับเซตทั้งหมดของเซต A เท่ากับ 2^n เซต และจำนวนสับเซตแท้ทั้งหมดของเซต A เท่ากับ $2^n - 1$ เซต

2. เพาเวอร์เซต (Power Set)

เซตของสับเซตทั้งหมดของเซต A เรียกว่า เพาเวอร์เซตของเซต A เขียนแทนด้วย $P(A)$

กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$

จะได้ว่า สับเซตทั้งหมดของเซต A คือ $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ และ $\{1, 2, 3\}$

ดังนั้น $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

ตัวอย่างที่ 7

กำหนด $A = \{1, 2, \{1\}\}$ ให้หาเพาเวอร์เซตของเซต A

วิธีทำ เพาเวอร์เซตของเซต A คือ

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{1\}\}, \{1, 2\}, \{1, \{1\}\}, \{2, \{1\}\}, \{1, 2, \{1\}\}\}$$

ลองทำ

กำหนด $B = \{m, \{n\}, \{p\}\}$ ให้หาเพาเวอร์เซตของเซต B

ถ้าเซต A มีสมาชิก n ตัว แล้วเพาเวอร์เซตของเซต A มีสมาชิก 2^n ตัว นั่นคือ $n(P(A)) = 2^n$

จากตัวอย่างที่ 7 เซต A มีสมาชิก 3 ตัว ดังนั้น $P(A)$ มีสมาชิก $2^3 = 8$ ตัว

แบบฝึกทักษะ 1.3

ระดับพื้นฐาน ★

1. ให้หาสับเซตทั้งหมดของเซตต่อไปนี้

- 1) $\{4\}$ 2) $\{5, 7\}$ 3) $\{5, \{6\}, \{7\}\}$

2. กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ให้หา

- 1) สับเซตทั้งหมดของเซต A ที่มีสมาชิก 2 ตัว
2) สับเซตทั้งหมดของเซต A ที่มีสมาชิก 3 ตัว
3) สับเซตทั้งหมดของเซต A ที่มีสมาชิก 4 ตัว

ระดับกลาง ★★

3. ให้หาเพาเวอร์เซตของเซตต่อไปนี้

- 1) $\{\emptyset\}$ 2) $\{1, 2, \{1, 2\}\}$ 3) $\{\{a\}, b, \{ab\}\}$

4. กำหนด $A = \{\emptyset, 1, \{2\}, \{1, 2, 3\}\}$ ให้พิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

- 1) $\emptyset \subset \emptyset$ 2) $\emptyset \in A$ 3) $\{\emptyset\} \in P(A)$
4) $\{1\} \subset A$ 5) $\{1, 2, 3\} \subset A$ 6) $\{\emptyset, 1, 2\} \subset A$
7) $1, \{2\} \in P(A)$ 8) $\{\{\emptyset, 1\}\} \subset P(A)$ 9) $\{\emptyset, 1, \{2\}, \{1, 2, 3\}\} \subset A$

5. ให้หาจำนวนสมาชิกของเซต A เมื่อกำหนดจำนวนสมาชิกของ $P(A)$ ดังนี้

- 1) $n(P(A)) = 8$ 2) $n(P(A)) = 16$ 3) $n(P(A)) = 128$

ระดับท้าทาย ★★★

6. กำหนด $n(P(P(A))) = 256$ ให้หา $n(A)$

7. กำหนด $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ และ $B = \{a, b\}$ ให้หาจำนวนของเซต X ซึ่งทำให้ $B \subset X \subset A$

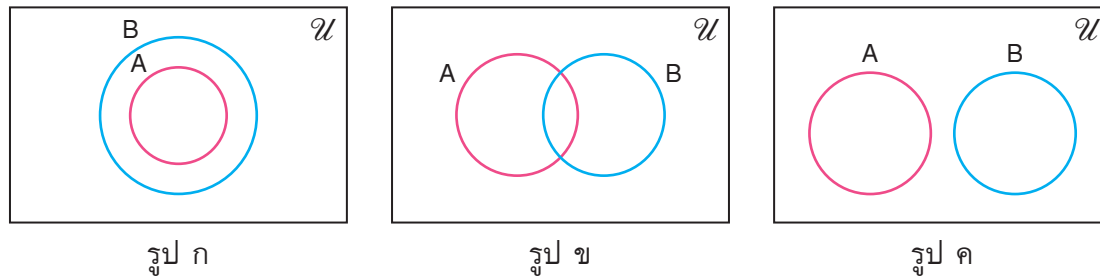
8. ให้พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด

- 1) $\{1, 2\} \in P(\{1, 2, \{1, 2\}\})$
2) $\{1, \{2\}\} \in P(\{\emptyset, 1, \{2\}\})$
3) $\{\emptyset, \{0\}\} \in P(\{\emptyset, \emptyset, \{0\}\})$

1.4 แผนภาพเวนน์ (Venn Diagram)

ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ด้วยเซต นักคณิตศาสตร์สองท่าน คือ จอห์น เวนน์ และเลออนาร์ด ออยเลอร์ พบว่าการเขียนแผนภาพแทนเซตจะช่วยสื่อความคิด ทำให้เห็นภาพของปัญหาชัดเจนขึ้น ซึ่งแผนภาพออยเลอร์จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซตที่เกิดขึ้นจริงหรือมีอยู่จริง ส่วนแผนภาพเวนน์จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซตที่สามารถเป็นไปได้ทั้งหมด โดยไม่คำนึงถึงว่าสามารถเกิดขึ้นได้จริงหรือไม่ ในอดีตนิยมเรียกแผนภาพแทนเซตว่า **แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์** เพื่อเป็นเกียรติแก่นักคณิตศาสตร์ทั้งสอง แต่ในปัจจุบันเรียกแผนภาพดังกล่าวว่า **แผนภาพเวนน์** เนื่องจากแผนภาพเวนน์และแผนภาพออยเลอร์มีความแตกต่างกันตามที่กล่าวข้างต้น และบางครั้งเพื่อความสะดวกจะเรียกอย่างสั้น ๆ ว่า **แผนภาพ**

การเขียนแผนภาพ นิยมแทนเอกภพสัมพัทธ์ ($\mathcal{U}$) ด้วยรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า หรืออาจเป็นรูปปิดอื่น ๆ ก็ได้ ส่วนเซตอื่น ๆ ที่เป็นสับเซตของเซต $\mathcal{U}$ นิยมแทนด้วยวงกลม วงรี รูปสี่เหลี่ยมเล็ก หรือรูปปิดอื่น ๆ ซึ่งเขียนไว้ภายในรูปปิดของเซต $\mathcal{U}$ ดังรูป



จากรูป ก รูป ข และรูป ค แสดงว่า เซต A และเซต B เป็นสับเซตของ $\mathcal{U}$

จากรูป ก สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B จะได้ว่า เซต A เป็นสับเซตของเซต B

จากรูป ข เซต A และเซต B มีสมาชิกบางส่วนร่วมกัน เซตที่มีสมาชิกบางส่วนร่วมกัน เรียกว่า **เซตมีส่วนร่วม (joint sets)**

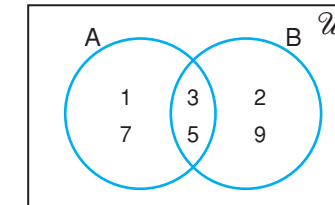
จากรูป ค เซต A และเซต B ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย เซตที่ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย เรียกว่า **เซตไม่มีส่วนร่วม (disjoint sets)**

ตัวอย่างที่ 8

กำหนด $A = \{1, 3, 5, 7\}$ และ $B = \{2, 3, 5, 9\}$ ให้เขียนแผนภาพแทนเซต A และเซต B

วิธีทำ เนื่องจากเซต A และเซต B มีสมาชิกร่วมกัน คือ 3 และ 5

เขียนแผนภาพแทนเซต A และเซต B ได้ ดังนี้



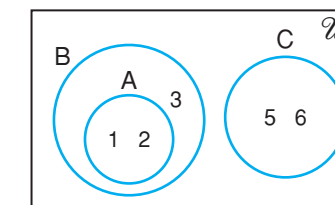
ลองทำดู

กำหนด $A = \{3, 6, 8\}$ และ $B = \{3, 7, 8, 9\}$ ให้เขียนแผนภาพแทนเซต A และเซต B

ตัวอย่างที่ 9

กำหนด $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ และ $C = \{5, 6\}$ ให้เขียนแผนภาพแทนเซต A เซต B และเซต C

วิธีทำ เนื่องจากสมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B หรือเซต A เป็นสับเซตของเซต B ซึ่งเซต A และเซต B ไม่มีสมาชิกร่วมกับเซต C เขียนแผนภาพแทนเซต A เซต B และเซต C ได้ ดังนี้



ลองทำดู

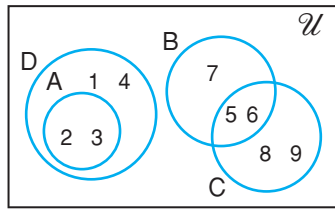
กำหนด $A = \{5, 7\}$, $B = \{2, 5, 7\}$ และ $C = \{1, 9\}$ ให้เขียนแผนภาพแทนเซต A เซต B และเซต C

ตัวอย่างที่ 10

กำหนด $A = \{2, 3\}$, $B = \{5, 6, 7\}$, $C = \{5, 6, 8, 9\}$ และ $D = \{1, 2, 3, 4\}$

ให้เขียนแผนภาพแทนเซต A เซต B เซต C และเซต D

วิธีทำ เนื่องจากสมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต D หรือเซต A เป็นสับเซตของเซต D ซึ่งเซต B และเซต C มีสมาชิกร่วมกัน คือ 5 และ 6 เขียนแผนภาพแทนเซต A เซต B เซต C และเซต D ได้ ดังนี้



ลองทำ

กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{5, 6, 7, 8\}$ และ $D = \{7, 8, 9, 10\}$

ให้เขียนแผนภาพแทนเซต A เซต B เซต C และเซต D

แบบฝึกทักษะ 1.4

ระดับพื้นฐาน ★

1. ให้เขียนแผนภาพแทนเซตต่อไปนี้ เมื่อกำหนด U เป็นเซตของจำนวนนับ

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ | 2) $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ |
| $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ | $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ |

ระดับกลาง ★★

2. ให้เขียนแผนภาพแทนเซตต่อไปนี้ เมื่อกำหนด U เป็นเซตของจำนวนนับ

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ | 2) $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ |
| $B = \{1, 3, 4, 5, 7\}$ | $B = \{4, 6, 8\}$ |
| $C = \{1, 4, 5\}$ | $C = \{3, 5, 7, 9\}$ |

1.5 การดำเนินการของเซต (Set Operations)

การดำเนินการของเซต เป็นการสร้างเซตใหม่จากเซตที่กำหนด ซึ่งเป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์เดียวกัน ด้วยวิธีการต่อไปนี้

1. ยูเนียน (Union)

ถ้า U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ A และ B เป็นเซต

ให้ $A = \{1, 3, 5, 7\}$ และ $B = \{5, 6, 7, 9\}$ สร้างเซต C ซึ่งเป็นเซตที่สัมพันธ์กับเซต A และเซต B โดยที่สมาชิกของเซต C เป็นสมาชิกของเซต A หรือเซต B หรือของทั้งสองเซตได้ ดังนี้

$C = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$ จะเห็นว่า เซต C ประกอบด้วยสมาชิก ดังนี้

1 และ 3 เป็นสมาชิกที่อยู่ในเซต A เท่านั้น

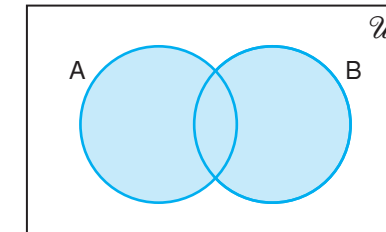
6 และ 9 เป็นสมาชิกที่อยู่ในเซต B เท่านั้น

5 และ 7 เป็นสมาชิกที่อยู่ในเซต A และเซต B

เรียกเซต C ว่า ยูเนียนของเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย $A \cup B$

บทนิยาม กำหนด A และ B เป็นเซต กล่าวว่า $A \cup B = \{x | x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$

เขียนแผนภาพแทน $A \cup B$ ได้ ดังนี้



ตัวอย่างที่ 11

1) กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{2, 3, 4, 5\}$ ให้หา $A \cup B$

วิธีทำ จาก $A \cup B = \{x | x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$

จะได้ว่า $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

2) กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ให้หา $A \cup B$

วิธีทำ เนื่องจากสมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B และจากบทนิยาม $A \cup B$

จะได้ว่า $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = B$



การใช้แผนภาพเวนนแสดง
การดำเนินการของเซต

www.aksorn.com/simulation/mat05133

ลองทำ

กำหนด $A = \{m, n, k\}$ และ $B = \{m, n, p, k\}$ ให้หา $A \cup B$

จดจำ

ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cup B = B$

ตัวอย่างที่ 12

กำหนด $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ และ $C = \{f, g\}$ ให้หา

- 1) $A \cup B$
- 2) $B \cup C$
- 3) $(A \cup B) \cup C$
- 4) $A \cup (B \cup C)$

วิธีทำ จาก $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$

- 1) $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$
- 2) $B \cup C = \{c, d, e, f, g\}$
- 3) $(A \cup B) \cup C = \{a, b, c, d, e\} \cup \{f, g\} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
- 4) $A \cup (B \cup C) = \{a, b\} \cup \{c, d, e, f, g\} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

ลองทำ

กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ และ $C = \{6, 7\}$ ให้หา

- 1) $A \cup B$
- 2) $B \cup C$
- 3) $(A \cup B) \cup C$
- 4) $A \cup (B \cup C)$

พีชคณิตของเซต (Algebra of Sets)

กำหนด A, B และ C เป็นเซต

1. กฎเอกลักษณ์ (Identity Law)
มี $\emptyset$ เป็นเอกลักษณ์ของการยูเนียน
จะได้ $\emptyset \cup A = A = A \cup \emptyset$
2. กฎนิพจน์ (Idempotent Law)
 $A \cup A = A$
3. กฎการสลับที่ (Commutative Law)
 $A \cup B = B \cup A$
4. กฎการเปลี่ยนหมู่ (Associative Law)
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2. อินเตอร์เซกชัน (Intersection)

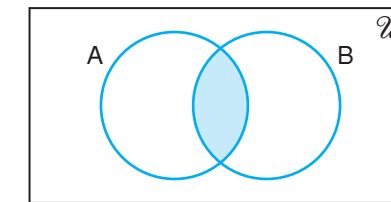
ถ้า $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ A และ B เป็นเซต

ให้ $A = \{2, 3, 7\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 5\}$ สร้างเซต C ที่มีสมาชิกเป็นสมาชิกของทั้งเซต A และเซต B ได้ ดังนี้

$C = \{2, 3\}$ จะเห็นว่า สมาชิกแต่ละตัวของเซต C เป็นสมาชิกของทั้งเซต A และเซต B เรียกเซต C ว่า อินเตอร์เซกชันของเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย $A \cap B$

บทนิยาม กำหนด A และ B เป็นเซต กล่าวได้ว่า $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \in B\}$

เขียนแผนภาพแทน $A \cap B$ ได้ ดังนี้



ตัวอย่างที่ 13

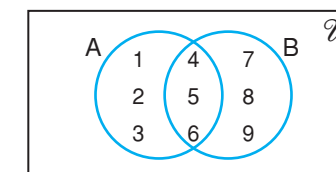
กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{10, 11, 12\}$ และ $D = \{1, 4, 5\}$

- 1) ให้หา $A \cap B$ และเขียนแผนภาพแทนเซต A และเซต B
- 2) ให้หา $A \cap C$ และเขียนแผนภาพแทนเซต A และเซต C
- 3) ให้หา $A \cap D$ และเขียนแผนภาพแทนเซต A และเซต D

วิธีทำ จาก $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \in B\}$

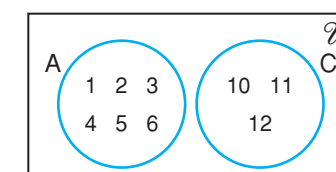
- 1) $A \cap B = \{4, 5, 6\}$

เขียนแผนภาพแทนเซต A และเซต B ได้ ดังนี้



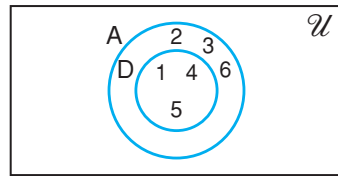
- 2) $A \cap C = \emptyset$

เขียนแผนภาพแทนเซต A และเซต C ได้ ดังนี้



3) $A \cap D = \{1, 4, 5\} = D$

เขียนแผนภาพแทนเซต A และเซต D ได้ ดังนี้



จดจำ
ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cap B = A$

ลองทำ

กำหนด $A = \{x | x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 6}\}$

$B = \{x | x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก และ } 3 < x \leq 7\}$

$C = \{x | x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 3 ลงตัว และ } 8 < x < 16\}$

และ $D = \{x | x \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ และ } 1 \leq x \leq 5\}$

1) ให้หา $A \cap B$ และเขียนแผนภาพแทนเซต A และเซต B

2) ให้หา $A \cap C$ และเขียนแผนภาพแทนเซต A และเซต C

3) ให้หา $A \cap D$ และเขียนแผนภาพแทนเซต A และเซต D

ตัวอย่างที่ 14

กำหนด $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d, e\}$ และ $C = \{a, c, e, f\}$ ให้หา

1) $A \cup B$ 2) $B \cup C$

3) $(A \cap B) \cap C$ 4) $A \cap (B \cap C)$

วิธีทำ จาก $A \cap B = \{x | x \in A \text{ และ } x \in B\}$

1) $A \cap B = \{c\}$

2) $B \cap C = \{c, e\}$

3) $(A \cap B) \cap C = \{c\} \cap \{a, c, e, f\} = \{c\}$

4) $A \cap (B \cap C) = \{a, b, c\} \cap \{c, e\} = \{c\}$



Thinking Time

กำหนด $(A \cap B) \cap C = \emptyset$ โดยที่
 $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ และ $C \neq \emptyset$
ให้เขียนแผนภาพที่เป็นไปได้
ทั้งหมดแสดงความสัมพันธ์
ของเซตทั้งสามเซต

ลองทำ

กำหนด $A = \{1, 3, 6, 9\}$, $B = \{6, 9, 12\}$ และ $C = \{6, 9, 12, 15\}$ ให้หา

1) $A \cap B$ 2) $B \cap C$ 3) $(A \cap B) \cap C$ 4) $A \cap (B \cap C)$

พีชคณิตของเซต (Algebra of Sets)

กำหนด A, B และ C เป็นเซต

1. กฎเอกลักษณ์ (Identity Law) มี $\emptyset$ เป็นเอกลักษณ์ของการอินเตอร์เซกชัน
จะได้ $\emptyset \cap A = \emptyset = A \cap \emptyset$

2. กฎนิพจน์ (Idempotent Law)

$$A \cap A = A$$

3. กฎการสลับที่ (Commutative Law)

$$A \cap B = B \cap A$$

4. กฎการเปลี่ยนหมู่ (Associative Law)

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

5. กฎการแจกแจง (Distributive Law)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

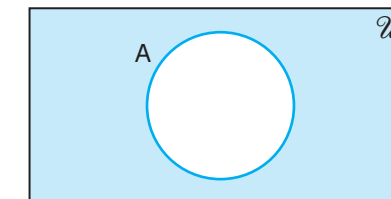
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

3. คอมพลีเมนต์ (Complement)

จากการดำเนินการยูเนียนและอินเตอร์เซกชันของเซต จะเห็นว่า สมาชิกที่อยู่ในเซตใดเซตหนึ่งหรืออยู่ในเซตทั้งสองเซต และผลลัพธ์ที่ได้เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ ถ้าสนใจเฉพาะสมาชิกที่ไม่อยู่ในเซตใดเซตหนึ่งแต่ยังเป็นสมาชิกของเอกภพสัมพัทธ์ เช่น ให้ A เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ และสนใจเฉพาะเซตของสมาชิกที่ไม่อยู่ในเซต A นั่นคือ เซตของจำนวนอตรรกยะ เรียกเซตของสมาชิกที่อยู่ในเซต $\mathcal{U}$ แต่ไม่อยู่ในเซต A ว่า คอมพลีเมนต์ของเซต A เขียนแทนด้วย A'

บทนิยาม กำหนด $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ A เป็นเซต กล่าวว่า $A' = \{x \in \mathcal{U} | x \notin A\}$

เขียนแผนภาพแทนเซต A' ได้ ดังนี้



ตัวอย่างที่ 15

กำหนด $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ และ $B = \{1, 5, 6\}$ ให้หา A' และ B'

วิธีทำ จาก $A' = \{x \in \mathcal{U} | x \notin A\}$ และ $B' = \{x \in \mathcal{U} | x \notin B\}$

จะได้ว่า $A' = \{1, 3, 5\}$ และ $B' = \{2, 3, 4\}$

ตัวอย่างที่ 16

กำหนด $\mathcal{U} = \{x | x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}\}$ และ $A = \{x | x \text{ เป็นจำนวนคี่บวก}\}$ ให้หา A'

วิธีทำ เนื่องจาก $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$ และ $A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$

จะได้ว่า $A' = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ หรือ $A' = \{x | x \text{ เป็นจำนวนคู่บวก}\}$

ลองทำ

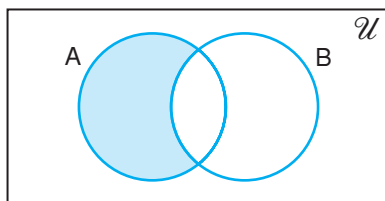
- กำหนด $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ และเซต $A = \{2, 5, 8\}$ ให้หา A'
- กำหนด $\mathcal{U} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ และเซต $B = \{-5, -3, 0, 3, 5\}$ ให้หา B'

ถ้าเซต A และเซต B เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์เดียวกัน เรียกคอมพลีเมนต์ของเซตหนึ่งเทียบกับอีกเซตหนึ่งว่า ผลต่างระหว่างเซต (difference of sets) ดังนี้

- ผลต่างระหว่างเซต A และเซต B หมายถึง เซตที่มีสมาชิกอยู่ในเซต A แต่ไม่อยู่ในเซต B เขียนแทนด้วย $A - B$ เรียกว่า คอมพลีเมนต์ของเซต B เมื่อเทียบกับเซต A

บทนิยาม กำหนด A และ B เป็นเซต กล่าวได้ว่า $A - B = \{x | x \in A \text{ และ } x \notin B\}$

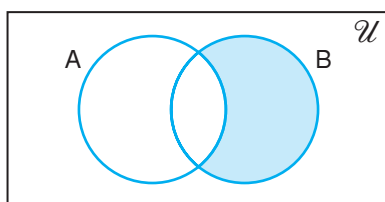
เขียนแผนภาพแทน $A - B$ ได้ ดังนี้



- ผลต่างระหว่างเซต B และเซต A หมายถึง เซตที่มีสมาชิกอยู่ในเซต B แต่ไม่อยู่ในเซต A เขียนแทนด้วย $B - A$ เรียกว่า คอมพลีเมนต์ของเซต A เมื่อเทียบกับเซต B

บทนิยาม กำหนด A และ B เป็นเซต กล่าวได้ว่า $B - A = \{x | x \in B \text{ และ } x \notin A\}$

เขียนแผนภาพแทน $B - A$ ได้ ดังนี้



ตัวอย่างที่ 17

กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ และ $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ ให้หา $A - B$ และ $B - A$

วิธีทำ จาก $A - B = \{x | x \in A \text{ และ } x \notin B\}$ และ $B - A = \{x | x \in B \text{ และ } x \notin A\}$

จะได้ว่า $A - B = \{1, 2, 3\}$ และ $B - A = \{7, 8\}$

ลองทำ

กำหนด $A = \{2, 5, 7, 8, 9\}$ และ $B = \{1, 3, 5, 7, 8\}$
ให้หา $A - B$ และ $B - A$

Thinking Time

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าถูกต้องหรือไม่

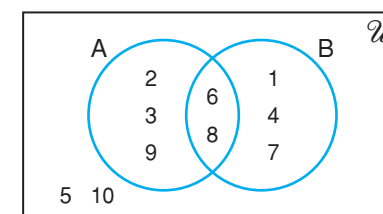
- $A - B = B - A$
- $A - \emptyset = A$
- $\emptyset - B = \emptyset$

ตัวอย่างที่ 18

กำหนด $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{2, 3, 6, 8, 9\}$

และ $B = \{1, 4, 6, 7, 8\}$ ให้หา $(A \cup B)'$ และ $A' \cap B'$ โดยใช้แผนภาพ

วิธีทำ เขียนแผนภาพแทนเซตที่กำหนดได้ ดังนี้



จากแผนภาพ จะได้ว่า $A' = \{1, 4, 5, 7, 10\}$

$B' = \{2, 3, 5, 9, 10\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

$(A \cup B)' = \{5, 10\}$

$A' \cap B' = \{5, 10\}$

ลองทำ

กำหนด $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 4, 5, 7\}$ และ $B = \{3, 5, 7, 9, 10\}$

ให้หา $(A \cap B)'$ และ $A' \cup B'$ โดยใช้แผนภาพ

พีชคณิตของเซต (Algebra of Sets)

กำหนด A และ B เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$

- $\mathcal{U}' = \emptyset$ และ $\emptyset' = \mathcal{U}$
- $(A')' = A$
- $A \cap A' = \emptyset$ และ $A \cup A' = \mathcal{U}$
- $A - B = A \cap B'$
- ถ้า $A \subset B$ แล้ว $B' \subset A'$
- $A \cap B = \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B'$ และ $B \subset A'$
- กฎของเดอมอร์แกน (De Morgan's Law)
 $(A \cup B)' = A' \cap B'$ และ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

แบบฝึกทักษะ 1.5

ระดับพื้นฐาน ★

- กำหนด $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$A = \{1, 3, 4, 5, 8\}$$

และ $B = \{3, 5, 7, 9, 10\}$

ให้เขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก

- | | |
|--------------------|------------------|
| 1) $A \cap B$ | 2) $A \cup B$ |
| 3) A' | 4) B' |
| 5) $(A')'$ | 6) $(B')'$ |
| 7) $A - B$ | 8) $B - A$ |
| 9) $A \cap B'$ | 10) $B \cap A'$ |
| 11) $(A \cap B)'$ | 12) $A' \cup B'$ |
| 13) $(A \cup B)'$ | 14) $A' \cap B'$ |
| 15) $A' - B$ | 16) $B' - A$ |
| 17) $(A - B)'$ | 18) $A' - B'$ |
| 19) $(A \cap B')'$ | 20) $A' \cup B$ |

ระดับกลาง ★★

- กำหนด $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$

$$A = \{3, 5, 6, 7, 8, 11, 15\}$$

$$B = \{1, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 15, 19\}$$

และ $C = \{1, 2, 4, 7, 11, 13, 17\}$

ให้เขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก

- $(A \cap B) \cap C$
- $A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cup C$
- $A \cap (B \cup C)$
- $(A - B) - C$
- $A - (B - C)$
- $A \cap (B \cup C)'$
- $A - (B \cup C)$
- $A - (B \cap C)$
- $(A - B) \cap (A - C)$

- กำหนด $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$

$$A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 2 ลงตัว}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 3 ลงตัว}\}$$

และ $C = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 6 ลงตัว}\}$

ให้เขียนแผนภาพแทนเซตต่อไปนี้

- | | |
|------------------------|-----------------------------|
| 1) $(A \cap B) \cap C$ | 2) $[(A \cup B) \cup C]'$ |
| 3) $(A - B) \cap C'$ | 4) $(C - B)' \cup (C - A)'$ |

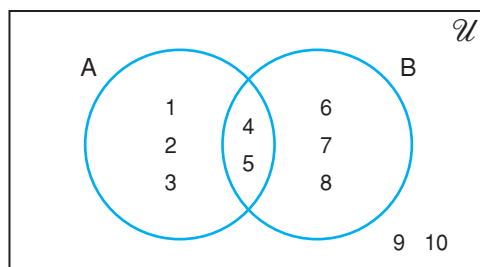
ระดับท้าทาย ★★★

- กำหนด $(A \cap B) \cap C \neq \emptyset$ ให้เขียนแผนภาพและแรเงาเพื่อแสดงเซตต่อไปนี้

- $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)'$
- $[(A \cap B) - C] \cup [(A \cap C) - B] \cup [(B \cap C) - A]$
- $[A - (B \cup C)] \cup [B - (A \cup C)] \cup [C - (A \cup B)]$

1.6 จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด

ในหัวข้อนี้ นักเรียนจะศึกษาการประยุกต์สมบัติของเซตและการแทนเซตด้วยแผนภาพเพื่อช่วยแก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาจำนวนสมาชิกของเซตจำกัด
พิจารณาแผนภาพต่อไปนี้



จากแผนภาพ จะได้ว่า

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$n(U) = 10$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$n(A) = 5$$

$$B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$n(B) = 5$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$n(A \cup B) = 8$$

$$A \cap B = \{4, 5\}$$

$$n(A \cap B) = 2$$

$$(A \cup B)' = \{9, 10\}$$

และ $n(A \cup B)' = 2$

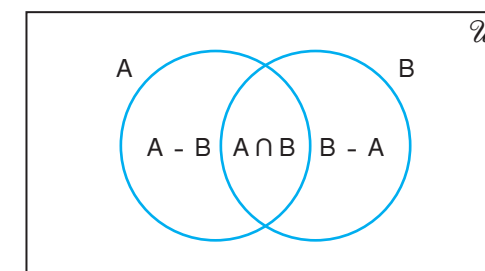
และสามารถหา $n(U) - n(A \cup B) = 10 - 8$
 $= 2$

จึงสรุปได้ว่า

$$n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$$

นอกจากจะหาจำนวนสมาชิกจากแผนภาพแล้ว นักเรียนสามารถหาสมการความสัมพันธ์ของ $n(A)$, $n(B)$, $n(A \cup B)$ และ $n(A \cap B)$ โดยใช้แผนภาพได้ ดังนี้

กำหนด A และ B เป็นเซตจำกัด เมื่อ $A \cap B \neq \emptyset$



จากแผนภาพ จะได้ว่า

$$n(A - B) + n(A \cap B) = n(A)$$

ดังนั้น $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \dots\dots ①$

$$n(B - A) + n(A \cap B) = n(B)$$

ดังนั้น $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) \dots\dots ②$

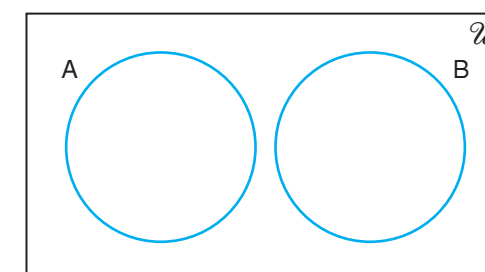
และ $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$

จากสมการ ① และ ② จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= [n(A) - n(A \cap B)] + n(A \cap B) \\ &\quad + [n(B) - n(A \cap B)] \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \end{aligned}$$

ดังนั้น $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ เมื่อ $A \cap B \neq \emptyset$

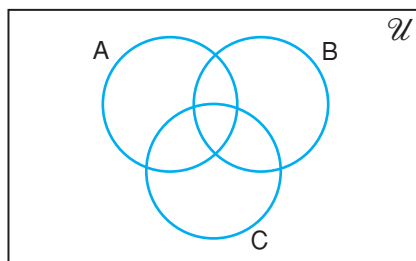
ในกรณีที่เซต A และเซต B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน หรือ $A \cap B = \emptyset$ จะได้ว่า $n(A \cap B) = 0$ ซึ่งเขียนแผนภาพได้ ดังนี้



จากแผนภาพ จะได้ว่า $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ เมื่อ $A \cap B = \emptyset$

นักเรียนสามารถหาสมการแสดงความสัมพันธ์ของ $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$, $n(A \cup B \cup C)$, $n(A \cap B)$, $n(A \cap C)$, $n(B \cap C)$ และ $n(A \cap B \cap C)$ โดยใช้แผนภาพได้ ดังนี้

กำหนด A , B และ C เป็นเซตจำกัด



จากแผนภาพ จะได้ว่า

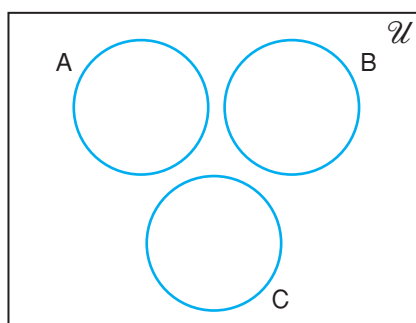
$$n(A \cup B \cup C) = n[(A \cup B) \cup C]$$

จาก $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } n(A \cup B \cup C) &= n(A \cup B) + n(C) - n[(A \cup B) \cap C] \\ &= [n(A) + n(B) - n(A \cap B)] + n(C) - n[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\ &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - [n(A \cap C) + n(B \cap C) \\ &\quad - n[(A \cap C) \cap (B \cap C)]] \\ &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

ดังนั้น $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

ในกรณีที่เซต A เซต B และเซต C ไม่มีสมาชิกร่วมกัน ซึ่งเขียนแผนภาพได้ ดังนี้



จากแผนภาพ จะได้ว่า $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$

ตัวอย่างที่ 19

ในการประกวดวงดนตรีเยาวชนครั้งหนึ่ง ปรากฏว่ามีเยาวชนเข้าประกวดทั้งสิ้น 158 คน เป็นผู้เข้าประกวดที่เล่นดนตรี 125 คน และเป็นนักร้อง 102 คน อยากทราบว่า มีจำนวนผู้เข้าประกวดวงดนตรีเยาวชนที่เล่นดนตรีและเป็นนักร้องกี่คน

วิธีทำ ให้ U แทนเซตของผู้เข้าประกวดวงดนตรีเยาวชน

A แทนเซตของผู้เข้าประกวดวงดนตรีเยาวชนที่เล่นดนตรี

B แทนเซตของผู้เข้าประกวดวงดนตรีเยาวชนที่เป็นนักร้อง

$A \cup B$ แทนเซตของผู้เข้าประกวดวงดนตรีเยาวชนทั้งหมด

$A \cap B$ แทนเซตของผู้เข้าประกวดวงดนตรีเยาวชนที่เล่นดนตรีและเป็นนักร้อง

$n(A \cup B)$ แทนจำนวนของผู้เข้าประกวดวงดนตรีเยาวชนทั้งหมด

$n(A \cap B)$ แทนจำนวนของผู้เข้าประกวดวงดนตรีเยาวชนที่เล่นดนตรีและเป็นนักร้อง

จะได้ว่า $n(A \cup B) = 158$

$$n(A) = 125$$

$$n(B) = 102$$

จาก $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

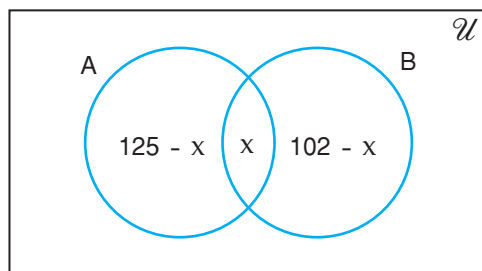
$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 125 + 102 - 158 \\ &= 69 \end{aligned}$$

ดังนั้น มีจำนวนผู้เข้าประกวดวงดนตรีเยาวชนที่เล่นดนตรีและเป็นนักร้อง 69 คน

ลองทำ

จากการสอบถามนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายจำนวน 150 คน พบว่ามีนักเรียนว่ายน้ำเป็นประจำ 80 คน และมีนักเรียนเล่นเทนนิสเป็นประจำ 90 คน อยากทราบว่า มีนักเรียนที่ว่ายน้ำและเล่นเทนนิสเป็นประจำทั้งหมดกี่คน

จากตัวอย่างที่ 19 อาจทำได้อีกวิธีหนึ่งโดยใช้แผนภาพ คือ สมมติให้จำนวนผู้เข้าประกวด วงดนตรีเยาวชนที่เล่นดนตรีและเป็นนักร้องเป็น x คน



$$\begin{aligned} \text{จากแผนภาพ จะได้สมการ } 158 &= (125 - x) + x + (102 - x) \\ x &= 69 \end{aligned}$$

แนวข้อสอบ A-Level

กำหนด $\mathcal{U}$ แทนเอกภพสัมพัทธ์ A และ B เป็นสับเซตของ $\mathcal{U}$ โดยที่ $n(\mathcal{U}) = 250$, $n(A \cap B) = 55$ และ $n(A' \cap B') = 20$ ถ้า $n(B) \geq 83$ แล้ว $n(A)$ ที่มากที่สุดที่เป็นไปได้เท่ากับเท่าใด

แนวคิด

เนื่องจาก $A' \cap B' = (A \cup B)'$ แสดงว่า $n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = 20$
และ $n(\mathcal{U}) = 250$ จะได้ว่า $n(A \cup B) = n(\mathcal{U}) - n(A \cup B)' = 250 - 20 = 230$

$$\text{จาก } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\text{จะได้ว่า } 230 = n(A) + n(B) - 55$$

$$n(B) = 230 + 55 - n(A)$$

$$n(B) = 285 - n(A)$$

$$\text{เนื่องจาก } n(B) \geq 83$$

$$\text{จะได้ว่า } 285 - n(A) \geq 83$$

$$285 - 83 \geq n(A)$$

$$202 \geq n(A)$$

ดังนั้น $n(A)$ ที่มากที่สุดที่เป็นไปได้เท่ากับ 202

ตัวอย่างที่ 20

บริษัทน้ำหอมแห่งหนึ่งต้องการสำรวจความนิยมกลิ่นน้ำหอมของผู้หญิง จึงเชิญอาสาสมัครผู้หญิงจำนวนหนึ่งให้ทดลองใช้น้ำหอมของบริษัทสามกลิ่น ได้แก่ กลิ่นลาเวนเดอร์ กลิ่นกุหลาบ และกลิ่นมาดาม ปรากฏว่ามี 30% ชอบกลิ่นกุหลาบ มี 40% ชอบกลิ่นมาดาม มี 50% ชอบกลิ่นลาเวนเดอร์ มี 10% ชอบกลิ่นกุหลาบและกลิ่นมาดาม มี 15% ชอบกลิ่นกุหลาบและกลิ่นลาเวนเดอร์ มี 20% ชอบกลิ่นมาดามและกลิ่นลาเวนเดอร์ และมี 3% ชอบทั้งสามกลิ่น อยากทราบว่า

- 1) มีจำนวนอาสาสมัครผู้หญิงที่ชอบน้ำหอมอย่างน้อยหนึ่งกลิ่นกี่เปอร์เซ็นต์
- 2) มีจำนวนอาสาสมัครผู้หญิงที่ไม่ชอบน้ำหอมทั้งสามกลิ่นกี่เปอร์เซ็นต์

วิธีทำ ให้ $\mathcal{U}$ แทนเซตของอาสาสมัครผู้หญิงที่ทดลองใช้น้ำหอมทั้งหมด

A แทนเซตของอาสาสมัครผู้หญิงที่ชอบกลิ่นกุหลาบ

B แทนเซตของอาสาสมัครผู้หญิงที่ชอบกลิ่นมาดาม

C แทนเซตของอาสาสมัครผู้หญิงที่ชอบกลิ่นลาเวนเดอร์

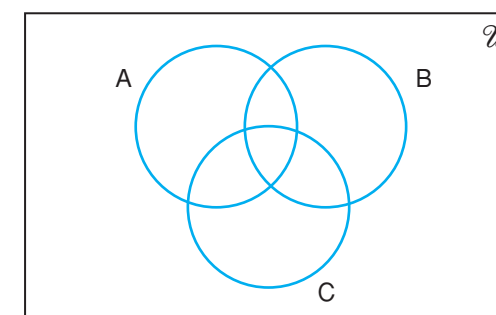
$A \cap B$ แทนเซตของอาสาสมัครผู้หญิงที่ชอบกลิ่นกุหลาบและกลิ่นมาดาม

$A \cap C$ แทนเซตของอาสาสมัครผู้หญิงที่ชอบกลิ่นกุหลาบและกลิ่นลาเวนเดอร์

$B \cap C$ แทนเซตของอาสาสมัครผู้หญิงที่ชอบกลิ่นมาดามและกลิ่นลาเวนเดอร์

$A \cap B \cap C$ แทนเซตของอาสาสมัครผู้หญิงที่ชอบน้ำหอมทั้งสามกลิ่น

$A \cup B \cup C$ แทนเซตของอาสาสมัครผู้หญิงที่ชอบกลิ่นกุหลาบ กลิ่นมาดาม หรือ กลิ่นลาเวนเดอร์อย่างน้อยหนึ่งกลิ่น



สมมติว่ามีอาสาสมัครผู้หญิงที่ทดลองใช้น้ำหอมทั้งหมด 100 คน

จะได้ว่า $n(U) = 100$

$n(A) = 30$

$n(B) = 40$

$n(C) = 50$

$n(A \cap B) = 10$

$n(A \cap C) = 15$

$n(B \cap C) = 20$

$n(A \cap B \cap C) = 3$

$$\begin{aligned} 1) \quad n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C) \\ &= 30 + 40 + 50 - 10 - 15 - 20 + 3 \\ &= 78 \end{aligned}$$

ดังนั้น มีจำนวนอาสาสมัครผู้หญิงที่ชอบน้ำหอมอย่างน้อยหนึ่งกลิ่น 78%

2) จำนวนอาสาสมัครผู้หญิงที่ไม่ชอบน้ำหอมทั้งสามกลิ่น หมายความว่าไม่ชอบกลิ่นกุหลาบ หรือกลิ่นมาดาม หรือกลิ่นลาเวนเดอร์เลย หาได้จากจำนวนอาสาสมัครผู้หญิงที่ทดลองใช้น้ำหอมทั้งหมด 100% ลบด้วยจำนวนอาสาสมัครผู้หญิงที่ชอบน้ำหอมอย่างน้อยหนึ่งกลิ่นซึ่งมี 78%

ดังนั้น มีจำนวนอาสาสมัครผู้หญิงที่ไม่ชอบน้ำหอมทั้งสามกลิ่น $100\% - 78\% = 22\%$

ลองทำดู

จากการสำรวจผู้ใช้บริการขนส่งสาธารณะในกรุงเทพมหานครกลุ่มหนึ่ง พบว่ามีผู้ใช้บริการรถไฟฟ้า BTS จำนวน 150 คน มีผู้ใช้บริการรถโดยสารปรับอากาศจำนวน 200 คน มีผู้ใช้บริการรถจักรยานยนต์รับจ้างจำนวน 100 คน มีผู้ใช้บริการรถไฟฟ้า BTS และรถโดยสารปรับอากาศจำนวน 25 คน มีผู้ใช้บริการรถไฟฟ้า BTS และรถจักรยานยนต์รับจ้างจำนวน 50 คน มีผู้ใช้บริการขนส่งสาธารณะอื่น ๆ ที่ไม่ใช่สามแบบข้างต้นจำนวน 25 คน ไม่มีผู้ใช้บริการรถโดยสารปรับอากาศและรถจักรยานยนต์รับจ้าง และไม่มีผู้ใช้บริการขนส่งสาธารณะทั้งสามแบบ อยากทราบว่า มีจำนวนผู้ใช้บริการขนส่งสาธารณะในกรุงเทพมหานครที่เข้าร่วมการสำรวจในครั้งนี้กี่คน

แบบฝึกทักษะ 1.6

ระดับพื้นฐาน ★

1. บนสถานีรถไฟฟ้า BTS แห่งหนึ่งในวันที่มีฝนตก พบว่ามีผู้โดยสารถือร่ม 48 คน มีผู้โดยสารใส่เสื้อกันฝน 52 คน และมีผู้โดยสารถือร่มและใส่เสื้อกันฝน 40 คน อยากทราบว่า มีผู้โดยสารถือร่มแต่ไม่ใส่เสื้อกันฝน และใส่เสื้อกันฝนแต่ไม่ถือร่มรวมกี่คน
2. การสำรวจความสัมพันธ์ของการสูบบุหรี่ที่มีผลต่อการเป็นมะเร็งปอดของกระทรวงสาธารณสุข โดยสุ่มผู้ป่วยจำนวน 2,000 คน ที่มีอายุเกิน 45 ปี จากโรงพยาบาลทั่วประเทศ พบว่ามีผู้ป่วยที่ไม่สูบบุหรี่และไม่เป็นมะเร็ง 560 คน มีผู้ป่วยที่สูบบุหรี่ 930 คน และมีผู้ป่วยเป็นมะเร็งปอด 550 คน อยากทราบว่า มีผู้ป่วยที่สูบบุหรี่และเป็นมะเร็งปอดกี่คน และคิดเป็นร้อยละเท่าใดของผู้ป่วยที่สูบบุหรี่ทั้งหมด
3. จากการสำรวจนักเรียนห้องหนึ่ง พบว่ามี 45 คน ที่เลือกเรียนภาษาฝรั่งเศสหรือคณิตศาสตร์ ถ้าเลือกเรียนภาษาฝรั่งเศสแล้วจะไม่เลือกเรียนคณิตศาสตร์ มี 28 คน ที่ไม่เลือกเรียนคณิตศาสตร์ และมี 25 คน ที่ไม่เลือกเรียนภาษาฝรั่งเศส อยากทราบว่า มีนักเรียนที่ไม่เลือกเรียนทั้งสองวิชากี่คน

ระดับกลาง ★★

4. จากการสำรวจความนิยมเกี่ยวกับเพลงจากกลุ่มวัยรุ่นจำนวน 300 คน พบว่าแต่ละคนชอบเพลงลูกทุ่ง เพลงลูกกรุง หรือเพลงสากลอย่างน้อยหนึ่งประเภท โดยปรากฏผล ดังนี้
 120 คน ชอบเพลงลูกทุ่ง
 70 คน ชอบเพลงลูกกรุงอย่างเดียว
 80 คน ชอบเพลงสากลอย่างเดียว
 45 คน ชอบเพลงลูกกรุงและเพลงสากล
 30 คน ชอบเพลงลูกทุ่งและเพลงลูกกรุง แต่ไม่ชอบเพลงสากล
 50 คน ไม่ชอบเพลงลูกกรุงและเพลงสากล
 อยากทราบว่า มีวัยรุ่นที่ชอบเพลงลูกทุ่งและเพลงสากล แต่ไม่ชอบเพลงลูกกรุงกี่คน

5. จากการสำรวจผู้ถือหุ้นในตลาดหลักทรัพย์ พบว่ามีผู้ถือหุ้นบริษัท ก. 200 คน มีผู้ถือหุ้นบริษัท ข. 250 คน มีผู้ถือหุ้นบริษัท ค. 300 คน มีผู้ถือหุ้นบริษัท ก. และบริษัท ข. 50 คน มีผู้ถือหุ้นบริษัท ข. และบริษัท ค. 40 คน

ให้หาจำนวนผู้ถือหุ้นที่ถูกสำรวจทั้งหมด ตามเงื่อนไขต่อไปนี้

- 1) มีผู้ถือหุ้นบริษัท ก. และบริษัท ค. 30 คน แต่ไม่มีผู้ถือหุ้นทั้งสามบริษัท
- 2) มีผู้ถือหุ้นบริษัท ก. และบริษัท ค. 20 คน และมีผู้ถือหุ้นทั้งสามบริษัท 5 คน
- 3) ไม่มีผู้ถือหุ้นบริษัท ก. และบริษัท ค. และไม่มีผู้ถือหุ้นทั้งสามบริษัท

6. ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก พร้อมกัน 120 ครั้ง พบว่า 67 ครั้ง ได้ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทิ้งสองมากกว่า 6 และ 72 ครั้ง ได้ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทิ้งสองน้อยกว่า 8 ให้หาจำนวนครั้งของการทอดลูกเต๋าลแล้วได้ผลบวกของแต้มตามเงื่อนไขต่อไปนี้

- 1) ได้ผลบวกของแต้มเท่ากับ 7
- 2) ได้ผลบวกของแต้มน้อยกว่า 7
- 3) ได้ผลบวกของแต้มมากกว่า 7

7. นักศึกษากลุ่มหนึ่งจำนวน 500 คน แต่ละคนต้องเรียนวิชาเคมี วิชาฟิสิกส์ หรือวิชาชีววิทยา อย่างน้อยหนึ่งวิชา หลังการลงทะเบียนปรากฏว่ามีนักเรียน 200 คน ไม่เรียนวิชาเคมี มีนักเรียน 190 คน ไม่เรียนวิชาฟิสิกส์ และมีนักเรียน 217 คน ไม่เรียนวิชาชีววิทยา มีนักเรียน 147 คน เรียนทั้งสามวิชา มีนักเรียน 189 คน เรียนทั้งวิชาเคมีและวิชาชีววิทยา และมีนักเรียน 195 คน เรียนทั้งวิชาฟิสิกส์และวิชาชีววิทยา อยากทราบว่านักเรียนที่เรียนวิชาเคมีอย่างเดียวหรือวิชาชีววิทยาอย่างเดียวกี่คน

ระดับท้าทาย ★★★

8. ในการสำรวักนักกีฬาจำนวน 100 คน พบว่ามีนักกีฬาที่ชอบเล่นฟุตบอล หรือเทนนิส หรือ ปิงปองอย่างน้อยหนึ่งประเภท ดังนี้

มีนักกีฬา 75 คน ชอบเล่นฟุตบอล

มีนักกีฬา 70 คน ชอบเล่นเทนนิส

มีนักกีฬา 80 คน ชอบเล่นปิงปอง

อยากทราบว่ามีนักกีฬาอย่างมากกี่คนที่ชอบเล่นกีฬาทั้งสามประเภท

กิจกรรม คณิตศาสตร์

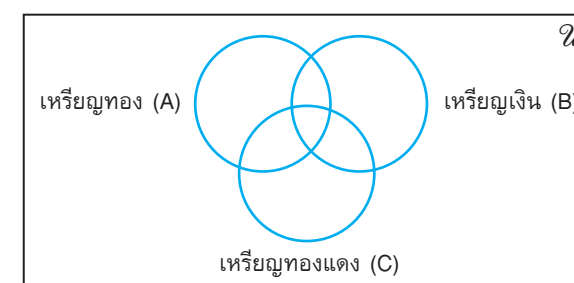
ในการแข่งขันกีฬาซีเกมส์ปี 2021 มีเหรียญรางวัล 3 ประเภท คือ เหรียญทอง เหรียญเงิน และเหรียญทองแดง ซึ่งประเทศไทยได้รับเหรียญรางวัลในการแข่งขันกีฬาทั้งหมด 40 รายการ โดยขอยกตัวอย่างรายการที่แข่งขันมา 10 รายการ ดังตารางต่อไปนี้

ตารางสรุปเหรียญรางวัลในการแข่งขันกีฬา 10 รายการ

รายการ	รายการกีฬาที่แข่งขัน	เหรียญทอง (เหรียญ)	เหรียญเงิน (เหรียญ)	เหรียญทองแดง (เหรียญ)	รวมเหรียญรางวัล (เหรียญ)
1	กรีฑา	12	11	8	31
2	ตะกร้อ	6	0	0	6
3	มวยสากล	4	2	3	9
4	แบดมินตัน	4	2	0	6
5	วอลเลย์บอล	2	1	0	3
6	โบว์ลิ่ง	0	1	0	1
7	หมากรุกสากล	0	0	1	1
8	บาสเกตบอล	2	0	1	3
9	ฟุตบอล	0	2	0	3
10	ฟันดาบ	0	3	7	10

ที่มา: <https://sport.trueid.net/detail/3N3EIA7vqkpx> สืบค้นเมื่อ 4 กันยายน 2566

จากข้อมูลในตาราง ให้นักเรียนเขียนจำนวนสมาชิกลงในแผนภาพที่กำหนด แล้วตอบคำถามต่อไปนี้



1. ให้หาจำนวนของรายการกีฬาที่ได้เหรียญเพียงเหรียญเดียว
2. ให้หาจำนวนของรายการกีฬาที่ได้เหรียญอย่างน้อยสองเหรียญ
3. ให้หาจำนวนของรายการกีฬาที่ได้เหรียญรางวัลทั้งสามเหรียญ
4. ให้หาจำนวนของรายการกีฬาที่ได้เหรียญทองและเหรียญเงิน
5. ให้หาจำนวนของรายการกีฬาที่ได้เหรียญทองแต่ไม่ได้เหรียญทองแดง

คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง

ประกันภัยรถยนต์ (Auto Insurance)

ประกันภัยรถยนต์ คือ ประกันภัยที่คุ้มครองความเสียหายที่เกิดจากการใช้รถยนต์คันที่เอาประกัน ไม่ว่าจะเป็น ค่าเสียหาย ค่ารักษาพยาบาล ค่าชดเชย ค่าสินไหมทดแทน ค่าสินไหมทดแทน ค่าสินไหมทดแทน ซึ่งมีการทำข้อตกลงและทำสัญญาเพื่อออกไปกรมธรรม์ประกันภัย โดยเรียกว่า ผู้เอาประกันภัยกับผู้รับประกันภัย



สถานการณ์



จากการสอบถามบริษัทประกันภัยรถยนต์แห่งหนึ่ง มีผู้เอาประกันภัยจำนวน 10,000 คน โดยจำแนกตามวัย เพศ และสถานภาพสมรสของผู้เอาประกันภัย ดังนี้

- (i) วัยทำงานหรือวัยสูงอายุ
- (ii) เพศหญิงหรือเพศชาย
- (iii) สมรสหรือโสด

จากจำนวนผู้เอาประกันภัยทั้งหมด พบว่า

- 3,000 คน เป็นโสด
- 4,600 คน เป็นเพศชาย
- 7,000 คน สมรสแล้ว
- 1,320 คน เป็นวัยทำงานเพศชาย
- 3,010 คน เป็นเพศชายที่สมรสแล้ว
- 1,400 คน เป็นวัยทำงานที่สมรสแล้ว
- 600 คน เป็นวัยทำงานเพศชายที่สมรสแล้ว

อยากทราบว่าผู้เอาประกันภัยที่เป็นเพศหญิงและโสดจำนวนกี่คน

สรุป

แนวคิดหลัก

เซต

เซต

- เซต คือ กลุ่มของสิ่งต่างๆ ที่ทราบแน่นอนว่า สิ่งใดอยู่ในกลุ่มและสิ่งใดไม่อยู่ในกลุ่ม
- การเขียนเซตมี 2 แบบ คือ
 - 1) แบบแจกแจงสมาชิก เช่น $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 - 2) แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก เช่น $A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 5\}$
- เซตว่าง เป็นเซตที่ไม่มีสมาชิก เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\{\}$ หรือ $\emptyset$
- เซตจำกัด เป็นเซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับศูนย์หรือจำนวนเต็มบวก
- เซตอนันต์ เป็นเซตที่ไม่สามารถบอกจำนวนสมาชิกของเซตได้
- เซตที่เท่ากัน คือ เซตที่มีสมาชิกเหมือนกันทุกตัวและมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน เขียนแทนด้วย $A = B$ เช่น $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{3, 2, 1\}$ จะได้ว่า $A = B = \{1, 2, 3\}$ มีจำนวนสมาชิก 3 ตัว

เอกภพสัมพัทธ์

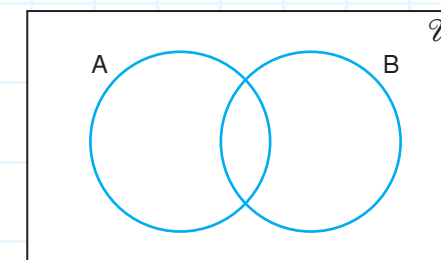
เอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตที่กำหนดขอบข่ายในการพิจารณาสมาชิกของเซตที่กล่าวถึง เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathcal{U}$

สับเซตและเพาเวอร์เซต

- เซต A เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B เขียนแทนด้วย $A \subset B$
- ถ้าเซต A มีสมาชิก n ตัว แล้วจำนวนสับเซตทั้งหมดของเซต A เท่ากับ 2^n เซต และจำนวนสับเซตแท้ทั้งหมดของเซต A เท่ากับ $2^n - 1$ เซต
- เพาเวอร์เซตของเซต A คือ เซตของสับเซตทั้งหมดของเซต A เขียนแทนด้วย $P(A)$
- ถ้าเซต A มีสมาชิก n ตัว แล้วเพาเวอร์เซตของเซต A มีสมาชิก 2^n ตัว

แผนภาพเวนน

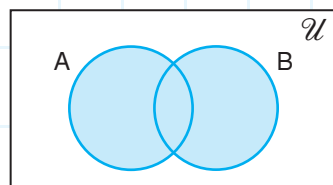
แผนภาพที่ใช้แทนเอกภพสัมพัทธ์ ($\mathcal{U}$) จะเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า หรืออาจเป็นรูปปิดอื่นๆ ส่วนเซตอื่นๆ ที่เป็นสับเซตของเซต $\mathcal{U}$ นิยมแทนด้วยวงกลม วงรี รูปสี่เหลี่ยมเล็ก หรือรูปปิดอื่นๆ ซึ่งเขียนไว้ภายในรูปปิดของเซต $\mathcal{U}$



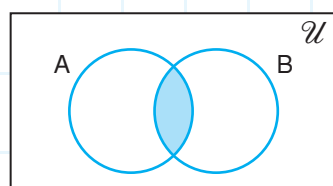
การดำเนินการของเซต

กำหนด $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ A และ B เป็นเซต

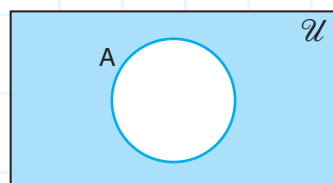
- ยูเนียน $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$



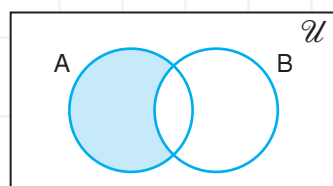
- อินเตอร์เซกชัน $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \in B\}$



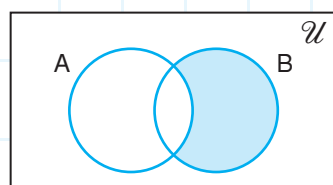
- คอมพลีเมนต์ $A' = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}$



- ผลต่างระหว่างเซต $A - B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \notin B\}$



- ผลต่างระหว่างเซต $B - A = \{x \mid x \in B \text{ และ } x \notin A\}$



พีชคณิตของเซต

กำหนด A , B และ C เป็นเซต

- ยูเนียน

- | | |
|---|--|
| 1. กฎเอกลักษณ์ (Identity Law)
มี $\emptyset$ เป็นเอกลักษณ์ของการยูเนียน
จะได้ $\emptyset \cup A = A = A \cup \emptyset$ | 2. กฎนิพจน์ (Idempotent Law)
$A \cup A = A$ |
| 3. กฎการสลับที่ (Commutative Law)
$A \cup B = B \cup A$ | 4. กฎการเปลี่ยนหมู่ (Associative Law)
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ |

- อินเตอร์เซกชัน

- | | |
|--|--|
| 1. กฎเอกลักษณ์ (Identity Law)
มี $\emptyset$ เป็นเอกลักษณ์ของการอินเตอร์เซกชัน
จะได้ $\emptyset \cap A = \emptyset = A \cap \emptyset$ | 2. กฎนิพจน์ (Idempotent Law)
$A \cap A = A$ |
| 3. กฎการสลับที่ (Commutative Law)
$A \cap B = B \cap A$ | 4. กฎการเปลี่ยนหมู่ (Associative Law)
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |
| 5. กฎการแจกแจง (Distributive Law)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | |

- คอมพลีเมนต์และผลต่างระหว่างเซต

- | | |
|---|--|
| 1. $\mathcal{U}' = \emptyset$ และ $\emptyset' = \mathcal{U}$ | 2. $(A')' = A$ |
| 3. $A \cap A' = \emptyset$ และ $A \cup A' = \mathcal{U}$ | 4. $A - B = A \cap B'$ |
| 5. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $B' \subset A'$ | 6. $A \cap B = \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B'$ และ $B \subset A'$ |
| 7. กฎของเดอมอร์แกน (De Morgan's Law)
$(A \cup B)' = A' \cap B'$ และ $(A \cap B)' = A' \cup B'$ | |

จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด

กำหนด A , B และ C เป็นเซตจำกัด

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$



คำชี้แจง : ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. ให้เขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไข

- 1) เซตของจำนวนนับที่มากกว่า -2 แต่น้อยกว่า $\frac{22}{7}$
- 2) เซตของจำนวนนับที่อยู่ระหว่าง 1 กับ 2
- 3) เซตของจำนวนนับที่เป็นพหุคูณของ 10

2. กำหนด A, B และ C เป็นเซต ให้พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด

- 1) ถ้า $A \neq B$ และ $B \neq C$ แล้ว $A \neq C$
- 2) ถ้า $A = B$ และ $B = C$ แล้ว $A = C$
- 3) ถ้า $A \in B$ และ $B \in C$ แล้ว $A \in C$
- 4) ถ้า $A \notin B$ และ $B \notin C$ แล้ว $A \notin C$
- 5) ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$
- 6) มี A, B และ C ซึ่ง $A \neq B$ และ $B \neq C$ แต่ $A \in C$

3. ยกตัวอย่างเซต A เซต B และเซต C ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

- 1) $A \subset B$ และ $B \subset C$
- 2) $A \subset B$ และ $C \subset B$ แต่ $A \not\subset C$
- 3) $A \subset \emptyset$
- 4) $A \in B$ และ $A \subset B$

4. กำหนด A, B และ X เป็นเซต ให้พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด

- 1) ถ้า $X \subset A$ แล้ว $X \in P(A)$
- 2) ถ้า $X \in A$ แล้ว $\{X\} \in P(A)$
- 3) ถ้า $\emptyset \subset P(A)$ แล้ว $\emptyset \in P(A)$
- 4) ถ้า $\{\emptyset\} \subset P(A)$ แล้ว $\{\emptyset\} \in P(A)$
- 5) ถ้า $A \subset P(A)$ แล้ว $A \in P(A)$
- 6) $P(\emptyset) \neq \{P(\emptyset)\}$

5. กำหนด $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ และ $C = \{3, 4, 5, 6\}$ ให้เขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก พร้อมทั้งเขียนแผนภาพของแต่ละเซต

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1) $B \cap C$ | 2) $A \cup C$ |
| 3) $A' \cap B$ | 4) $A' \cap C'$ |
| 5) $A' \cup C$ | 6) $B - C$ |
| 7) $(A \cap C) \cup B$ | 8) $(A \cup C) \cap B$ |

6. กำหนด A และ B เป็นเซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน โดยที่ $n(A \cup B) = 20$ และ $n(A \cap B) = 6$ ให้หาว่าเซต $B - A$ มีจำนวนสมาชิกกี่ตัว

7. กำหนด Z แทนเซตของจำนวนเต็ม และ N แทนเซตของจำนวนนับ ให้พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด

- 1) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 2 \neq 0\}$ เป็นเซตจำกัด
- 2) $\{x \in \mathbb{N} \mid 3x^2 - 6x = 0\}$ เป็นเซตว่าง
- 3) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + 1 = 0\}$ เป็นเซตอนันต์
- 4) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 \neq x^2 + x\}$ เป็นเซตอนันต์

8. กำหนด $U = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ ถ้า $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 15\}$ ให้หาจำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซตของเซต $[(A' \cap B) \cap B]'$

9. จากการสำรวจนักเรียน 500 คน พบว่าชอบวิชาคณิตศาสตร์ 356 คน ชอบวิชาเคมี 225 คน และชอบทั้งสองวิชา 118 คน ให้หา

- 1) จำนวนนักเรียนที่ชอบวิชาคณิตศาสตร์อย่างเดียว
- 2) จำนวนนักเรียนที่ชอบวิชาเคมีอย่างเดียว
- 3) จำนวนนักเรียนที่ไม่ชอบทั้งสองวิชา

10. จากการสำรวจพนักงานบริษัทแห่งหนึ่ง พบว่า 60% ชอบดื่มกาแฟ 45% ชอบดื่มชา 51% ชอบดื่มนม 20% ชอบดื่มกาแฟและชา 28% ชอบดื่มชาและนม 30% ชอบดื่มกาแฟและนม 12% ชอบดื่มเครื่องดื่มทั้งสามชนิด อยากทราบว่า

- 1) มีพนักงานที่ชอบดื่มเครื่องดื่มอย่างน้อยสองชนิดในสามชนิดนี้กี่เปอร์เซ็นต์
- 2) มีพนักงานที่ไม่ชอบดื่มเครื่องดื่มทั้งสามชนิดนี้กี่เปอร์เซ็นต์