

คณิตศาสตร์

เล่ม 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ผู้เรียบเรียง

นางวัชรารัตน์ กรอุษณกุล

นางจินดา อยู่เป็นสุข

นางนพรัตน์ วันแก้ว

รศ. ดร.อำพล ธรรมเจริญ

นายรณชัย มาเจริญทรัพย์

นางสาวสายสุณี สุทธิจักร์

นายไอศุรีย์ สุดประเสริฐ

นายวุฒิชัย ศรีวิสุทธกุล

ผู้ตรวจ

ดร.ขวัญ เพี้ยชัย

ผศ.รุจิรา พิพิพจนการณ

นางสาวบุรณาด เอยนิน

บรรณาธิการ

นางสาวจันทร์เพ็ญ ชุมคช

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ

ปีที่พิมพ์ 2567

พิมพ์ครั้งที่ 1

จำนวนพิมพ์ 10,000 เล่ม

ISBN : 978-616-606-059-1

รหัสสินค้า 3416008

อักษร

www.aksorn.com

จัดพิมพ์และจำหน่ายทั่วประเทศโดย

บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจก. จำกัด

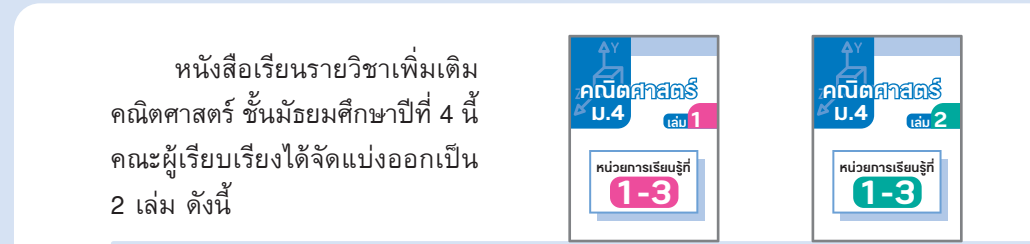
142 ถนนตะนาว เขตพระนคร กรุงเทพมหานคร 10200

โทร. 0 2622 2999 (จัดไปมิต 20 คู่สาย)

แฟกซ์: บริษัท ไทยร่มเกล้า จำกัด โทร. 0 2903 9101-6

คำแนะนำในการใช้สื่อ

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 จัดทำขึ้นสำหรับใช้ประกอบการเรียนการสอน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยดำเนินการจัดทำให้สอดคล้องตามผลการเรียนรู้ในสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ทุกประการ ส่งเสริมทักษะที่จำเป็นสำหรับการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 ทั้งทักษะด้านการคิดวิเคราะห์ การคิดอย่างมีวิจารณญาณ การแก้ปัญหา การคิดสร้างสรรค์ การใช้เทคโนโลยี การสื่อสาร และการร่วมมือ เพื่อให้ผู้เรียนรู้เท่าทันการเปลี่ยนแปลงของระบบเศรษฐกิจ สังคม วัฒนธรรม และสภาพแวดล้อม สามารถแข่งขันและอยู่ร่วมกับประชาคมโลกได้



องค์ประกอบต่าง ๆ ในแต่ละหน่วย

ฟังก์ชัน

ในอีกด้านหนึ่งมีการเรียนแบบมาตรฐาน (rigor) เพื่อเรียนรู้ โดยการเรียนรู้รูปแบบมาตรฐาน และสอดคล้องกับสาระการเรียนรู้ ซึ่งมาตรฐาน และสอดคล้องกับสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและมัธยมศึกษาตอนปลาย

นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องฟังก์ชันมาใช้ในการอธิบายหลักการทางของระบบแบบมาตรฐานได้อย่างไร

ผลการเรียนรู้

- สามารถอธิบายการประกอบแบบมาตรฐาน
- สามารถอธิบายการประกอบแบบมาตรฐาน
- สามารถอธิบายการประกอบแบบมาตรฐาน

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

- การประกอบแบบมาตรฐาน
- การประกอบแบบมาตรฐาน
- การประกอบแบบมาตรฐาน

ความรู้ก่อนเรียน

ทบทวนความรู้เดิมเพื่อเชื่อมโยงเข้าสู่เนื้อหาใหม่

คำถามประจำหน่วยการเรียนรู้

ที่ครอบคลุมผลการเรียนรู้ในหน่วยการเรียนรู้

กิจกรรมคณิตศาสตร์

เพื่อส่งเสริมการเรียนรู้แบบ Active Learning

ผลการเรียนรู้

ที่สอดคล้องกับเนื้อหาในหน่วยการเรียนรู้

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

ขอบข่ายเนื้อหาในหน่วยการเรียนรู้

QR Code

แบบทดสอบพื้นฐานก่อนเรียน

แบบฝึกหัดเพื่อทบทวนหรือตรวจสอบความรู้พื้นฐานก่อนเรียน

ข้อควรระวัง

อธิบายในสิ่งที่ผู้เรียนมักเข้าใจผิดหรือคลาดเคลื่อน

ข้อควรระวัง 1

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ข้อควรระวัง 2

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ข้อควรระวัง 3

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ข้อควรระวัง 4

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ลองทำ

เพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกทำจนเกิดความชำนาญ

แนวข้อสอบ A-Level

แนวข้อสอบเพื่อเข้าศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษา

QR Code

ใช้สาร์ตโฟนเพื่อสแกนเพื่อดูสื่อดิจิทัลเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง

ที่เชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริง

แบบฝึกทักษะ 2.5

แบบฝึกทักษะ

แบบฝึกทักษะ 2.5

แบบฝึกทักษะ

แบบฝึกทักษะ 2.5

แบบฝึกทักษะ

Thinking Time

คำถามกระตุ้นให้ผู้เรียนได้คิดต่อยอดจากเนื้อหาที่เรียน

Thinking Time

คำถามกระตุ้นให้ผู้เรียนได้คิดต่อยอดจากเนื้อหาที่เรียน

สรุปแนวคิดหลัก

สรุปแนวคิดหลัก

สรุปแนวคิดหลัก

สรุปแนวคิดหลัก

แบบฝึกทักษะประจำหน่วยการเรียนรู้

เพื่อประเมินความรู้ความเข้าใจของผู้เรียนประจำหน่วยการเรียนรู้

แบบฝึกทักษะประจำหน่วยการเรียนรู้

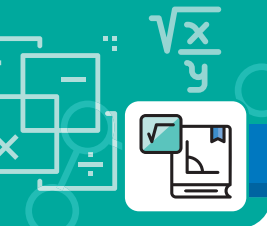
แบบฝึกทักษะประจำหน่วยการเรียนรู้

กิจกรรมการเรียนรู้เชิงรุก (Active Learning)

กิจกรรมที่เน้นให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติจริง เพื่อให้เกิดการเรียนรู้ และสร้างองค์ความรู้ด้วยตัวเอง

กิจกรรมการเรียนรู้เชิงรุก (Active Learning)

กิจกรรมที่เน้นให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติจริง เพื่อให้เกิดการเรียนรู้ และสร้างองค์ความรู้ด้วยตัวเอง



สารบัญ คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2

หน่วยการเรียนรู้ที่

1 ฟังก์ชัน

1.1	ความสัมพันธ์	4
1.2	ตัวผกผันของความสัมพันธ์	15
1.3	ฟังก์ชันและกราฟ	20
1.4	ฟังก์ชันผกผัน	48
1.5	การดำเนินการของฟังก์ชัน	53
1.6	ฟังก์ชันประกอบ	60
1.7	การนำความรู้เกี่ยวกับ เรื่องฟังก์ชันและกราฟไปใช้ ในการแก้ปัญหา	66
	คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง	75
	สรุปแนวคิดหลัก	76
	แบบฝึกทักษะประจำ หน่วยการเรียนรู้ที่ 1	79

หน่วยการเรียนรู้ที่

2 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิทึม 80

2.1	รากที่ n ในระบบจำนวนจริง และจำนวนจริงในรูปกรณฑ์	82
2.2	เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลัง เป็นจำนวนตรรกยะ	91
2.3	ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	98
2.4	สมการและอสมการ เอกซ์โพเนนเชียล	105
2.5	ฟังก์ชันลอการิทึม	109
2.6	การหาค่าลอการิทึมฐานสิบ หรือลอการิทึมสามัญ	119
2.7	การเปลี่ยนฐานลอการิทึม	126
2.8	สมการและอสมการลอการิทึม	129
2.9	การประยุกต์ของฟังก์ชัน เอกซ์โพเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิทึม	135
	คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง	143
	สรุปแนวคิดหลัก	144
	แบบฝึกทักษะประจำ หน่วยการเรียนรู้ที่ 2	147

หน่วยการเรียนรู้ที่

3 เรขาคณิตวิเคราะห์ และภาคตัดกรวย 148

3.1	ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับ เรขาคณิตวิเคราะห์	150
3.2	ภาคตัดกรวย	192
	คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง	257
	สรุปแนวคิดหลัก	258
	แบบฝึกทักษะประจำ หน่วยการเรียนรู้ที่ 3	262

กิจกรรมการเรียนรู้เชิงรุก (Active Learning) 264

ภาคผนวก 265

บรรณานุกรม 268



คำอธิบายรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์ เล่ม 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

เวลา 80 ชั่วโมง

ศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชัน ความสัมพันธ์ ตัวผกผันของความสัมพันธ์ ฟังก์ชันและกราฟ ฟังก์ชันผกผัน การดำเนินการของฟังก์ชัน ฟังก์ชันประกอบ และการนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องฟังก์ชันและกราฟไปใช้ในการแก้ปัญหา รากที่ n ในระบบจำนวนจริงและจำนวนจริงในรูปกรณฑ์ เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล สมการเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม การหาค่าลอการิทึมฐานสิบหรือลอการิทึมสามัญ การเปลี่ยนฐานลอการิทึม สมการลอการิทึม และการประยุกต์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย

โดยการจัดประสบการณ์หรือสร้างสถานการณ์ในชีวิตประจำวันที่เกี่ยวข้องให้ผู้เรียนได้ศึกษา ค้นคว้า ฝึกทักษะโดยการปฏิบัติจริง ทดลอง สรุป รายงาน เพื่อพัฒนาทักษะ กระบวนการในการคิดคำนวณ การแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และนำประสบการณ์ด้านความรู้ ความคิด ทักษะ และกระบวนการที่ได้ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์

เพื่อให้เห็นคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานได้อย่างเป็นระบบ มีระเบียบ รอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ และมีความเชื่อมั่นในตนเอง

ผลการเรียนรู้

1. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ การหารฟังก์ชัน หาฟังก์ชันประกอบและฟังก์ชันผกผัน
2. ใช้สมบัติของฟังก์ชันในการแก้ปัญหา
3. เข้าใจจำนวนจริง และใช้สมบัติของจำนวนจริงในการแก้ปัญหา
4. เข้าใจลักษณะกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
5. แก้สมการเอกซ์โพเนนเชียลและสมการลอการิทึมและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
6. เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ในการแก้ปัญหา

รวม 6 ผลการเรียนรู้

ฟังก์ชัน

ในปัจจุบันได้มีการใช้ระบบสแกนม่านตา (Iris scanner) เพื่อระบุตัวตน โดยการวิเคราะห์รูปแบบลายม่านตา และหลอดเลือดจอประสาทตา ซึ่งลายม่านตา และหลอดเลือดจอประสาทตาของแต่ละบุคคลมีรูปแบบเฉพาะตัวที่แตกต่างกัน

นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่อง ฟังก์ชัน มาใช้ในการอธิบายหลักการทำงานของระบบสแกนม่านตาได้อย่างไร

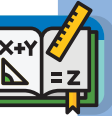
SCANNING

ผลการเรียนรู้

- hasilผลของการบวก การลบ การคูณ การหารฟังก์ชันหาฟังก์ชันประกอบและฟังก์ชันผกผัน
- ใช้สมบัติของฟังก์ชันในการแก้ปัญหา

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

- ฟังก์ชันและกราฟ
- การบวก การลบ การคูณ การหารฟังก์ชัน
- ฟังก์ชันประกอบ
- ฟังก์ชันผกผัน



กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

- กราฟของสมการ $y = mx + b$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนใด ๆ เมื่อ m , b และ d เป็นค่าคงตัว เป็นเส้นตรงที่ทำมุมแหลมกับแกน X เมื่อ $m > 0$ ทำมุมป้านกับแกน X เมื่อ $m < 0$ โดยวัดจากแกน X ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา และขนานกับแกน X เมื่อ $m = 0$

กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

- กราฟของฟังก์ชันกำลังสองที่อยู่ในรูป $y = a(x - h)^2 + k$ เมื่อ h , k เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$ เป็นพาราโบลาหงาย เมื่อ $a > 0$ และเป็นพาราโบลาคว่ำ เมื่อ $a < 0$ และจุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุดของกราฟ คือ จุด (h, k)

การดำเนินการระหว่างเซต

- $A \cap B = \{x | x \in A \text{ และ } x \in B\}$
- $A \cup B = \{x | x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$
- $A' = \{x | x \in \mathcal{U} \text{ และ } x \notin A\}$
- $A - B = \{x | x \in A \text{ และ } x \notin B\}$

จำนวนจริง

- ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a < b$
 - ช่วงเปิด (a, b) หมายถึง เซต $\{x | a < x < b\}$
 - ช่วงปิด $[a, b]$ หมายถึง เซต $\{x | a \leq x \leq b\}$
 - ช่วงครึ่งเปิดหรือช่วงครึ่งปิด $(a, b]$ หมายถึง เซต $\{x | a < x \leq b\}$
 - ช่วงครึ่งเปิดหรือช่วงครึ่งปิด $[a, b)$ หมายถึง เซต $\{x | a \leq x < b\}$
 - ช่วงเปิดอนันต์ (a, ∞) หมายถึง เซต $\{x | a < x\}$
 - ช่วงเปิดอนันต์ $(-\infty, a)$ หมายถึง เซต $\{x | x < a\}$
 - ช่วงปิดอนันต์ $[a, \infty)$ หมายถึง เซต $\{x | a \leq x\}$
 - ช่วงปิดอนันต์ $(-\infty, a]$ หมายถึง เซต $\{x | x \leq a\}$
- เซตคำตอบของสมการพหุนาม คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงที่แทน x ในสมการ แล้วทำให้สมการเป็นจริง
- เซตคำตอบของอสมการพหุนาม คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงที่แทน x ในอสมการ แล้วทำให้อสมการเป็นจริง



แบบทดสอบ
พื้นฐานก่อนเรียน



1.1 ความสัมพันธ์ (Relation)

ความสัมพันธ์ หมายถึง สิ่งที่มีความเกี่ยวข้อง ความเกี่ยวพัน หรือความข้องเกี่ยว เช่น สมาชิกในครอบครัวมีความสัมพันธ์แบบเครือญาติพี่น้อง สมาชิกในองค์กรมีความสัมพันธ์แบบผู้บังคับบัญชาและผู้ใต้บังคับบัญชา สำหรับทางคณิตศาสตร์จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกของเซตของจำนวนจริงสองเซต

1. ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

กำหนด $A = \{5, 8\}$ และ $B = \{2, 4, 6\}$

เซตของคู่อันดับต่อไปนี้นี้มีสมาชิกตัวหน้าจากเซต A และสมาชิกตัวหลังจากเซต B

$\{(5, 2), (5, 4), (5, 6), (8, 2), (8, 4), (8, 6)\}$

จะเห็นว่า เซตของคู่อันดับนี้ใช้สมาชิกตัวหน้าจากเซต A ทุกตัว และใช้สมาชิกตัวหลังจากเซต B ทุกตัว เรียกเซตคู่อันดับนี้ว่า ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B ดังบทนิยาม

บทนิยาม ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือ เซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมด โดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B เขียนแทนด้วย $A \times B$

จากบทนิยาม สามารถเขียน $A \times B$ ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขได้ ดังนี้

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

ตัวอย่างที่ 1

กำหนด $A = \{1, 3, 5\}$ และ $B = \{2, 4\}$ ให้หา $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ และ $B \times B$

วิธีทำ จาก $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$

ดังนั้น $A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$

จาก $B \times A = \{(a, b) \mid a \in B \text{ และ } b \in A\}$

ดังนั้น $B \times A = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5)\}$

จาก $A \times A = \{(a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in A\}$

ดังนั้น $A \times A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$

จาก $B \times B = \{(a, b) \mid a \in B \text{ และ } b \in B\}$

ดังนั้น $B \times B = \{(2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)\}$

ลองทำ

กำหนด $A = \{0, 4, 8\}$ และ $B = \{-1, -2\}$ ให้หา $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ และ $B \times B$

จากตัวอย่างที่ 1 จะเห็นว่า $A \times B \neq B \times A$ และถ้านักเรียนสนใจสมาชิกทั้งหมดของผลคูณคาร์ทีเซียน จะเห็นว่าจำนวนสมาชิกของ $A \times B$ เขียนแทนด้วย $n(A \times B)$ เท่ากับจำนวนสมาชิกของ $B \times A$ เขียนแทนด้วย $n(B \times A)$ ซึ่งเท่ากับ 6 แต่จำนวนสมาชิกของ A เขียนแทนด้วย $n(A)$ เท่ากับ 3 และจำนวนสมาชิกของ B เขียนแทนด้วย $n(B)$ เท่ากับ 2 ซึ่ง $n(A) \times n(B) = 6$ ดังนั้น $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$ ซึ่งสอดคล้องและเป็นไปตามสมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน

จดจำ

สำหรับ เซต A และเซต B ที่ไม่เป็นเซตว่าง จะได้ว่า
ถ้า $A \neq B$ แล้ว $A \times B \neq B \times A$ แต่ $n(A \times B) = n(B \times A)$

2. ความสัมพันธ์ (Relation)

พิจารณาผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B ที่กำหนดต่อไปนี้

$$A = \{1, 2, 5\} \text{ และ } B = \{2, 4\}$$

จะได้ $A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (5, 2), (5, 4)\}$

ซึ่งสับเซตของ $A \times B$ มีได้หลายเซต เช่น $\{(2, 2), (2, 4)\}$, $\{(1, 2), (2, 2), (5, 2)\}$ และ $\{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (5, 4)\}$ เรียกสับเซตเหล่านี้ว่า ความสัมพันธ์ของผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B

ถ้า $r_1 = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4)\}$

$r_2 = \{(5, 2), (5, 4)\}$

$r_3 = \{(2, 2)\}$

พิจารณาการใช้สมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของ r_1 , r_2 , และ r_3 จะเห็นว่า

r_1 เป็นความสัมพันธ์ที่ใช้สมาชิกจาก A เพียงบางตัว และใช้สมาชิกจาก B หมดทุกตัว

r_2 เป็นความสัมพันธ์ที่ใช้สมาชิกจาก A เพียงหนึ่งตัว และใช้สมาชิกจาก B หมดทุกตัว

r_3 เป็นความสัมพันธ์ที่ใช้สมาชิกจาก A เพียงหนึ่งตัว และใช้สมาชิกจาก B เพียงหนึ่งตัว

ซึ่งมีการนำแนวคิดดังกล่าว กำหนดเป็นบทนิยามของความสัมพันธ์ ดังนี้

บทนิยาม กำหนด A และ B เป็นเซต

1. r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times B$

2. r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A หรือความสัมพันธ์ในเซต A ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times A$

เนื่องจากความสัมพันธ์เป็นเซตของคู่อันดับ การเขียนความสัมพันธ์จึงเขียนได้ทั้งแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไข ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2

กำหนด $A = \{2, 3, 5\}$ และ $B = \{1, 4, 7\}$ ให้เขียนความสัมพันธ์ที่กำหนดแบบแจกแจงสมาชิก

1) ความสัมพันธ์น้อยกว่าจาก A ไป B 2) ความสัมพันธ์รากที่สองจาก A ไป B

วิธีทำ จาก $A = \{2, 3, 5\}$ และ $B = \{1, 4, 7\}$ และความสัมพันธ์ต้องเป็นสับเซตของ $A \times B$ จะได้ $A \times B = \{(2, 1), (2, 4), (2, 7), (3, 1), (3, 4), (3, 7), (5, 1), (5, 4), (5, 7)\}$

1) กำหนด r_1 แทนความสัมพันธ์น้อยกว่าจาก A ไป B ซึ่งหมายถึง สมาชิกตัวหน้า น้อยกว่าสมาชิกตัวหลัง

ดังนั้น $r_1 = \{(2, 4), (2, 7), (3, 4), (3, 7), (5, 7)\}$

2) กำหนด r_2 แทนความสัมพันธ์รากที่สองจาก A ไป B ซึ่งหมายถึง สมาชิกตัวหน้า เป็นรากที่สองของสมาชิกตัวหลัง

ดังนั้น $r_2 = \{(2, 4)\}$

ลองทำ

กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{4, 5, 6\}$ ให้เขียนความสัมพันธ์ “หารลงตัว” จาก A ไป B แบบแจกแจงสมาชิก

ตัวอย่างที่ 3

กำหนด $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ และ $B = \{1, 3, 5, \dots, 49\}$ ให้เขียนความสัมพันธ์ที่กำหนดแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไข

1) ความสัมพันธ์มากกว่าจาก A ไป B 2) ความสัมพันธ์กำลังสองจาก A ไป B

วิธีทำ จาก $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ และ $B = \{1, 3, 5, \dots, 49\}$ และความสัมพันธ์ต้องเป็นสับเซตของ $A \times B$ จะได้ $A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), \dots, (100, 49)\}$

1) กำหนด r_1 แทนความสัมพันธ์มากกว่าจาก A ไป B ซึ่งหมายถึง สมาชิกตัวหน้า มากกว่าสมาชิกตัวหลัง จะได้ $r_1 = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), \dots, (100, 49)\}$

ดังนั้น $r_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid x > y\}$

2) กำหนด r_2 แทนความสัมพันธ์กำลังสองจาก A ไป B ซึ่งหมายถึง สมาชิกตัวหน้า เป็นกำลังสองของสมาชิกตัวหลัง จะได้ $r_2 = \{(1, 1), (9, 3), (25, 5), \dots, (81, 9)\}$

ดังนั้น $r_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid x = y^2\}$

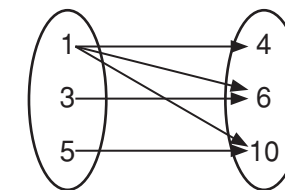
ลองทำ

กำหนด $A = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$ และ $B = \{2, 4, 6, \dots, 100\}$ ให้เขียนความสัมพันธ์ “ไม่น้อยกว่า” จาก A ไป B แบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไข

สำหรับการเขียนความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไข เมื่อผลคูณคาร์ทีเซียนเป็น $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ไม่นิยมเขียน $r = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x + y = 5\}$ แต่นิยมเขียนเป็น $r = \{(x, y) \mid x + y = 5\}$ หรืออาจเขียนเฉพาะเงื่อนไขของความสัมพันธ์ คือ $x + y = 5$ นอกจากนี้อาจเขียนแทน $(x, y) \in r$ ด้วย “ $x r y$ ” ซึ่งอ่านว่า เอกซ์มีความสัมพันธ์อาร์กับวาย และ $(x, y) \notin r$ อาจเขียนแทนด้วย “ $x \not r y$ ” ซึ่งอ่านว่า เอกซ์ไม่มีความสัมพันธ์อาร์กับวาย

3. โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ (Domain and Range of Relation)

พิจารณาความสัมพันธ์ที่กำหนดด้วยแผนภาพต่อไปนี้



จากแผนภาพ เขียนเป็นความสัมพันธ์ r คือ $\{(1, 4), (1, 6), (1, 10), (3, 6), (5, 10)\}$

จะเห็นว่า เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมดใน r คือ $\{1, 3, 5\}$ เรียกเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมดในความสัมพันธ์ r ว่า **โดเมน (domain)** ของ r

และเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดใน r คือ $\{4, 6, 10\}$ เรียกเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดในความสัมพันธ์ r ว่า **เรนจ์ (range)** ของ r

บทนิยาม

กำหนด r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

โดเมนของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วย D_r

เรนจ์ของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วย R_r

จากบทนิยาม สามารถเขียน D_r และ R_r ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขได้ ดังนี้

- $D_r = \{x \in A \mid \text{มี } y \in B \text{ ซึ่ง } (x, y) \in r\}$ กล่าวได้ว่า จะต้องหาค่าของ x ที่ทำให้มีค่าของ y
- ดังนั้น การหาโดเมนจึงต้องจัดความสัมพันธ์ให้ y อยู่ในรูปของ x

- $R_r = \{y \in B \mid \text{มี } x \in A \text{ ซึ่ง } (x, y) \in r\}$ กล่าวได้ว่า จะต้องหาค่าของ y ที่ทำให้มีค่าของ x
- ดังนั้น การหาเรนจ์จึงต้องจัดความสัมพันธ์ให้ x อยู่ในรูปของ y

ตัวอย่างที่ 4

ให้หาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ $r = \{(-1, 1), (-2, 4), (-3, 7), (-4, 10), (-5, 13)\}$

วิธีทำ จากบทนิยาม โดเมนของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน r

และเรนจ์ของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับใน r

ดังนั้น $D_r = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$ และ $R_r = \{1, 4, 7, 10, 13\}$

ลองทำ

ให้หาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ $r = \{(0, 0), (1, -1), (2, -2), (3, -3)\}$

ตัวอย่างที่ 5

กำหนด $r = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 3x + 4y = 24\}$ ให้หาโดเมนและเรนจ์ของ r

วิธีทำ หาโดเมนของความสัมพันธ์

จาก $3x + 4y = 24$ จัดตัวแปร y ในรูปของ x

$$\text{จะได้ } y = \frac{24 - 3x}{4}$$

$$y = \frac{24}{4} - \frac{3x}{4}$$

$$y = 6 - \frac{3x}{4}$$

เนื่องจาก $\frac{3x}{4}$ ต้องเป็นจำนวนเต็ม แสดงว่า x เป็นจำนวนเต็มที่มี 4 เป็นตัวประกอบ โดยค่าของ x เป็นแบบรูปของจำนวนที่เพิ่มขึ้นครั้งละ 4 คือ $\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots$

ดังนั้น $D_r = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ และมี } 4 \text{ เป็นตัวประกอบ}\}$ หรือ $D_r = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$

หาเรนจ์ของความสัมพันธ์

จาก $3x + 4y = 24$ จัดตัวแปร x ในรูปของ y

$$\text{จะได้ } x = \frac{24 - 4y}{3}$$

$$x = \frac{24}{3} - \frac{4y}{3}$$

$$x = 8 - \frac{4y}{3}$$

เนื่องจาก $\frac{4y}{3}$ ต้องเป็นจำนวนเต็ม แสดงว่า y เป็นจำนวนเต็มที่มี 3 เป็นตัวประกอบ โดยค่าของ y เป็นแบบรูปของจำนวนที่เพิ่มขึ้นครั้งละ 3 คือ $\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots$

ดังนั้น $R_r = \{y \mid y \in \mathbb{Z} \text{ และมี } 3 \text{ เป็นตัวประกอบ}\}$ หรือ $R_r = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$

ลองทำ

กำหนด $r = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2x + 5y = 10\}$ ให้หาโดเมนและเรนจ์ของ r

ตัวอย่างที่ 6

กำหนด $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3x + 4y = 24\}$ ให้หาโดเมนและเรนจ์ของ r

วิธีทำ หาโดเมนของความสัมพันธ์

จาก $3x + 4y = 24$ จัดตัวแปร y ในรูปของ x

$$\text{จะได้ } y = \frac{24 - 3x}{4}$$

$$y = \frac{24}{4} - \frac{3x}{4}$$

$$y = 6 - \frac{3x}{4}$$

เนื่องจาก $y = 6 - \frac{3x}{4}$ จะพบว่า x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ได้

ดังนั้น $D_r = \mathbb{R}$

หาเรนจ์ของความสัมพันธ์

จาก $3x + 4y = 24$ จัดตัวแปร x ในรูปของ y

$$\text{จะได้ } x = \frac{24 - 4y}{3}$$

$$x = \frac{24}{3} - \frac{4y}{3}$$

$$x = 8 - \frac{4y}{3}$$

เนื่องจาก $x = 8 - \frac{4y}{3}$ จะพบว่า y เป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ได้

ดังนั้น $R_r = \mathbb{R}$

ลองทำ

กำหนด $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x + 5y = 10\}$ ให้หาโดเมนและเรนจ์ของ r

ตัวอย่างที่ 7

กำหนด $r = \{(x, y) | y = \frac{2x}{x-5}\}$ ให้หาโดเมนและเรนจ์ของ r

วิธีทำ หาโดเมนของความสัมพันธ์

เนื่องจาก $\frac{2x}{x-5}$ เป็นเศษส่วนที่มีตัวส่วนเป็นพหุนามกำลังหนึ่ง และเศษส่วนจะไม่นิยามเมื่อตัวส่วนเป็นศูนย์ ดังนั้น $x - 5$ ต้องไม่เท่ากับศูนย์

จะได้ $x - 5 \neq 0$

$$x \neq 5$$

ดังนั้น $D_r = \{x | x \neq 5\}$ หรือ $D_r = \mathbf{R} - \{5\}$

หาเรนจ์ของความสัมพันธ์

จาก $y = \frac{2x}{x-5}$ จัดตัวแปร x ในรูปของ y

จะได้ $y(x - 5) = 2x$

$$xy - 2x = 5y$$

$$x(y - 2) = 5y$$

$$x = \frac{5y}{y-2}$$

เนื่องจาก $\frac{5y}{y-2}$ เป็นเศษส่วนที่มีตัวส่วนเป็นพหุนามกำลังหนึ่ง และเศษส่วนจะไม่นิยามเมื่อตัวส่วนเป็นศูนย์ ดังนั้น $y - 2$ ต้องไม่เท่ากับศูนย์

จะได้ $y - 2 \neq 0$

$$y \neq 2$$

ดังนั้น $R_r = \{y | y \neq 2\}$ หรือ $R_r = \mathbf{R} - \{2\}$

ลองทำ

กำหนด $r = \{(x, y) | y = \frac{3x}{x-4}\}$ ให้หาโดเมนและเรนจ์ของ r

ตัวอย่างที่ 8

กำหนด $r = \{(x, y) | y = |x|\}$ ให้หาโดเมนและเรนจ์ของ r

วิธีทำ หาโดเมนของความสัมพันธ์

เนื่องจาก $|x|$ เป็นการกำหนดค่าสัมบูรณ์ ซึ่งจำนวนในค่าสัมบูรณ์เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ดังนั้น $x \in \mathbf{R}$ นั่นคือ $D_r = \{x | x \in \mathbf{R}\}$ หรือ $D_r = \mathbf{R}$

หาเรนจ์ของความสัมพันธ์

เนื่องจาก $y = |x|$ และ $|x|$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ทุกจำนวนจริง x ใด ๆ

ดังนั้น $y \geq 0$ นั่นคือ $R_r = \{y | y \geq 0\}$ หรือ $R_r = [0, \infty)$

ลองทำ

กำหนด $r = \{(x, y) | y = |2x|\}$ ให้หาโดเมนและเรนจ์ของ r

ตัวอย่างที่ 9

กำหนด $r = \{(x, y) | y = \sqrt{9 - x^2}\}$ ให้หาโดเมนและเรนจ์ของ r

วิธีทำ หาโดเมนของความสัมพันธ์

เนื่องจาก $\sqrt{9 - x^2}$ เป็นการกำหนดค่ารากที่สอง ซึ่งจำนวนในรากที่สองต้องไม่เป็นจำนวนจริงลบ

ดังนั้น $9 - x^2 \geq 0$

จัดสมการให้สัมประสิทธิ์ของ x^2 เป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ $0 \geq x^2 - 9$

$$0 \geq (x - 3)(x + 3)$$

หรือ $(x - 3)(x + 3) \leq 0$

จากอสมการ แสดงได้บนเส้นจำนวนจริง ดังนี้



คำตอบของอสมการ คือ $\{x | -3 \leq x \leq 3\}$ หรือ $[-3, 3]$

ดังนั้น $D_r = \{x | -3 \leq x \leq 3\}$ หรือ $D_r = [-3, 3]$

หาเรนจ์ของความสัมพันธ์

จัดตัวแปร x ในรูปของ y ซึ่งต้องยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $y = \sqrt{9 - x^2}$ และ $y \geq 0$

$$y^2 = 9 - x^2$$

$$x^2 = 9 - y^2$$

$$x = \pm \sqrt{9 - y^2}$$

ดังนั้น $9 - y^2 \geq 0$

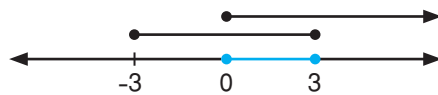
จัดสมการให้สัมประสิทธิ์ของ y^2 เป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ $0 \geq y^2 - 9$ และ $y \geq 0$

$$0 \geq (y - 3)(y + 3)$$

หรือ $(y - 3)(y + 3) \leq 0$ และ $y \geq 0$

จากอสมการ แสดงได้บนเส้นจำนวนจริง ดังนี้



คำตอบของอสมการ คือ $\{y \mid 0 \leq y \leq 3\}$ หรือ $[0, 3]$

ดังนั้น $R_r = \{y \mid 0 \leq y \leq 3\}$ หรือ $R_r = [0, 3]$

ลองทำ

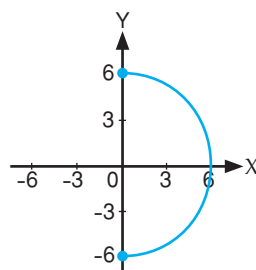
กำหนด $r = \{(x, y) \mid y = \sqrt{1 - x^2}\}$ ให้หาโดเมนและเรนจ์ของ r

การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่กำหนดด้วยกราฟ

การหาโดเมน จะพิจารณาตามแนวแกน X จากทางซ้ายไปทางขวาว่า เส้นกราฟเริ่มต้นจากจำนวนใดไปยังจำนวนใด

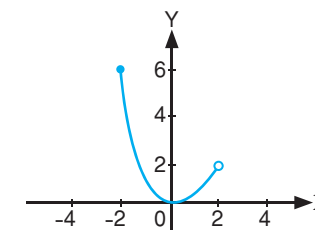
การหาเรนจ์ จะพิจารณาตามแนวแกน Y จากด้านล่างขึ้นด้านบนว่า เส้นกราฟเริ่มต้นจากจำนวนใดไปยังจำนวนใด

1. กำหนดกราฟของความสัมพันธ์ r ดังรูป



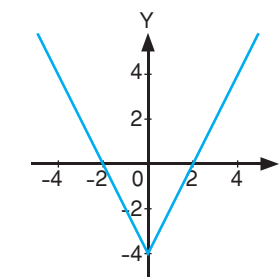
จากกราฟ จะเห็นว่า เส้นโค้งเริ่มจาก x ตั้งแต่ 0 ถึง 6 และเริ่มจาก y ตั้งแต่ -6 ถึง 6
ดังนั้น $D_r = [0, 6]$ และ $R_r = [-6, 6]$

2. กำหนดกราฟของความสัมพันธ์ r ดังรูป



จากกราฟ จะเห็นว่า เส้นโค้งเริ่มจาก x ตั้งแต่ -2 แต่ไม่ถึง 2 และเริ่มจาก y ตั้งแต่ 0 ถึง 6
ดังนั้น $D_r = [-2, 2)$ และ $R_r = [0, 6]$

3. กำหนดกราฟของความสัมพันธ์ r ดังรูป



พิจารณาตามแนวแกน X ทางขวา เริ่มต้นจาก 0 เส้นกราฟมีปลายลูกศร แสดงว่า x เป็นจำนวนจริงบวกทุกจำนวน และพิจารณาตามแนวแกน X ทางซ้าย เริ่มต้นจาก 0 เส้นกราฟมีปลายลูกศร แสดงว่า x เป็นจำนวนจริงลบทุกจำนวน

ดังนั้น x เป็นจำนวนจริงใดๆ นั่นคือ $D_r = \mathbf{R}$

พิจารณาตามแนวแกน Y จะเห็นว่า เส้นกราฟเริ่มจาก y ตั้งแต่ -4 และเส้นกราฟมีปลายลูกศร แสดงว่า y เป็นจำนวนจริงตั้งแต่ -4 ขึ้นไป

ดังนั้น $R_r = [-4, \infty)$

แบบฝึกทักษะ 1.1

ระดับพื้นฐาน ★

1. ให้หา $A \times B$ เมื่อกำหนด A และ B ต่อไปนี้

1) $A = \{0, 1\}, B = \{-1\}$

2) $A = \{-1, 0, 1\}, B = \{0, 1, 4\}$

3) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}$

4) $A = \{a, b, c\}, B = \{-2, 0, 2\}$



2. กำหนด $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ให้เขียนความสัมพันธ์ที่กำหนดแบบแจกแจงสมาชิก พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์

- 1) $r_1 = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y = 4\}$
- 2) $r_2 = \{(x, y) \in A \times A \mid x - y = 8\}$
- 3) $r_3 = \{(x, y) \in A \times A \mid x = 2 \text{ และ } y > 3\}$

3. ให้หาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

- 1) $r_1 = \{(0, 0), (1, -2), (2, -4), (3, -6), (4, -8), (5, -10)\}$
- 2) $r_2 = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x^2\}$ เมื่อ $A = \{1, 2, 3, 4\}$

ระดับกลาง ★★

4. กำหนด $A = \{0, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ และ $C = \{8, 9\}$ ให้เขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก

- 1) $A \times (B \cup C)$
- 2) $A \times (B \cap C)$
- 3) $(A \times B) \cup (A \times C)$
- 4) $(A \times B) \cap (A \times C)$

5. ให้หาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

- 1) $r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = \frac{3}{2x-1}\}$
- 2) $r_2 = \{(x, y) \mid y = \frac{x+1}{x-2}\}$
- 3) $r_3 = \{(x, y) \mid y = |x+5|\}$
- 4) $r_4 = \{(x, y) \mid y = \frac{5x}{2x-3}\}$
- 5) $r_5 = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2-4}\}$
- 6) $r_6 = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\}$

ระดับท้าทาย ★★★

6. การจัดขบวนพาเหรดของโรงเรียนแห่งหนึ่ง จัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ประกอบด้วยผู้เดินเป็นแถวตั้งแต่ 5 แถว ถึง 10 แถว แต่ละแถวมีจำนวนคนเท่ากันตั้งแต่ 10 คน ถึง 25 คน ผู้ยืนริมด้านนอกแต่งกายสีแดง ซึ่งมีทั้งหมด 50 คน ให้นักเรียนเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนแถวและจำนวนคนที่อยู่ในแถว

1.2 ตัวผกผันของความสัมพันธ์ (Inverse of Relation)

นักเรียนทราบมาแล้วว่า ความสัมพันธ์เป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียน จึงอาจทำให้ความสัมพันธ์สองเซตมีสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลังสลับที่กันได้ โดยมีการนำแนวคิดนี้มากำหนดความสัมพันธ์เกี่ยวกับตัวผกผันของความสัมพันธ์ ดังนี้

ให้นักเรียนพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$r_1 = \{(-1, 1), (-2, 4), (-3, 9)\} \quad r_2 = \{(1, -1), (4, -2), (9, -3)\}$$

$$r_3 = \{(x, y) \mid y = 3x - 1\} \quad r_4 = \{(x, y) \mid y = \frac{x+1}{3}\}$$

จากความสัมพันธ์ทั้งสี่ จะเห็นว่า

- r_1 และ r_2 เป็นการเขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก ซึ่งแต่ละสมาชิกใน r_2 เป็นการสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของ r_1

- r_3 และ r_4 เป็นการเขียนความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไข ซึ่งยังไม่สามารถบอกได้ว่าเงื่อนไขทั้งสองจะทำให้มีการสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้า กับสมาชิกตัวหลังหรือไม่ แต่สามารถตรวจสอบได้โดยนำเงื่อนไขของ r_4 มาจัดรูป ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{จาก} \quad y &= \frac{x+1}{3} \\ \text{จะได้} \quad 3y &= x+1 \\ x &= 3y-1 \end{aligned}$$

เมื่อนำเงื่อนไขของ r_3 คือ $y = 3x - 1$ และเงื่อนไขของ r_4 ที่จัดรูปแล้ว คือ $x = 3y - 1$ มาเปรียบเทียบกับกัน จะเห็นว่าการสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลังของ r_3 และ r_4 จากความสัมพันธ์ทั้งสี่ เรียก r_2 ว่าเป็นตัวผกผันของความสัมพันธ์ r_1 และเรียก r_4 ว่าเป็นตัวผกผันของความสัมพันธ์ r_3 ซึ่งมีการกำหนดบทนิยามตัวผกผันของความสัมพันธ์ ดังนี้

บทนิยาม ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r คือ ความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r ซึ่งเขียนแทนด้วย r^{-1} อ่านว่า ตัวผกผันของ r

การสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในคู่อันดับ เพื่อหาตัวผกผันของความสัมพันธ์ในที่นี้เขียนแทนด้วย $x \leftrightarrow y$

จากบทนิยามจะได้ว่า โดเมนของความสัมพันธ์จะเป็นเรนจ์ของตัวผกผันของความสัมพันธ์ และเรนจ์ของความสัมพันธ์จะเป็นโดเมนของตัวผกผันของความสัมพันธ์ กล่าวคือ

$$D_r = R_{r^{-1}} \text{ และ } R_r = D_{r^{-1}}$$

การเขียนตัวผกผันของความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขมี 2 แบบ คือ

- 1) ใช้คู่อันดับ (x, y) แต่ต้องเปลี่ยนเงื่อนไขโดยสลับที่ระหว่าง x กับ y คือ ที่มี x เขียน y แทน และที่มี y เขียน x แทน และจัดรูปของเงื่อนไขโดยให้ y อยู่ในรูปของ x

$$\text{เช่น } r = \{(x, y) \mid y = x - 5\}$$

สลับที่ระหว่าง x กับ y เป็น $x = y - 5$ และจัด y ในรูปของ x ได้ $y = x + 5$

$$\text{จะได้ } r^{-1} = \{(x, y) \mid y = x + 5\}$$

- 2) ใช้คู่อันดับ (y, x) และไม่ต้องสลับที่ตัวแปร x และ y ในเงื่อนไข

$$\text{เช่น } r = \{(x, y) \mid y = x - 5\} \text{ จะได้ } r^{-1} = \{(y, x) \mid y = x - 5\}$$

ตัวอย่างที่ 10

กำหนด $r = \{(-2, 1), (-1, 2), (0, 3), (1, 4)\}$ ให้หาตัวผกผันของ r พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์

วิธีทำ จาก $r = \{(-2, 1), (-1, 2), (0, 3), (1, 4)\}$

สลับที่สมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r

$$\text{จะได้ } r^{-1} = \{(1, -2), (2, -1), (3, 0), (4, 1)\}$$

$$D_{r^{-1}} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R_{r^{-1}} = \{-2, -1, 0, 1\}$$

ลองทำ

กำหนด $r = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$ ให้หาตัวผกผันของ r พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์

ตัวอย่างที่ 11

กำหนด $r = \{(x, y) \mid y = 2x + 3\}$ ให้หาตัวผกผันของ r พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์

วิธีทำ แบบที่ 1 ใช้คู่อันดับ (x, y) และสลับที่ระหว่าง x กับ y ในเงื่อนไข

$$\text{จาก } y = 2x + 3$$

$$\text{หา } r^{-1} \text{ โดยแทน } x \leftrightarrow y \text{ จะได้ } x = 2y + 3$$

แต่ความสัมพันธ์นิยมเขียนตัวแปร y ในรูปของ x

$$\text{จะได้ } x - 3 = 2y$$

$$\frac{x - 3}{2} = y$$

$$\text{ดังนั้น } r^{-1} = \{(x, y) \mid y = \frac{x - 3}{2}\}$$

$$D_{r^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$R_{r^{-1}} = \mathbb{R}$$

แบบที่ 2 ใช้คู่อันดับ (y, x) และไม่ต้องสลับที่ตัวแปร x และ y ในเงื่อนไข

$$\text{จาก } r = \{(x, y) \mid y = 2x + 3\}$$

$$\text{ดังนั้น } r^{-1} = \{(y, x) \mid y = 2x + 3\}$$

$$D_{r^{-1}} = \mathbb{R} \text{ และ } R_{r^{-1}} = \mathbb{R}$$

ตัวอย่างที่ 12

กำหนด $r = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x - 2}\}$ ให้หาตัวผกผันของ r พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์

วิธีทำ จาก $y = \sqrt{x - 2}$ เป็นความสัมพันธ์ที่มีโดเมนเป็นจำนวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ 2 ขึ้นไป และเรนจ์เป็นจำนวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ 0 ขึ้นไป

$$\text{หา } r^{-1} \text{ โดยแทน } x \leftrightarrow y \text{ จะได้ } x = \sqrt{y - 2} \text{ แสดงว่า } x \geq 0$$

เขียนตัวแปร y ในรูปของ x จะต้องยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ

$$\text{จะได้ } x = \sqrt{y - 2}$$

$$x^2 = y - 2$$

$$y = x^2 + 2$$

จะเป็นความสัมพันธ์ซึ่งมีโดเมนเป็นจำนวนจริงใด ๆ และเรนจ์เป็นจำนวนจริงมีค่าตั้งแต่ 2 ขึ้นไป จะเห็นว่า $y = x^2 + 2$ เป็นความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจาก $x \leftrightarrow y$ มีเรนจ์

เท่ากับโดเมนของ $y = \sqrt{x - 2}$ แต่โดเมนไม่เท่ากับเรนจ์ของ $y = \sqrt{x - 2}$

ดังนั้น $y = x^2 + 2$ และ $x \geq 0$ จะทำให้มีโดเมนเท่ากับเรนจ์ของ $y = \sqrt{x - 2}$

$$\text{นั่นคือ } r^{-1} = \{(x, y) \mid y = x^2 + 2 \text{ และ } x \geq 0\}$$

$$D_{r^{-1}} = [0, \infty)$$

$$R_{r^{-1}} = [2, \infty)$$

ลองทำ

ให้หาตัวผกผันของความสัมพันธ์ที่กำหนด พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์

$$1) r = \{(x, y) \mid y = 4x - 1\}$$

$$2) s = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x - 5}\}$$

ข้อควรระวัง

การหาตัวผกผันของ r ที่มีการยกกำลังเป็นจำนวนคู่ เมื่อจัด y ในรูปของ x จะทำให้มีการขยายขอบเขตของคู่อันดับในความสัมพันธ์ จึงต้องตรวจสอบ $D_r = R_{r^{-1}}$ และ $R_r = D_{r^{-1}}$

ตัวอย่างที่ 13

ให้เขียนกราฟของความสัมพันธ์และตัวผกผันของความสัมพันธ์ที่กำหนด บนระบบพิกัดฉากเดียวกัน

1) $r = \{(x, y) \mid y = 3x - 4\}$

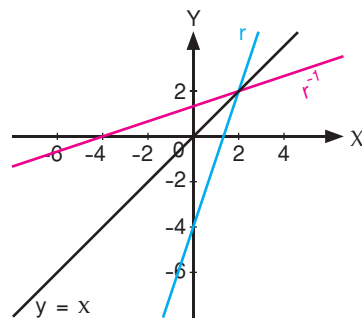
2) $r = \{(x, y) \mid y \geq 3x\}$

วิธีทำ 1) จาก $r = \{(x, y) \mid y = 3x - 4\}$

จะได้ $r^{-1} = \{(x, y) \mid x = 3y - 4\}$

หรือ $r^{-1} = \{(x, y) \mid y = \frac{x+4}{3}\}$

เขียนกราฟของ r และ r^{-1} ได้ ดังนี้



คุณิตานำรู้

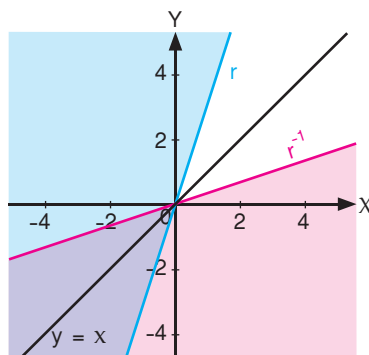
กราฟของความสัมพันธ์ใด ๆ กับกราฟของตัวผกผันของความสัมพันธ์จะมีกราฟของเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตร ซึ่งถ้าพับรูปกราฟตามแนวเส้นตรง $y = x$ แล้วกราฟของ r และ r^{-1} จะทับกันสนิทพอดี

2) จาก $r = \{(x, y) \mid y \geq 3x\}$

จะได้ $r^{-1} = \{(x, y) \mid x \geq 3y\}$

หรือ $r^{-1} = \{(x, y) \mid y \leq \frac{x}{3}\}$

เขียนกราฟของ r และ r^{-1} ได้ ดังนี้



ลองทำดู

ให้เขียนกราฟของความสัมพันธ์และตัวผกผันของความสัมพันธ์ที่กำหนดบนระบบพิกัดฉากเดียวกัน

1) $r = \{(x, y) \mid y = 2x - 1\}$

2) $r = \{(x, y) \mid y \geq 2x\}$

แบบฝึกทักษะ 1.2

ระดับพื้นฐาน ★

1. ให้หาโดเมน เรนจ์ และตัวผกผันของความสัมพันธ์ เมื่อกำหนด r ต่อไปนี้

1) $r = \{(-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, -1), (2, -2)\}$

2) $r = \{(3, 2), (2, 1), (1, 0), (0, -1)\}$

3) $r = \{(1, 5), (2, 6), (4, 8), (5, 10)\}$

4) $r = \{(-5, -2), (-3, 0), (-1, 2), (1, 4), \dots\}$

5) $r = \{\dots, (-3, 4), (-1, 2), (1, 0), (3, 2), \dots\}$

ระดับกลาง ★★

2. ให้หาตัวผกผันของความสัมพันธ์ที่กำหนด พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของตัวผกผันของความสัมพันธ์ดังกล่าว

1) $p = \{(x, y) \mid y = x + 5\}$

2) $q = \{(x, y) \mid y = 4x + 3\}$

3) $r = \{(x, y) \mid x - 4y = 3\}$

4) $s = \{(x, y) \mid y = 5 - 2x\}$

5) $t = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x+1}\}$

3. ให้เขียนกราฟของ r และ r^{-1} บนระบบพิกัดฉากเดียวกัน เมื่อกำหนด r ต่อไปนี้

1) $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x + 4\}, A = \{-2, -1, 0, 2, 3, 4\}$

2) $r = \{(x, y) \in B \times B \mid y = x - 3\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

3) $r = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x = y^2\}$

4) $r = \{(x, y) \mid y = 3x\}$

5) $r = \{(x, y) \mid y > x\}$

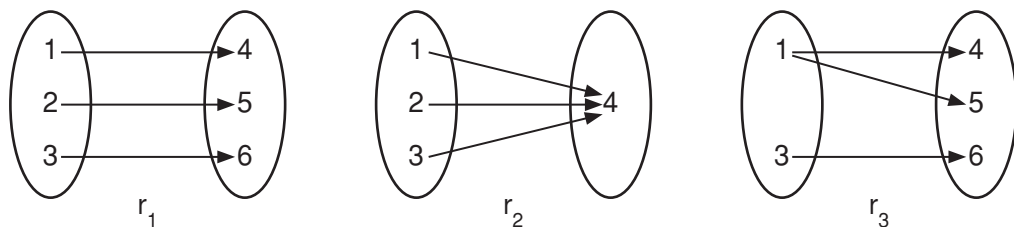
1.3 ฟังก์ชันและกราฟ (Function and Graph)

ฟังก์ชันและกราฟ เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่นำไปใช้แก้ปัญหาต่าง ๆ ในชีวิตประจำวัน และนำไปประยุกต์ใช้ได้หลายสาขาวิชา เช่น การหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของการเคลื่อนที่ของวัตถุ การเพิ่มขึ้นของจำนวนประชากร การคำนวณดอกเบี้ยเงินฝากหรือเงินกู้ การประกันภัยหรือประกันชีวิต

ฟังก์ชันและกราฟมีความเกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ที่กล่าวมาก่อนหน้านี้แล้ว กล่าวคือ ความสัมพันธ์บางความสัมพันธ์มีสมาชิกตัวหน้าซ้ำกัน บางความสัมพันธ์มีสมาชิกตัวหลังซ้ำกัน หรือบางความสัมพันธ์อาจจะไม่มีสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังซ้ำกันเลย จึงได้มีการนำความสัมพันธ์ที่ไม่มีการใช้สมาชิกตัวหน้าซ้ำกันเลยมานิยามเป็นฟังก์ชัน

1. ความหมายของฟังก์ชัน

ให้นักเรียนพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้



$$r_1 = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$$

$$r_2 = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$$

$$r_3 = \{(1, 4), (1, 5), (3, 6)\}$$

จากแผนภาพทั้งสาม จะเห็นว่า

- สมาชิกแต่ละตัวในโดเมนของ r_1 จับคู่กับสมาชิกแต่ละตัวในเรนจ์ของ r_1
- สมาชิกแต่ละตัวในโดเมนของ r_2 จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของ r_2 เพียงตัวเดียว
- สมาชิกบางตัวในโดเมนของ r_3 จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของ r_3 มากกว่า 1 ตัว

เรียก r_1 และ r_2 ว่า ความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน และเรียก r_3 ว่า ความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นฟังก์ชัน ซึ่งได้มีการกำหนดบทนิยามความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน ดังนี้

บทนิยาม ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งสมาชิกในโดเมนแต่ละตัวจับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของความสัมพันธ์เพียงตัวเดียวเท่านั้น

จากบทนิยาม จะนิยามเขียนฟังก์ชันแทนด้วย f และฟังก์ชันเป็นสับเซตของความสัมพันธ์ โดยที่สำหรับ x, y และ z ใด ๆ ถ้า $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$

สัญลักษณ์ที่ใช้เกี่ยวกับฟังก์ชัน

1) ถ้าความสัมพันธ์ f เป็นฟังก์ชัน จะเขียน $y = f(x)$ แทน $(x, y) \in f$ และเรียก $f(x)$ ว่า ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x ซึ่ง x แทนจำนวนจริงใด ๆ อาจอยู่ในรูปของเอกนามหรือพหุนาม เช่น $f(x + 4)$ และ $f(\sqrt{x^3 - 1})$ และ $f(x)$ อ่านว่า เอฟของเอกซ์ หรือ เอฟเอกซ์ นั่นคือ $f(x)$ ก็คือ y และ y ก็คือ $f(x)$

2) เซตของสมาชิกตัวหน้าในฟังก์ชัน เขียนแทนด้วย D_f และเซตของสมาชิกตัวหลังในฟังก์ชัน เขียนแทนด้วย R_f

ตัวอย่างที่ 14

ให้พิจารณาความสัมพันธ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ว่า ความสัมพันธ์ข้อใดเป็นฟังก์ชัน และความสัมพันธ์ข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน

1) $r_1 = \{(-1, 1), (-2, 2), (-3, 3), (-4, 4)\}$

2) $r_2 = \{(0, 0), (4, -2), (4, -1)\}$

3) $r_3 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 2)\}$

วิธีทำ 1) เนื่องจากคู่อันดับใน r_1 ไม่มีสองคู่อันดับใด ใช้สมาชิกตัวหน้าซ้ำกัน ดังนั้น r_1 เป็นฟังก์ชัน

2) เนื่องจากคู่อันดับใน r_2 มีคู่อันดับสองคู่ ใช้สมาชิกตัวหน้าซ้ำกัน คือ $(4, -2)$ และ $(4, -1)$ ดังนั้น r_2 ไม่เป็นฟังก์ชัน

3) เนื่องจากคู่อันดับใน r_3 ไม่มีสองคู่อันดับใด ใช้สมาชิกตัวหน้าซ้ำกัน ดังนั้น r_3 เป็นฟังก์ชัน

ลองทำ

ให้พิจารณาความสัมพันธ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ว่า ความสัมพันธ์ข้อใดเป็นฟังก์ชัน และความสัมพันธ์ข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน

1) $r_1 = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

2) $r_2 = \{(0, -1), (2, -1), (4, -2), (4, -3)\}$

การพิจารณาความสัมพันธ์ที่กำหนดด้วยเงื่อนไขว่า เป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชัน จะต้องใช้บทนิยามแล้วใช้สมบัติการเท่ากัน พิจารณาค่าของ y และ z

“สำหรับ x, y และ z ใด ๆ ถ้า $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$ ”



ตัวอย่างที่ 15

ให้พิจารณาความสัมพันธ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ว่า ความสัมพันธ์ข้อใดเป็นฟังก์ชัน และความสัมพันธ์ข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน

- 1) $r_1 = \{(x, y) \mid y = x - 4\}$
- 2) $r_2 = \{(x, y) \mid y = x^2 + 3\}$
- 3) $r_3 = \{(x, y) \mid y^2 = x\}$
- 4) $r_4 = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}\}$

- วิธีทำ 1) กำหนด (x, y) และ (x, z) เป็นคู่อันดับใน r_1
จะได้ว่า $y = x - 4$ และ $z = x - 4$
ดังนั้น $y = z$
นั่นคือ $r_1 = \{(x, y) \mid y = x - 4\}$ เป็นฟังก์ชัน
- 2) กำหนด (x, y) และ (x, z) เป็นคู่อันดับใน r_2
จะได้ว่า $y = x^2 + 3$ และ $z = x^2 + 3$
ดังนั้น $y = z$
นั่นคือ $r_2 = \{(x, y) \mid y = x^2 + 3\}$ เป็นฟังก์ชัน
- 3) กำหนด (x, y) และ (x, z) เป็นคู่อันดับใน r_3
จะได้ว่า $y^2 = x$ และ $z^2 = x$
ดังนั้น $y^2 = z^2$
 $y = z$ หรือ $-z$
แสดงว่า มีค่า x ที่ทำให้ได้ค่า y มากกว่า 1 ค่า
นั่นคือ $r_3 = \{(x, y) \mid y^2 = x\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน
- 4) กำหนด (x, y) และ (x, z) เป็นคู่อันดับใน r_4
จะได้ว่า $y = \sqrt{x}$ และ $z = \sqrt{x}$
ดังนั้น $y = z$
นั่นคือ $r_4 = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}\}$ เป็นฟังก์ชัน

ลองทำ

ให้พิจารณาความสัมพันธ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ว่า ความสัมพันธ์ข้อใดเป็นฟังก์ชัน และความสัมพันธ์ข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน

- 1) $r_1 = \{(x, y) \mid y = x + 7\}$
- 2) $r_2 = \{(x, y) \mid y = x^2 - 1\}$

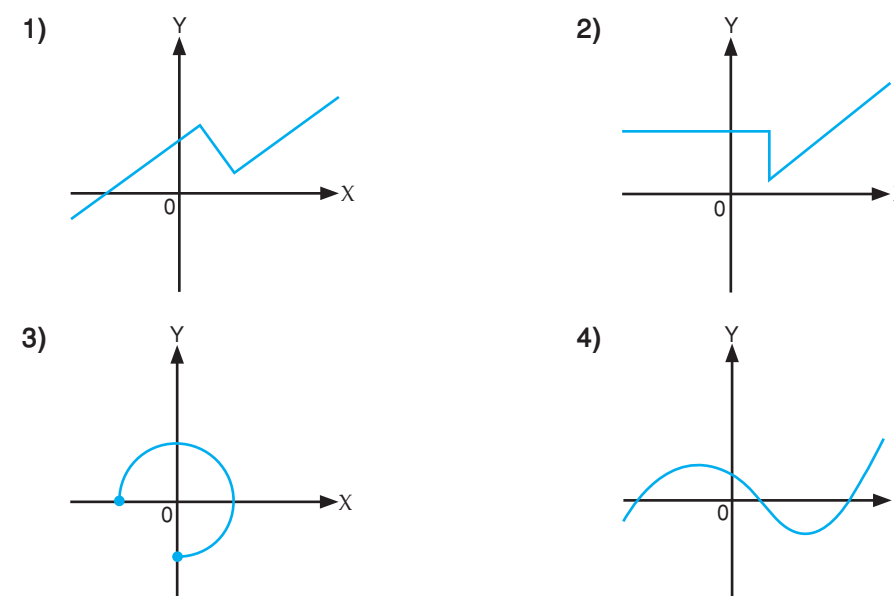
การพิจารณาความสัมพันธ์ที่กำหนดด้วยกราฟว่า เป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชัน จะต้องใช้บทนิยาม

“สำหรับ x, y และ z ใด ๆ ถ้า $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$ ”

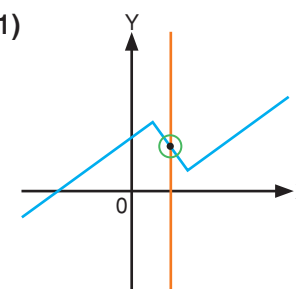
และจากบทนิยาม ถ้าลากเส้นตรงที่เชื่อมจุด (x, y) และ (x, z) จะเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y ดังนั้น ในการพิจารณาฟังก์ชันจากความสัมพันธ์จึงต้องลากเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y แล้วพิจารณาจำนวนจุดตัดที่เส้นตรงนี้ตัดกับกราฟ ถ้ามีจำนวนจุดตัดเพียง 1 จุด ความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน ถ้ามีจำนวนจุดตัดมากกว่า 1 จุด ความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 16

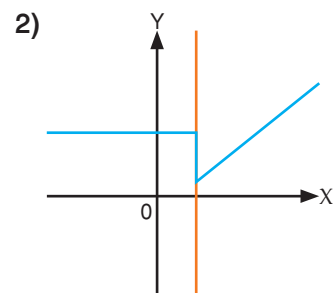
ให้พิจารณาความสัมพันธ์ที่กำหนดด้วยกราฟในแต่ละข้อต่อไปนี้ว่า ความสัมพันธ์ข้อใดเป็นฟังก์ชัน และความสัมพันธ์ข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน



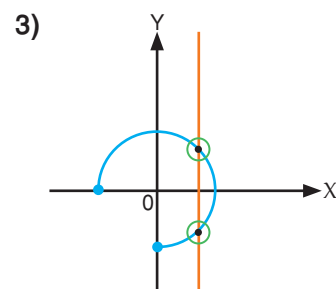
วิธีทำ 1)



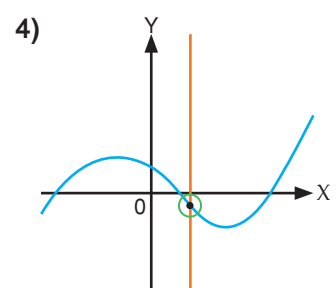
เนื่องจากเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y ทุกเส้น ตัดกราฟของความสัมพันธ์เพียง 1 จุด เท่านั้น
ดังนั้น ความสัมพันธ์นี้เป็นฟังก์ชัน



เนื่องจากมีเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y
ตัดกราฟของความสัมพัทธ์มากกว่า 1 จุด
ดังนั้น ความสัมพันธ์นี้ไม่เป็นฟังก์ชัน



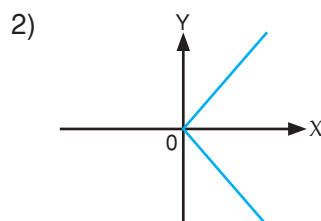
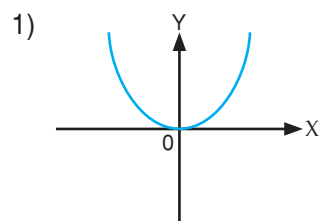
เนื่องจากมีเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y
ตัดกราฟของความสัมพัทธ์มากกว่า 1 จุด
ดังนั้น ความสัมพันธ์นี้ไม่เป็นฟังก์ชัน



เนื่องจากเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y ทุกเส้น ตัดกราฟ
ของความสัมพัทธ์เพียง 1 จุด เท่านั้น
ดังนั้น ความสัมพันธ์นี้เป็นฟังก์ชัน

ลองทำดู

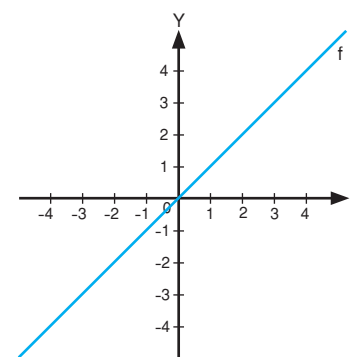
ให้พิจารณาความสัมพันธ์ที่กำหนดด้วยกราฟในแต่ละข้อต่อไปนี้ว่า ความสัมพันธ์ข้อใดเป็น
ฟังก์ชัน และความสัมพันธ์ข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน



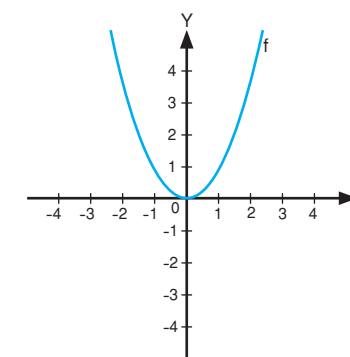
2. กราฟของฟังก์ชันและเทคนิคการเขียนกราฟของฟังก์ชัน

การเขียนกราฟของฟังก์ชันบางฟังก์ชัน นักเรียนสามารถเขียนกราฟได้สะดวกและรวดเร็วขึ้น
โดยใช้การเลื่อนขนานจากกราฟของฟังก์ชันพื้นฐาน

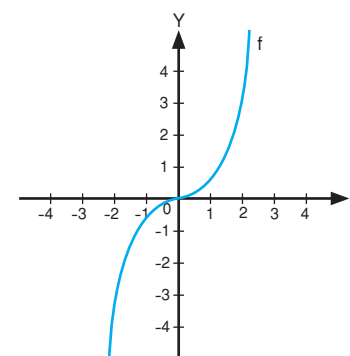
กราฟของฟังก์ชันพื้นฐานที่นักเรียนต้องนำมาใช้ เพื่อเขียนกราฟโดยการเลื่อนขนาน มีดังนี้



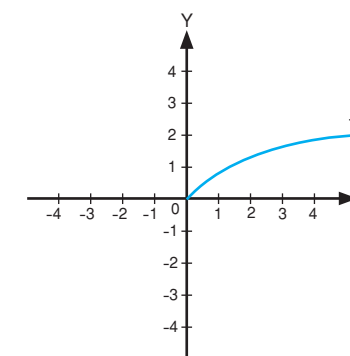
ฟังก์ชันเอกลักษณ์
 $f(x) = x$ หรือ $y = x$



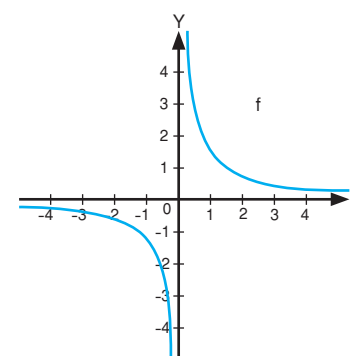
ฟังก์ชันกำลังสอง
 $f(x) = x^2$ หรือ $y = x^2$



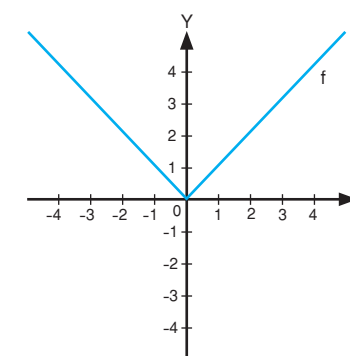
ฟังก์ชันกำลังสาม
 $f(x) = x^3$ หรือ $y = x^3$



ฟังก์ชันรากที่สอง
 $f(x) = \sqrt{x}$ หรือ $y = \sqrt{x}$



ฟังก์ชันส่วนกลับ
 $f(x) = \frac{1}{x}$ หรือ $y = \frac{1}{x}$



ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์
 $f(x) = |x|$ หรือ $y = |x|$

ฟังก์ชัน

การเลื่อนกราฟ

(1) การเลื่อนขนานในแนวตั้ง

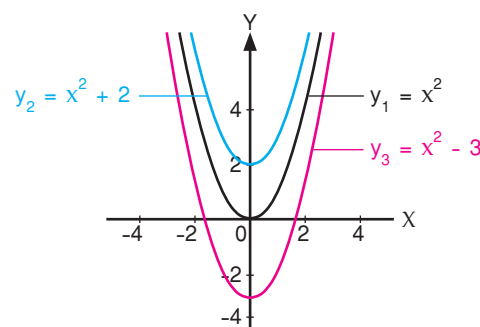
พิจารณาการเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้บนระบบพิกัดฉากเดียวกัน

$$y_1 = x^2, y_2 = x^2 + 2 \text{ และ } y_3 = x^2 - 3$$

สร้างตารางเลือกค่าของ x บางค่า แล้วหาค่าของฟังก์ชัน ดังนี้

x	-2	-1	0	1	2
$y_1 = x^2$	4	1	0	1	4
$y_2 = x^2 + 2$	6	3	2	3	6
$y_3 = x^2 - 3$	1	-2	-3	-2	1

เขียนกราฟได้ดังรูป



พิจารณาความสัมพันธ์ของกราฟเหล่านี้ เมื่อใช้กราฟ $y_1 = x^2$ เป็นหลักในการอ้างอิง จะเห็นว่า กราฟ $y_2 = x^2 + 2$ และกราฟ $y_3 = x^2 - 3$ มีรูปร่างเหมือนกันกับกราฟ $y_1 = x^2$ โดยกราฟ $y_2 = x^2 + 2$ เกิดจากการเลื่อนกราฟ $y_1 = x^2$ ขึ้นตามแนวแกน Y เป็นระยะ 2 หน่วย และกราฟ $y_3 = x^2 - 3$ เกิดจากการเลื่อนกราฟ $y_1 = x^2$ ลงตามแนวแกน Y เป็นระยะ 3 หน่วย

ในกรณีทั่วไป ถ้านักเรียนทราบลักษณะของกราฟ $y = f(x)$ แล้ว นักเรียนสามารถเขียนกราฟ $y = f(x) + k$ และ $y = f(x) - k$ โดยอาศัยการเลื่อนกราฟ $y = f(x)$ ในแนวตั้ง ซึ่งสรุปได้ ดังนี้

- $y = f(x) + k$ ได้จากการเลื่อนกราฟ $y = f(x)$ ขึ้นตามแนวแกน Y เป็นระยะ k หน่วย เมื่อ $k > 0$
- $y = f(x) - k$ ได้จากการเลื่อนกราฟ $y = f(x)$ ลงตามแนวแกน Y เป็นระยะ k หน่วย เมื่อ $k > 0$

ตัวอย่างที่ 17

ให้เขียนกราฟของฟังก์ชันแต่ละฟังก์ชันต่อไปนี้บนระบบพิกัดฉากเดียวกัน

โดยใช้กราฟพื้นฐาน $y = |x|$

$$1) y_1 = |x| + 2$$

$$2) y_2 = |x| - 3$$

วิธีทำ เขียนกราฟ $y = |x|$ ซึ่งเป็นกราฟพื้นฐาน

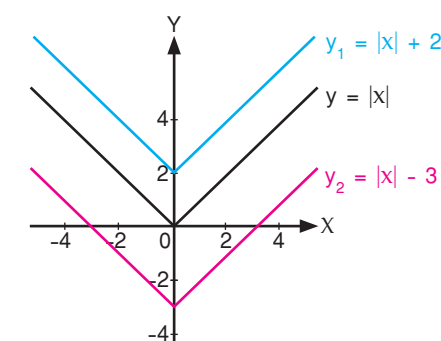
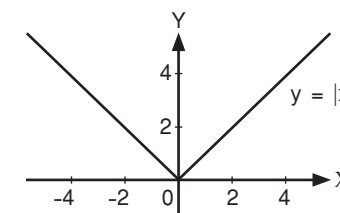
กราฟ $y_1 = |x| + 2$ ต้องเลื่อนกราฟ $y = |x|$

ขึ้นตามแนวแกน Y เป็นระยะ 2 หน่วย

และกราฟ $y_2 = |x| - 3$ ต้องเลื่อนกราฟ $y = |x|$

ลงตามแนวแกน Y เป็นระยะ 3 หน่วย

จะได้กราฟ ดังนี้



ลองทำดู

ให้เขียนกราฟของฟังก์ชันแต่ละฟังก์ชันต่อไปนี้บนระบบพิกัดฉากเดียวกันโดยใช้

กราฟพื้นฐาน $y = |x|$

$$1) y_1 = |x| + 5$$

$$2) y_2 = |x| - 5$$

(2) การเลื่อนขนานในแนวนอน

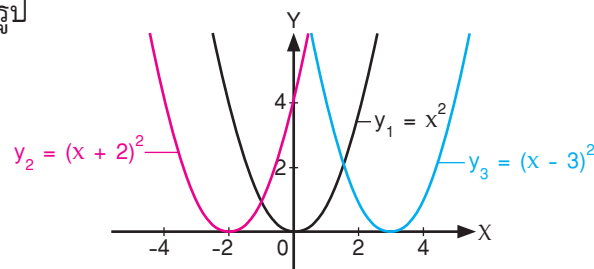
พิจารณาการเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้บนระบบพิกัดฉากเดียวกัน

$$y_1 = x^2, y_2 = (x + 2)^2 \text{ และ } y_3 = (x - 3)^2$$

สร้างตารางเลือกค่าของ x บางค่า แล้วหาค่าของฟังก์ชัน ดังนี้

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y_1 = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$y_2 = (x + 2)^2$	4	1	0	1	4	9	16	25	36
$y_3 = (x - 3)^2$	49	36	25	16	9	4	1	0	1

เขียนกราฟได้ดังรูป



พิจารณาความสัมพันธ์ของกราฟเหล่านี้ เมื่อใช้กราฟ $y_1 = x^2$ เป็นหลักในการอ้างอิง จะเห็นว่ากราฟ $y_2 = (x+2)^2$ และกราฟ $y_3 = (x-3)^2$ มีรูปร่างเหมือนกันกับกราฟ $y_1 = x^2$ โดยกราฟ $y_2 = (x+2)^2$ เกิดจากการเลื่อนกราฟ $y_1 = x^2$ ไปทางซ้ายตามแนวแกน X เป็นระยะ 2 หน่วย และกราฟ $y_3 = (x-3)^2$ เกิดจากการเลื่อนกราฟ $y_1 = x^2$ ไปทางขวาตามแนวแกน X เป็นระยะ 3 หน่วย

ในกรณีทั่วไป ถ้านักเรียนทราบลักษณะของกราฟ $y = f(x)$ แล้ว นักเรียนสามารถเขียนกราฟของ $y = f(x+k)$ และ $y = f(x-k)$ โดยอาศัยการเลื่อนกราฟ $y = f(x)$ ในแนวนอน ซึ่งสรุปได้ ดังนี้

- $y = f(x+k)$ ได้จากการเลื่อนกราฟ $y = f(x)$ ไปทางซ้ายตามแนวแกน X เป็นระยะ k หน่วย เมื่อ $k > 0$
- $y = f(x-k)$ ได้จากการเลื่อนกราฟ $y = f(x)$ ไปทางขวาตามแนวแกน X เป็นระยะ k หน่วย เมื่อ $k > 0$

ตัวอย่างที่ 18

ให้เขียนกราฟของฟังก์ชันแต่ละฟังก์ชันต่อไปนี้บนระบบพิกัดฉากเดียวกัน โดยใช้กราฟพื้นฐาน $y = |x|$

1) $y_1 = |x+3|$

2) $y_2 = |x-2|$

วิธีทำ เขียนกราฟ $y = |x|$ ซึ่งเป็นกราฟพื้นฐาน

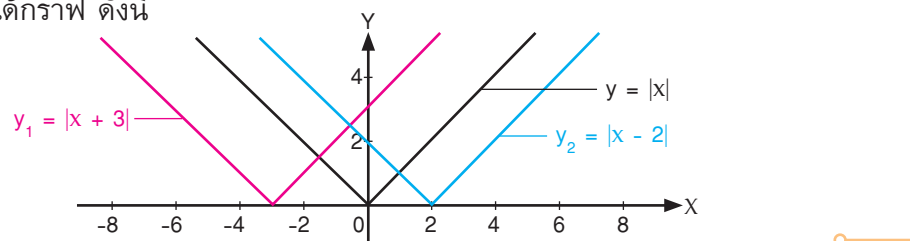
กราฟ $y_1 = |x+3|$ ต้องเลื่อนกราฟ $y = |x|$

ไปทางซ้ายตามแนวแกน X เป็นระยะ 3 หน่วย

และกราฟ $y_2 = |x-2|$ ต้องเลื่อนกราฟ $y = |x|$

ไปทางขวาตามแนวแกน X เป็นระยะ 2 หน่วย

จะได้กราฟ ดังนี้



ลองทำ

ให้เขียนกราฟของฟังก์ชันแต่ละฟังก์ชันต่อไปนี้บนระบบพิกัดฉากเดียวกัน โดยใช้กราฟพื้นฐาน $y = |x|$

1) $y_1 = |x+2|$

2) $y_2 = |x-1|$

ตัวอย่างที่ 19

กำหนด $f = \{(3, 8), (4, 9), (5, 10)\}$ ให้หา $f(3)$, $f(4)$ และ $f(5)$

วิธีทำ เนื่องจาก $(3, 8) \in f$ ดังนั้น $f(3) = 8$

$(4, 9) \in f$ ดังนั้น $f(4) = 9$

$(5, 10) \in f$ ดังนั้น $f(5) = 10$

ลองทำ

กำหนด $f = \{(1, 1), (2, 8), (3, 27)\}$ ให้หา $f(1)$, $f(2)$ และ $f(3)$

ตัวอย่างที่ 20

กำหนด $f(x) = 3x - 7$ ให้หา $f(0)$, $f(-5)$, $f(x+4)$ และ $f(x^2 - x + 1)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 3x - 7$

$f(0)$ เป็นค่าของฟังก์ชัน เมื่อสมาชิกตัวหน้าเท่ากับ 0

จะได้ $f(0) = 3(0) - 7 = -7$

$f(-5)$ เป็นค่าของฟังก์ชัน เมื่อสมาชิกตัวหน้าเท่ากับ -5

จะได้ $f(-5) = 3(-5) - 7 = -22$

$f(x+4)$ เป็นค่าของฟังก์ชัน เมื่อสมาชิกตัวหน้าเท่ากับ $x+4$

จะได้ $f(x+4) = 3(x+4) - 7 = 3x + 5$

$f(x^2 - x + 1)$ เป็นค่าของฟังก์ชัน เมื่อสมาชิกตัวหน้าเท่ากับ $x^2 - x + 1$

จะได้ $f(x^2 - x + 1) = 3(x^2 - x + 1) - 7 = 3x^2 - 3x - 4$

ลองทำ

กำหนด $f(x) = 4x - 5$ ให้หา $f(1)$, $f(-2)$, $f(x-2)$ และ $f(x^2 + 2x - 3)$

จากตัวอย่างที่ 20 ค่าของฟังก์ชันเมื่อ x เป็นค่าคงตัวใด ๆ จะได้ค่าของฟังก์ชันเป็นค่าคงตัว และเมื่อ x เป็นจำนวนในรูปพหุนาม จะได้ค่าของฟังก์ชันเป็นจำนวนในรูปพหุนามเช่นกัน ซึ่งเลขชี้กำลังของพหุนามจะสัมพันธ์กับเลขชี้กำลังของฟังก์ชันเดิม ซึ่งสามารถนำความรู้ไปใช้เพื่อหา $y = f(x)$ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 21

กำหนด $f(x - 5) = x + 7$ ให้หา $f(x)$

วิธีทำ วิธีที่ 1 จาก $f(x - 5) = x + 7$ หมายความว่า เมื่อสมาชิกตัวหน้าเท่ากับ $x - 5$ จะได้สมาชิกตัวหลังเท่ากับ $x + 7$ แสดงว่า เมื่อแทน x ด้วย $x - 5$ ค่าของฟังก์ชันเท่ากับ $x + 7$ ซึ่ง $x - 5$ และ $x + 7$ เป็นพหุนามดีกรี 1 มี 2 พจน์ ดังนั้น $f(x)$ ที่ต้องการจะต้องเป็นพหุนามดีกรี 1 และมี 2 พจน์

ให้ $f(x) = ax + b$ และแทน x ด้วย $x - 5$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad f(x - 5) &= a(x - 5) + b \\ x + 7 &= ax - 5a + b \\ x + 7 &= ax + (b - 5a) \end{aligned}$$

$$x - ax + 7 - (b - 5a) = 0$$

$$(1 - a)x + [7 - (b - 5a)] = 0$$

จากการเท่ากันของสมการ

$$\text{จะได้ } 1 - a = 0 \text{ และ } 7 - (b - 5a) = 0$$

$$\text{ดังนั้น } a = 1$$

$$\text{และ } b - 5a = 7$$

$$b - 5(1) = 7$$

$$b = 12$$

$$\text{ดังนั้น } f(x) = x + 12$$

วิธีที่ 2 สามารถจัดรูป $x + 7$ ให้อยู่ในรูป $x - 5$ ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{จาก } f(x - 5) &= x + 7 \\ &= (x - 5) + 5 + 7 \\ &= (x - 5) + 12 \end{aligned}$$

$$\text{แสดงว่า } f(x - 5) = (x - 5) + 12$$

$$\text{ดังนั้น } f(x) = x + 12$$

วิธีที่ 3 หา $f(x)$ โดยใช้การเลื่อนขนานกราฟของ $f(x - 5) = x + 7$

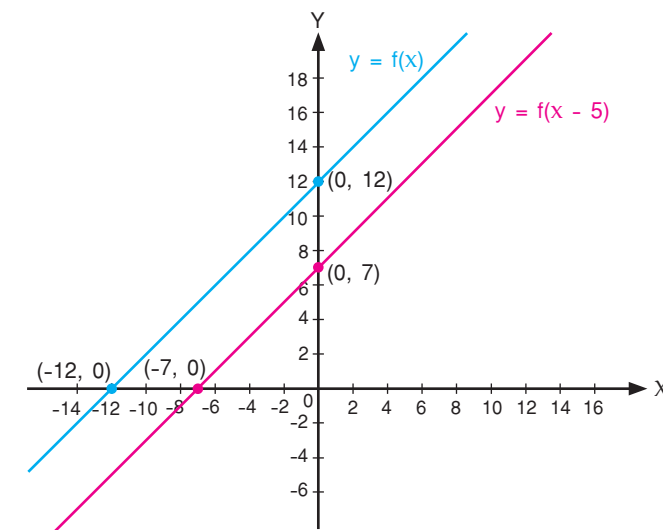
จาก $f(x - 5) = x + 7$ เป็นฟังก์ชันที่ได้จากการแทนที่ x ด้วย $x - 5$ และจากการเขียนกราฟโดยใช้การเลื่อนกราฟ $y = f(x)$ ไปทางขวาตามแนวแกน X เป็นระยะ k หน่วย เมื่อ $k > 0$

มีรูปทั่วไป คือ $y = f(x)$

$$\text{ให้ } f(x - 5) = y$$

$$\text{จะได้ } y = x + 7$$

ซึ่งจะเป็นกราฟเส้นตรง ที่เกิดจากการเลื่อนกราฟเส้นตรง $y = f(x)$ ไปทางขวาตามแนวแกน X เป็นระยะ 5 หน่วย ดังนั้น เมื่อนำกราฟ $y = x + 7$ เลื่อนไปทางซ้ายตามแนวแกน X เป็นระยะ 5 หน่วย จะได้กราฟเส้นตรง $y = f(x)$ นั่นคือ การหา $f(x)$ ซึ่งกำหนด $f(x - 5) = x + 7$ อาศัยการเลื่อนกราฟในแนวนอน ที่เป็นการย้อนกลับทิศทาง



กราฟเส้นตรงมีรูปทั่วไป คือ $f(x) = ax + b$ หาค่า a และ b โดยเลือกคู่อันดับสองคูบนเส้นตรง $y = f(x)$ ในที่นี้เลือกคู่อันดับ $(-12, 0)$ และ $(0, 12)$ แทนค่าใน $f(x) = ax + b$

เลือกคู่อันดับ $(-12, 0)$ แทนค่าใน $f(x) = ax + b$

$$\text{จะได้ } -12a + b = 0 \quad \text{.....①}$$

และคู่อันดับ $(0, 12)$ แทนค่าใน $f(x) = ax + b$

$$\text{จะได้ } b = 12 \quad \text{.....②}$$

จาก ① และ ② จะได้ $a = 1$ และ $b = 12$

$$\text{ดังนั้น } f(x) = x + 12$$

ลองทำ

กำหนด $f(x - 3) = x + 8$ ให้หา $f(x)$

ตัวอย่างที่ 22

กำหนด $f(3x - 1) = 18x^2 - 15x + 4$ ให้หา $f(x)$

วิธีทำ เนื่องจากแทน x ด้วยพหุนามกำลังหนึ่ง คือ $3x - 1$ แล้วทำให้ได้ค่าของฟังก์ชันเป็นพหุนามกำลังสองมี 3 พจน์ แสดงว่า $f(x)$ ต้องเป็นพหุนามกำลังสองมี 3 พจน์ด้วย

วิธีที่ 1 ให้ $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$f(3x - 1) = a(3x - 1)^2 + b(3x - 1) + c$$

$$18x^2 - 15x + 4 = 9ax^2 - 6ax + a + 3bx - b + c$$

$$18x^2 - 15x + 4 = 9ax^2 - (6ax - 3bx) + (a - b + c)$$

$$18x^2 - 15x + 4 = 9ax^2 - 3x(2a - b) + (a - b + c)$$

$$(18 - 9a)x^2 - (15 + 3b - 6a)x + (4 - a + b - c) = 0$$

จากการเท่ากันของสมการ จะได้ว่า

$$18 - 9a = 0 \quad \text{ดังนั้น} \quad a = 2$$

$$15 + 3b - 6a = 0 \quad \text{ดังนั้น} \quad b = -1$$

$$4 - a + b - c = 0 \quad \text{ดังนั้น} \quad c = 1$$

$$\text{ดังนั้น} \quad f(x) = 2x^2 - x + 1$$

วิธีที่ 2 สามารถจัดรูป $18x^2 - 15x + 4$ ให้อยู่ในรูปของ $3x - 1$ ได้ ดังนี้

เนื่องจาก $18x^2 - 15x + 4$ เป็นพหุนามกำลังสอง

$$\text{และ} \quad (3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$$

$$\text{จาก} \quad f(3x - 1) = 18x^2 - 15x + 4$$

$$\text{จะได้} \quad f(3x - 1) = (9x^2 - 6x + 1) + (9x^2 - 6x + 1) - 3x + 2$$

$$= (3x - 1)^2 + (3x - 1)^2 - (3x - 2)$$

$$= 2(3x - 1)^2 - (3x - 1) + 1$$

$$\text{แสดงว่า} \quad f(3x - 1) = 2(3x - 1)^2 - (3x - 1) + 1$$

$$\text{ดังนั้น} \quad f(x) = 2x^2 - x + 1$$

วิธีที่ 3 จาก $f(3x - 1) = 18x^2 - 15x + 4$

$$\text{ให้} \quad 3x - 1 = a$$

$$\text{จะได้} \quad x = \frac{a + 1}{3}$$

ดังนั้น

$$f(a) = 18\left(\frac{a + 1}{3}\right)^2 - 15\left(\frac{a + 1}{3}\right) + 4$$

$$= 2(a^2 + 2a + 1) - 5(a + 1) + 4$$

$$= 2a^2 + 4a + 2 - 5a - 5 + 4$$

$$= 2a^2 - a + 1$$

นั่นคือ

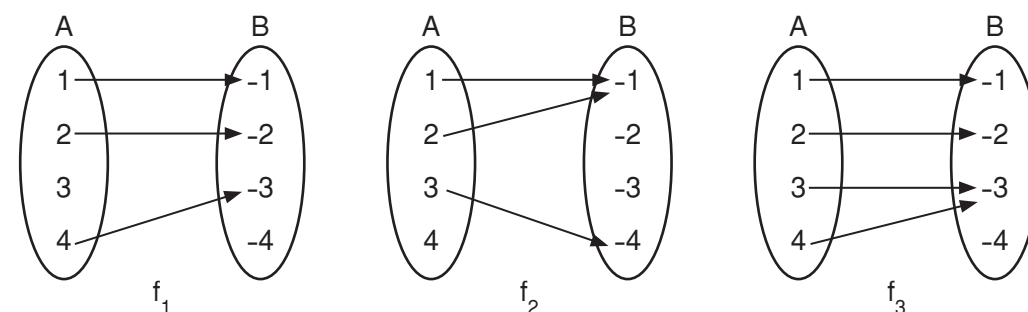
$$f(x) = 2x^2 - x + 1$$

ลองทำ

กำหนด $f(2x + 1) = 16x^2 + 10x - 3$ ให้หา $f(x)$

3. ฟังก์ชันจากเซตหนึ่งไปอีกเซตหนึ่ง

กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{-1, -2, -3, -4\}$ พิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดด้วยแผนภาพต่อไปนี้



จากแผนภาพทั้งสาม จะเห็นว่า

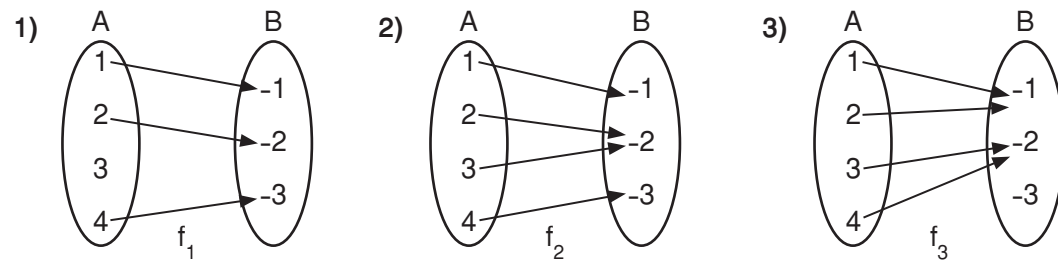
- f_1 และ f_2 เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นสับเซตของเซต A และมีเรนจ์เป็นสับเซตของเซต B
- f_3 เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมน คือ เซต A และมีเรนจ์เป็นสับเซตของเซต B

เรียก f_3 ว่า ฟังก์ชันจาก A ไป B (Function from A into B) ซึ่งได้มีการกำหนดบทนิยามของฟังก์ชันจาก A ไป B ดังนี้

บทนิยาม f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีเซต A เป็นโดเมนและมีเรนจ์เป็นสับเซตของเซต B ซึ่งเขียนแทนด้วย $f: A \rightarrow B$

ตัวอย่างที่ 23

กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-1, -2, -3\}$ และ f_1 , f_2 และ f_3 ดังแผนภาพ

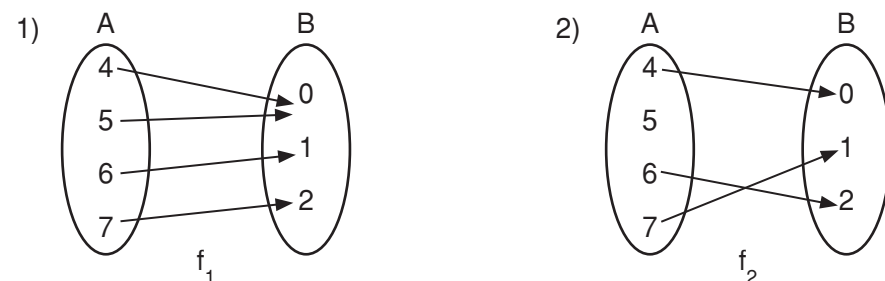


ให้พิจารณาว่าแผนภาพใดเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

- วิธีทำ 1) จากแผนภาพ จะเห็นว่า โดเมนของ f_1 เป็นสับเซตของเซต A ดังนั้น f_1 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B แต่เป็นฟังก์ชัน จาก $\{1, 2, 4\}$ ไป B
- 2) จากแผนภาพ จะเห็นว่า โดเมนของ f_2 เท่ากับเซต A และเรนจ์ของ f_2 เท่ากับเซต B ดังนั้น f_2 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B
- 3) จากแผนภาพ จะเห็นว่า โดเมนของ f_3 เท่ากับเซต A และเรนจ์ของ f_3 เป็นสับเซตของเซต B ดังนั้น f_3 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

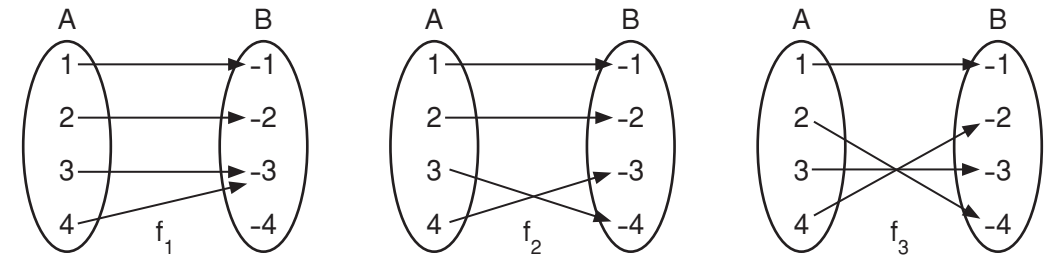
ลองทำ

กำหนด $A = \{4, 5, 6, 7\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ และ f_1 , f_2 ดังแผนภาพ



ให้พิจารณาว่าแผนภาพใดเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{-1, -2, -3, -4\}$ พิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดด้วยแผนภาพต่อไปนี้



จากแผนภาพ จะเห็นว่า

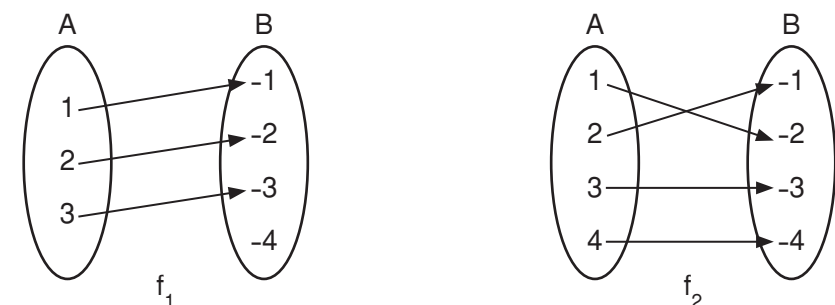
- f_1 เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมน คือ เซต A และมีเรนจ์เป็นสับเซตของเซต B
- f_2 และ f_3 เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมน คือ เซต A และมีเรนจ์ คือ เซต B

จะเห็นว่า f_1 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และเรียก f_2 และ f_3 ว่า ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

(Function from A onto B) ซึ่งได้มีการกำหนดบทนิยามของฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ดังนี้

บทนิยาม f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีเซต A เป็นโดเมนและมีเซต B เป็นเรนจ์ ซึ่งเขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} B$

พิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดด้วยแผนภาพต่อไปนี้



จากแผนภาพ จะเห็นว่า f_1 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ f_2 เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B แต่ f_1 และ f_2 เป็นการจับคู่สมาชิกตัวหน้าหนึ่งตัวกับสมาชิกตัวหลังหนึ่งตัว จึงเรียก f_1 และ f_2 ว่า ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B (One-to-One Function from A into B) ซึ่งได้มีการกำหนดบทนิยามของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ดังนี้

บทนิยาม f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B สำหรับ x_1, x_2 ใดๆ ในเซต A ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{1-1} B$

และเรียก f_2 ว่า เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B (One-to-One Function from A onto B) ซึ่งเขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{1-1} B$

ตัวอย่างที่ 24

ให้พิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดต่อไปนี้ ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

1) $f = \{(x, y) \mid y = x + 2\}$

2) $g = \{(x, y) \mid y = x^2\}$

3) $h = \{(x, y) \mid y = |x|\}$

วิธีทำ 1) จาก $f = \{(x, y) \mid y = x + 2\}$

พิจารณา $y = x + 2$ หรือ $f(x) = x + 2$

ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ จะได้ $x_1 + 2 = x_2 + 2$

ดังนั้น $x_1 = x_2$

นั่นคือ $f = \{(x, y) \mid y = x + 2\}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2) จาก $g = \{(x, y) \mid y = x^2\}$

พิจารณา $y = x^2$ หรือ $g(x) = x^2$

ถ้า $g(x_1) = g(x_2)$ จะได้ $x_1^2 = x_2^2$

ดังนั้น $x_1 = x_2$ หรือ $x_1 = -x_2$

จะเห็นว่า มีกรณีที่ $x_1 \neq x_2$ แต่ทำให้ $g(x_1) = g(x_2)$

นั่นคือ $g = \{(x, y) \mid y = x^2\}$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

3) จาก $h = \{(x, y) \mid y = |x|\}$

พิจารณา $y = |x|$ หรือ $h(x) = |x|$

ถ้า $h(x_1) = h(x_2)$ จะได้ $|x_1| = |x_2|$

ดังนั้น $x_1 = x_2$ หรือ $x_1 = -x_2$

จะเห็นว่า มีกรณีที่ $x_1 \neq x_2$ แต่ทำให้ $h(x_1) = h(x_2)$

นั่นคือ $h = \{(x, y) \mid y = |x|\}$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ลองทำ

ให้พิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดต่อไปนี้ ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

1) $f = \{(x, y) \mid y = x - 5\}$

2) $g = \{(x, y) \mid y = x^2 + 1\}$

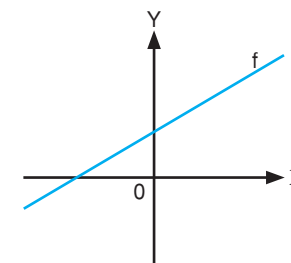
3) $h = \{(x, y) \mid y = |x| - 2\}$

ในการพิจารณาว่า ฟังก์ชันที่กำหนดด้วยกราฟ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะใช้ทฤษฎีบท “ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B สำหรับ x_1, x_2 ใดๆ ในเซต A ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$ ” ซึ่งแสดงว่า ค่าของ x หนึ่งค่า จะทำให้มีค่าของ $f(x)$ ได้เพียงหนึ่งค่า ดังนั้นการพิจารณาฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จึงลากเส้นตรงที่ขนานกับแกน X แล้วพิจารณาจำนวนจุดตัดที่เส้นตรงนี้ตัดกับเส้นกราฟ ถ้ามีจุดตัดเพียง 1 จุด ฟังก์ชันนั้นเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ถ้ามีจำนวนจุดตัดมากกว่า 1 จุด ฟังก์ชันนั้นไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังตัวอย่าง

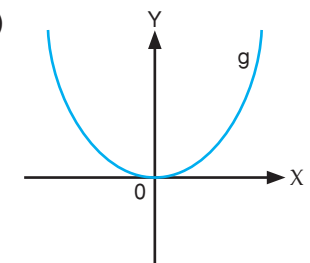
ตัวอย่างที่ 25

ให้พิจารณากราฟของฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้ว่า ฟังก์ชันข้อใดเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและฟังก์ชันข้อใดไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

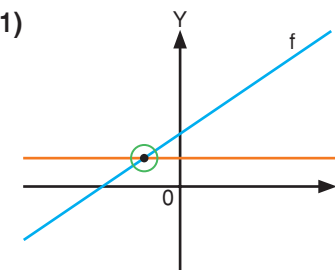
1)



2)

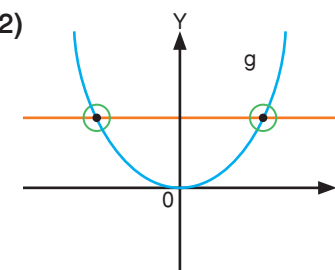


วิธีทำ 1)



เนื่องจากไม่มีเส้นตรงใดที่ลากขนานกับแกน X แล้วตัดเส้นกราฟมากกว่า 1 จุด
ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

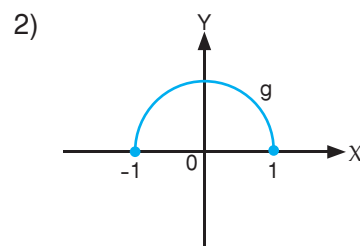
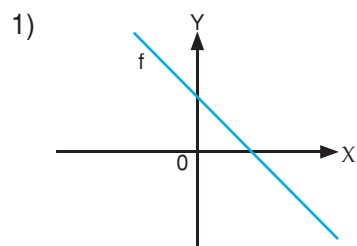
2)



เนื่องจากมีเส้นตรงที่ลากขนานกับแกน X แล้วตัดเส้นกราฟมากกว่า 1 จุด
ดังนั้น g ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ลองทำ

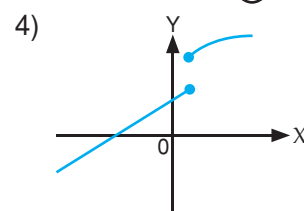
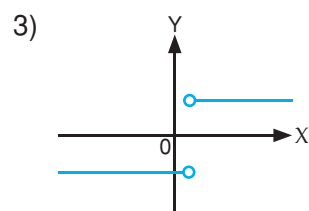
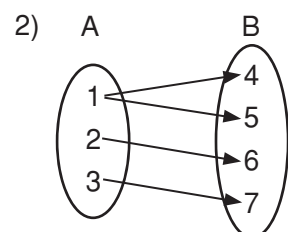
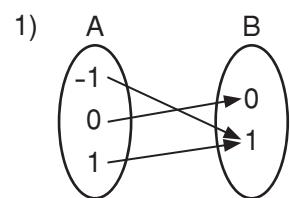
ให้พิจารณารูปของฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้ว่า ฟังก์ชันข้อใดเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และฟังก์ชันข้อใดไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง



แบบฝึกทักษะ 1.3ก

ระดับพื้นฐาน

1. ให้ตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดด้วยแผนภาพหรือกราฟในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชัน และถ้าเป็นฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่



2. ให้ตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชัน และถ้าเป็นฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ เพราะเหตุใด

- 1) $\{(a, 1), (b, 2), (c, 2), (d, 3)\}$ 2) $\{(m, -1), (n, -2), (r, -3), (s, -3)\}$

3. ให้เขียนกราฟของฟังก์ชันแต่ละฟังก์ชันต่อไปนี้บนระบบพิกัดฉากเดียวกัน โดยใช้เทคนิคการเลื่อนกราฟ

1) $y_1 = 2x$, $y_2 = 2x + 2$ และ $y_3 = 2x - 3$

2) $y_1 = -x^2$, $y_2 = -x^2 + 2$ และ $y_3 = -x^2 - 2$

ระดับกลาง

4. ให้เขียนกราฟและสมการของกราฟที่ได้ในขั้นสุดท้ายจากการเลื่อนขนานตามที่กำหนดต่อไปนี้ และเขียนฟังก์ชันที่ได้

1) $y = x^2$ เลื่อนกราฟขึ้นไปตามแนวตั้ง 2 หน่วย แล้วเลื่อนไปทางขวาอีก 4 หน่วย

2) $y = |x|$ เลื่อนกราฟไปทางซ้าย 2 หน่วย แล้วเลื่อนกราฟขึ้นไปตามแนวตั้งอีก 3 หน่วย

5. ให้ตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชัน และถ้าเป็นฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ เพราะเหตุใด

1) $r_1 = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x + 3\}$, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

2) $r_2 = \{(x, y) \mid y = 3 \text{ เมื่อ } x \leq 0 \text{ และ } y = -3 \text{ เมื่อ } x \geq 0\}$

3) $r_3 = \{(x, y) \mid y = 2x + 1\}$

4) $r_4 = \{(x, y) \mid y = x^2 + x\}$

5) $r_5 = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x + 3}\}$

6) $r_6 = \{(x, y) \mid y = |x - 1|\}$

6. กำหนด $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ให้ตรวจสอบว่า

1) $f(2 + 5)$ และ $f(2) + f(5)$ เท่ากันหรือไม่

2) $f(2 \times 5)$ และ $f(2) \times f(5)$ เท่ากันหรือไม่

7. กำหนด $f(x + 3) = x - 8$ ให้หา $f(-5)$, $f(x - 1)$, $f(2x + 5)$ และ $f(a)$

8. กำหนด $f(4x - 1) = x^2 + 3x$ ให้หา $f(7)$, $f(-5)$ และ $f(x)$

9. กำหนด $f(x) = x^2 - 1$ และโดเมนของ f คือ $\{x \mid -3 < x < 2\}$ ให้หาเรนจ์ของ f

10. กำหนด $g(x) = 4 - x^2$ และโดเมนของ g คือ $\{x \mid -5 < x < 3\}$ ให้หาเรนจ์ของ g

11. กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$

$f_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

$f_2 = \{(1, a), (2, c), (3, b)\}$

$f_3 = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$

$f_4 = \{(a, 3), (b, 2), (c, 2)\}$

$f_5 = \{(a, 1), (b, 3), (c, 2)\}$

$f_6 = \{(a, a), (b, b), (c, a)\}$

ให้พิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดฟังก์ชันใดเป็น

1) ฟังก์ชันจาก A ไป B

2) ฟังก์ชันจาก B ไป A

3) ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

4) ฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง A

5) ฟังก์ชันจาก B ไป B

6) ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง A

7) ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

8) ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B

4. ฟังก์ชันเพิ่ม (Increasing Function) และฟังก์ชันลด (Decreasing Function)

นักเรียนได้ศึกษาการหาค่าของฟังก์ชันมาแล้ว จะเห็นว่า เมื่อค่าของ x เปลี่ยนไป จะทำให้ค่าของฟังก์ชันบางฟังก์ชันเปลี่ยนแปลงได้ แต่บางฟังก์ชันค่าของฟังก์ชันไม่เปลี่ยนแปลง

เช่น

1) $f(x) = -7$ เมื่อค่าของ x เปลี่ยนไป จะทำให้ค่าของฟังก์ชันเท่ากับ -7 เสมอ

2) $f(x) = 2x + 3$ เมื่อค่าของ x เปลี่ยนไป จะทำให้ค่าของฟังก์ชันเปลี่ยนแปลง

เช่น $x = 1$ ทำให้ $f(1) = 5$ และ $x = 2$ ทำให้ $f(2) = 7$

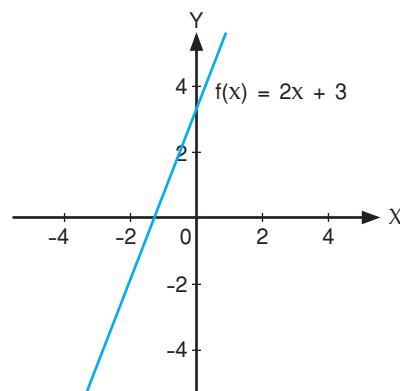
3) $f(x) = 2 - 3x$ เมื่อค่าของ x เปลี่ยนไป จะทำให้ค่าของฟังก์ชันเปลี่ยนแปลง

เช่น $x = 2$ ทำให้ $f(2) = -4$ และ $x = 4$ ทำให้ $f(4) = -10$

จากฟังก์ชันที่ยกตัวอย่าง จะเห็นว่า บางฟังก์ชันเมื่อค่าของ x เพิ่มขึ้น จะทำให้ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้นด้วย แต่บางฟังก์ชันเมื่อค่าของ x เพิ่มขึ้นกลับทำให้ค่าของฟังก์ชันลดลง

พิจารณาค่าของฟังก์ชันจากกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดต่อไปนี้

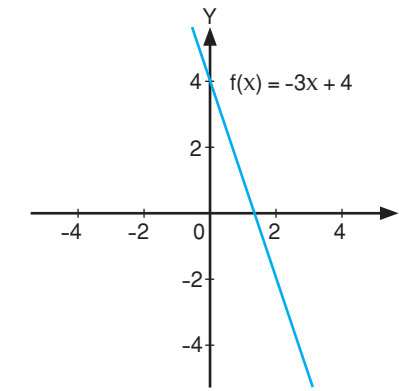
1)



รูปที่ 1

จากกราฟ จะเห็นว่า เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ และค่าของ x เพิ่มขึ้น จะทำให้ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้น และเมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ และค่าของ x ลดลง จะทำให้ค่าของฟังก์ชันลดลง หรือกล่าวได้ว่า เมื่อค่าของ x เพิ่มขึ้น จะทำให้ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้น และเมื่อค่าของ x ลดลง จะทำให้ค่าของฟังก์ชันลดลง เรียกฟังก์ชันลักษณะนี้ว่า **ฟังก์ชันเพิ่ม** เมื่อ $x \in \mathbf{R}$

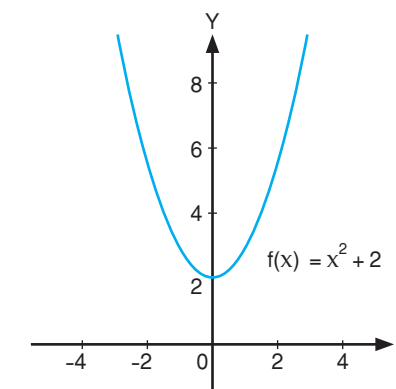
2)



รูปที่ 2

จากกราฟ จะเห็นว่า เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ และค่าของ x เพิ่มขึ้น จะทำให้ค่าของฟังก์ชันลดลง และเมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ และค่าของ x ลดลง จะทำให้ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้นหรือกล่าวได้ว่า เมื่อค่าของ x เพิ่มขึ้น จะทำให้ค่าของฟังก์ชันลดลง และเมื่อค่าของ x ลดลง จะทำให้ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้น เรียกฟังก์ชันลักษณะนี้ว่า **ฟังก์ชันลด** เมื่อ $x \in \mathbf{R}$

3)



รูปที่ 3

จากกราฟ จะเห็นว่า เมื่อ $x > 0$ และค่าของ x เพิ่มขึ้น จะทำให้ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้นด้วย หรือกล่าวได้ว่า เมื่อค่าของ x เพิ่มขึ้น จะทำให้ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้น เรียกว่า **เป็นฟังก์ชันเพิ่ม** เมื่อ $x > 0$ แต่เมื่อ $x < 0$ และค่าของ x ลดลง จะทำให้ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้น หรือกล่าวได้ว่า เมื่อค่าของ x ลดลง จะทำให้ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้น เรียกว่า **เป็นฟังก์ชันลด** เมื่อ $x < 0$

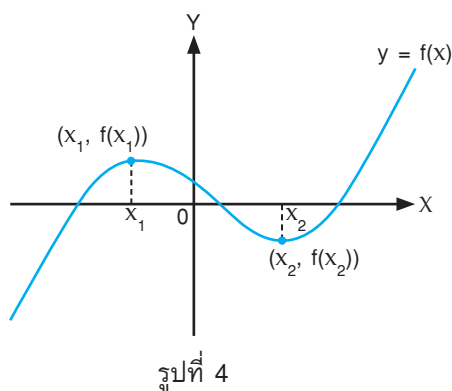
กล่าวโดยสรุปจากกราฟรูปที่ 1 ฟังก์ชัน $f(x) = 2x + 3$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เมื่อ $x \in \mathbf{R}$ กราฟรูปที่ 2 ฟังก์ชัน $f(x) = -3x + 4$ เป็นฟังก์ชันลด เมื่อ $x \in \mathbf{R}$ แต่กราฟรูปที่ 3 ฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 2$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เมื่อ $x > 0$ และเป็นฟังก์ชันลด เมื่อ $x < 0$ ซึ่งนักเรียนจะเห็นว่า บางฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดเพียงอย่างเดียวเท่านั้น แต่บางฟังก์ชันเป็นได้ทั้งฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด



ดังนั้น ฟังก์ชันที่กำหนดเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดต้องพิจารณาจากการเปลี่ยนแปลง
ค่าของ x และค่าของฟังก์ชันตามช่วงของโดเมน ดังนี้

1. เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เมื่อค่าของ x เพิ่มขึ้น จะทำให้ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้น หรือเมื่อค่าของ x ลดลง จะทำให้ค่าของฟังก์ชันลดลง
2. เป็นฟังก์ชันลด เมื่อค่าของ x เพิ่มขึ้น จะทำให้ค่าของฟังก์ชันลดลง หรือเมื่อค่าของ x ลดลง จะทำให้ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้น

พิจารณาฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดในกรณีทั่วไป



รูปที่ 4

จากกราฟ จะเห็นว่า เมื่อ $x < x_1$ และ $f(x) < f(x_1)$ กล่าวได้ว่าค่าของ x และค่าของฟังก์ชันมีความสัมพันธ์ในทิศทางเดียวกัน นั่นคือ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เมื่อ $x < x_1$

เมื่อค่าของ x เพิ่มขึ้นโดย $x_1 < x < x_2$ และ $f(x_1) > f(x_2)$ กล่าวได้ว่าค่าของ x และค่าของฟังก์ชันมีความสัมพันธ์ในทิศทางตรงข้ามกัน ดังนั้น $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันลด เมื่อ $x_1 < x < x_2$

และเมื่อ $x > x_2$ และ $f(x) > f(x_2)$ กล่าวได้ว่าค่าของ x และค่าของฟังก์ชันมีความสัมพันธ์ในทิศทางเดียวกัน ดังนั้น $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เมื่อ $x > x_2$

จากกราฟในรูปที่ 4 นักเรียนจะเห็นว่า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เมื่อ $x < x_1$ และ $x > x_2$ แต่เป็นฟังก์ชันลด เมื่อ $x_1 < x < x_2$ ซึ่งเป็นไปตามบทนิยามของฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด ดังนี้

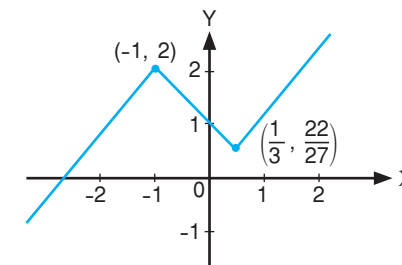
บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง และ A เป็นสับเซตของโดเมน

1. f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนเซต A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x_1 และ x_2 ใดๆ ใน A
ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$
2. f เป็นฟังก์ชันลดบนเซต A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x_1 และ x_2 ใดๆ ใน A
ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$

จากบทนิยาม เมื่อกล่าวถึงฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด ต้องกำหนดเซตหรือช่วงซึ่งเป็นสับเซต
ของโดเมน แต่ฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดเพียงอย่างเดียว (Monotone Function)
ทุกฟังก์ชัน $x \in \mathbb{R}$ ไม่นิยมกำหนดเซตหรือช่วง เช่น $f(x) = x + 5$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ $f(x) = 2 - x$
เป็นฟังก์ชันลด

ตัวอย่างที่ 26

กำหนดกราฟของฟังก์ชัน f ให้ระบุช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันลด

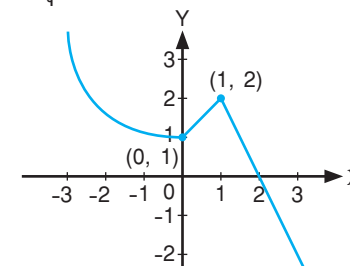


วิธีทำ จากกราฟ จะเห็นว่า เมื่อ $x < -1$ ถ้าค่าของ x เพิ่มขึ้น ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้น
เมื่อ $x > \frac{1}{3}$ ถ้าค่าของ x เพิ่มขึ้น ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้น และเมื่อ $-1 < x < \frac{1}{3}$
ถ้าค่าของ x เพิ่มขึ้น ค่าของฟังก์ชันลดลง

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เมื่อ $x \in (-\infty, -1)$ และ $x \in (\frac{1}{3}, \infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลด
เมื่อ $x \in (-1, \frac{1}{3})$

ลองทำดู

กำหนดกราฟของฟังก์ชัน f ให้ระบุช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันลด



ตัวอย่างที่ 27

ให้พิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนเซตที่กำหนด

- 1) $f(x) = 5 - 2x$ บน $\mathbb{R}$
- 2) $g(x) = x^3 + 1$ บน $\mathbb{R}$
- 3) $h(x) = x^2 - 6x + 13$ บนช่วง $(-\infty, 3)$ และ $(3, \infty)$
- 4) $s(x) = \frac{3}{x}$ บนช่วง $(-\infty, 0)$ และ $(0, \infty)$

วิธีทำ 1) จาก $f(x) = 5 - 2x$

กำหนด x_1, x_2 เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่ง $x_1 < x_2$

$$\text{จะได้ } -2x_1 > -2x_2$$

$$5 - 2x_1 > 5 - 2x_2$$

ดังนั้น $f(x_1) > f(x_2)$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันลดบน $\mathbf{R}$

2) จาก $g(x) = x^3 + 1$

กำหนด x_1, x_2 เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่ง $x_1 < x_2$

$$\text{จะได้ } x_1^3 < x_2^3$$

$$x_1^3 + 1 < x_2^3 + 1$$

ดังนั้น $g(x_1) < g(x_2)$ นั่นคือ g เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $\mathbf{R}$

3) จาก $h(x) = x^2 - 6x + 13$

$$\text{จะได้ } h(x) = x^2 - 6x + 9 + 4$$

$$h(x) = (x - 3)^2 + 4$$

กำหนด x_1, x_2 เป็นจำนวนจริงใดๆ บนช่วง $(-\infty, 3)$ ซึ่ง $x_1 < x_2 < 3$

แสดงว่า x_1 และ x_2 ต้องน้อยกว่า 3 ทำให้ $x_1 - 3$ และ $x_2 - 3$ เป็นจำนวนจริงลบ

$$\text{จะได้ } x_1 - 3 < x_2 - 3 < 3 - 3$$

$$x_1 - 3 < x_2 - 3 < 0$$

$$(x_1 - 3)^2 > (x_2 - 3)^2$$

$$(x_1 - 3)^2 + 4 > (x_2 - 3)^2 + 4$$

ดังนั้น $h(x_1) > h(x_2)$ นั่นคือ h เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty, 3)$

กำหนด x_1, x_2 เป็นจำนวนจริงใดๆ บนช่วง $(3, \infty)$ ซึ่ง $3 < x_1 < x_2$

แสดงว่า x_1 และ x_2 ต้องมากกว่า 3

$$\text{จะได้ } 3 - 3 < x_1 - 3 < x_2 - 3$$

$$0 < x_1 - 3 < x_2 - 3$$

$$(x_1 - 3)^2 < (x_2 - 3)^2$$

$$(x_1 - 3)^2 + 4 < (x_2 - 3)^2 + 4$$

ดังนั้น $h(x_1) < h(x_2)$ นั่นคือ h เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(3, \infty)$

4) จาก $s(x) = \frac{3}{x}$

กำหนด x_1, x_2 เป็นจำนวนจริงใดๆ บนช่วง $(-\infty, 0)$ ซึ่ง $x_1 < x_2 < 0$

แสดงว่า x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงลบ

$$\text{จะได้ } x_1 < x_2 < 0$$

$$3x_1 < 3x_2 < 0$$

$$\frac{3x_1}{x_1x_2} < \frac{3x_2}{x_1x_2} \quad \text{เมื่อ } x_1x_2 > 0$$

$$\frac{3}{x_2} < \frac{3}{x_1}$$

$$\frac{3}{x_1} > \frac{3}{x_2}$$

ดังนั้น $s(x_1) > s(x_2)$ นั่นคือ s เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty, 0)$

กำหนด x_1, x_2 เป็นจำนวนจริงใดๆ บนช่วง $(0, \infty)$ ซึ่ง $x_1 > x_2 > 0$

แสดงว่า x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงบวก

$$\text{จะได้ } x_1 > x_2 > 0$$

$$3x_1 > 3x_2 > 0$$

$$\frac{3x_1}{x_1x_2} > \frac{3x_2}{x_1x_2} \quad \text{เมื่อ } x_1x_2 > 0$$

$$\frac{3}{x_2} > \frac{3}{x_1}$$

$$\frac{3}{x_1} < \frac{3}{x_2}$$

ดังนั้น $s(x_1) < s(x_2)$ นั่นคือ s เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(0, \infty)$

ทำให้ได้ว่า s เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

ลองทำดู

ให้พิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนเซตที่กำหนด

1) $f(x) = 4 - 3x$ บน $\mathbf{R}$

2) $g(x) = \frac{1}{x}$ บนช่วง $(-\infty, 0)$ และ $(0, \infty)$

จากตัวอย่างที่ 27 ฟังก์ชัน s มี $D_s = \mathbf{R} - \{0\}$ แต่การพิจารณาฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดจะแยกพิจารณา 2 ช่วง คือ $(-\infty, 0)$ และ $(0, \infty)$ ซึ่งได้ผลสรุปว่า s เป็นฟังก์ชันลดทั้งสองช่วง แต่จะไม่สรุปว่า s เป็นฟังก์ชันลดในช่วง $\mathbf{R} - \{0\}$ ทั้งนี้เพราะว่ามีค่าของ x บางคู่เกิดข้อขัดแย้งกับบทนิยามฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด เช่น $x = -3$ และ 1 ซึ่ง $-3 < 1$ แต่ $s(-3) = \frac{3}{-3} = -1$ และ $s(1) = \frac{3}{1} = 3$ ซึ่ง $s(-3) < s(1)$ ซึ่งจะให้ผลสรุปว่า s เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

5. ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function)

ฟังก์ชันพหุนาม หมายถึง ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ซึ่ง $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ เป็นค่าคงตัว และ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ต่ำกว่าหรือเท่ากับศูนย์

พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

$$f(x) = 3x - 4$$

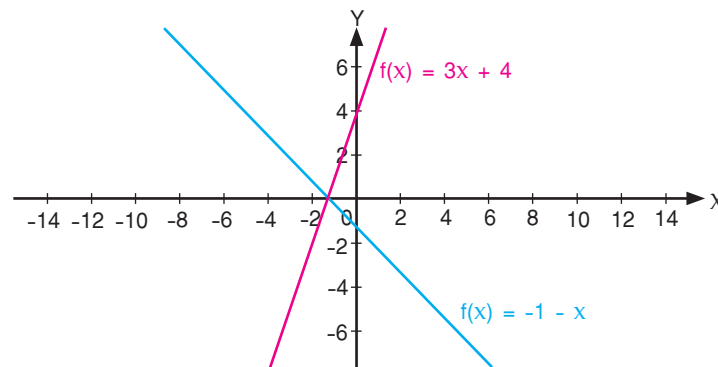
$$f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1$$

$$f(x) = 8$$

$$f(x) = x^4 + 1$$

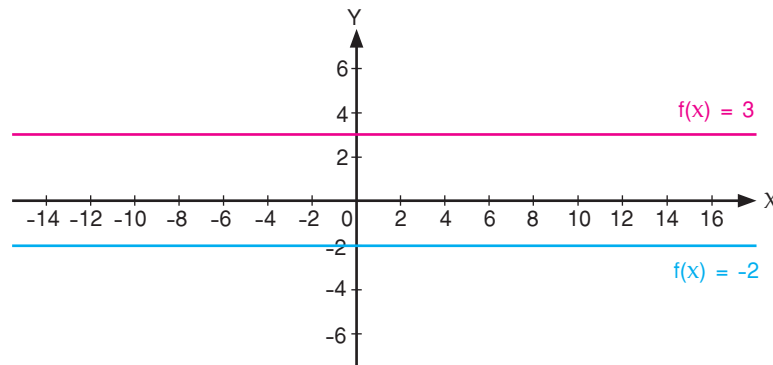
จะเห็นว่า ทุกฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันพหุนามที่เขียนในรูปการบวกเอกนามตั้งแต่สองเอกนามขึ้นไป ซึ่งมีเลขชี้กำลังของตัวแปรเป็นศูนย์หรือจำนวนเต็มบวก

1) ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Function)



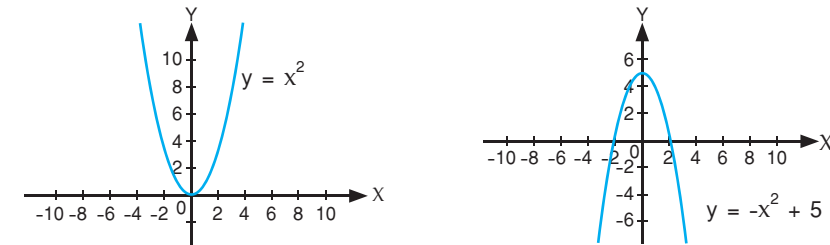
ฟังก์ชันเชิงเส้น หมายถึง ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n$ ซึ่งในระดับชั้นนี้จะพิจารณาฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูป $f(x) = ax + b$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$ ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง ดังรูป

ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax + b$ เมื่อ $a = 0$ จะได้ $f(x) = b$ เรียกฟังก์ชันนี้ว่า ฟังก์ชันคงตัว (Constant Function) ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน X ดังรูป



2) ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic Function)

ฟังก์ชันกำลังสอง หมายถึง ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$ ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นโค้งเปิดขึ้นด้านบนและเปิดลงด้านล่าง ดังรูป

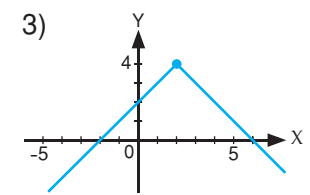
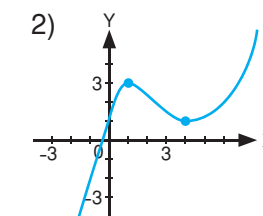
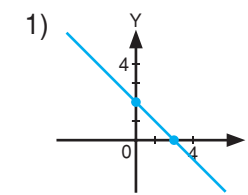


จากกราฟ จะเห็นว่า เมื่อ $a > 0$ กราฟของฟังก์ชันกำลังสองจะเป็นเส้นโค้งเปิดขึ้นด้านบน และเมื่อ $a < 0$ กราฟของฟังก์ชันกำลังสองจะเป็นเส้นโค้งเปิดลงด้านล่าง

แบบฝึกทักษะ 1.3 ข

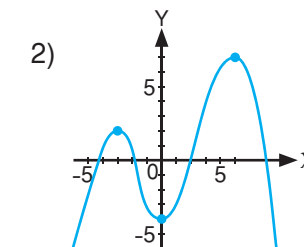
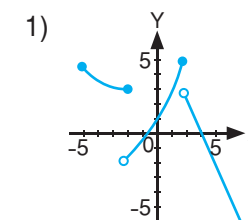
ระดับพื้นฐาน ★

1. จากกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดในแต่ละข้อ ให้หาค่าของ x ที่ทำให้เป็นฟังก์ชันเพิ่มและหาค่าของ x ที่ทำให้เป็นฟังก์ชันลด



ระดับกลาง ★★

2. จากกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดในแต่ละข้อ ให้หาค่าของ x ที่ทำให้เป็นฟังก์ชันเพิ่มและหาค่าของ x ที่ทำให้เป็นฟังก์ชันลด



3. ให้พิจารณาว่าฟังก์ชันในแต่ละข้อ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนเซตที่กำหนด

1) $f(x) = 4x + 1$ บนช่วง $(-\infty, 0)$

2) $f(x) = x^2 + 4x + 5$ บนช่วง $(-\infty, -2)$

3) $f(x) = |x - 7|$ บนช่วง $(8, 15)$

4) $f(x) = \frac{1}{x}$ บนช่วง $(-\infty, 0)$

1.4 ฟังก์ชันผกผัน (Inverse Function)

นักเรียนได้ศึกษาการหาตัวผกผันของความสัมพันธ์ และทราบแล้วว่าฟังก์ชันเป็นสับเซตของความสัมพันธ์ ดังนั้น การหาฟังก์ชันผกผันใช้วิธีการเดียวกับการหาตัวผกผันของความสัมพันธ์

พิจารณาฟังก์ชันและตัวผกผันของฟังก์ชัน f และ g ที่กำหนด

$$f = \{(1, 5), (3, 9), (6, 4)\}$$

ตัวผกผันของฟังก์ชัน f คือ $\{(5, 1), (9, 3), (4, 6)\}$

$$g = \{(1, 5), (2, 4), (3, 4)\}$$

ตัวผกผันของฟังก์ชัน g คือ $\{(5, 1), (4, 2), (4, 3)\}$

จะเห็นว่า ตัวผกผันของฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชัน แต่ตัวผกผันของฟังก์ชัน g ไม่เป็นฟังก์ชัน

บทนิยาม ตัวผกผันของฟังก์ชัน f คือ ความสัมพันธ์ที่เกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังแต่ละคู่อันดับ ตัวผกผันของฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชัน เรียกว่า **ฟังก์ชันผกผัน**

ฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันผกผันต้องเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ทฤษฎีบท 1 กำหนด f เป็นฟังก์ชัน
 f มีฟังก์ชันผกผัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จากทฤษฎีบท 1 ฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันผกผัน f เขียนแทนด้วย f^{-1} เมื่อใช้รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกันของ $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ จะได้ว่า ถ้า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน แล้ว f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

การตรวจสอบว่าตัวผกผันของฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชัน มี 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1 ใช้ทฤษฎีบทของฟังก์ชัน

$$\text{ให้ } (x, y) \in f^{-1} \text{ และ } (x, z) \in f^{-1}$$

แล้วแสดงให้เห็นว่า $y = z$

วิธีที่ 2 ใช้ทฤษฎีบท 1 โดยแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

$$\text{ให้ } x_1 \text{ และ } x_2 \text{ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่งทำให้ } f(x_1) = f(x_2)$$

แล้วแสดงให้เห็นว่า $x_1 = x_2$

ตัวอย่างที่ 28

กำหนดฟังก์ชัน $f = \{(x, y) \mid y = 2x + 1\}$ ให้ตรวจสอบว่า f^{-1} เป็นตัวผกผันของฟังก์ชันหรือเป็นฟังก์ชันผกผัน

วิธีทำ วิธีที่ 1 ใช้ทฤษฎีบทของฟังก์ชัน

$$\text{จากฟังก์ชัน } f = \{(x, y) \mid y = 2x + 1\}$$

$$\text{จะได้ } f^{-1} = \{(x, y) \mid x = 2y + 1\} \text{ หรือ } f^{-1} = \{(x, y) \mid y = \frac{x-1}{2}\}$$

ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $(x, y) \in f^{-1}$ และ $(x, z) \in f^{-1}$

$$\text{จะได้ } y = \frac{x-1}{2} \text{ และ } z = \frac{x-1}{2}$$

ดังนั้น $y = z$ เสมอ

นั่นคือ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน หรือกล่าวว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันผกผันของ f

วิธีที่ 2 ใช้ทฤษฎีบท 1

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่งทำให้ $f(x_1) = f(x_2)$

$$\text{จาก } f(x) = 2x + 1$$

$$\text{จะได้ } 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$$

$$x_1 = x_2$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และโดยทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

ลองทำดู

กำหนดฟังก์ชัน $f = \{(x, y) \mid y = 3x + 1\}$ ให้ตรวจสอบว่า f^{-1} เป็นตัวผกผันของฟังก์ชันหรือเป็นฟังก์ชันผกผัน

การหาฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันที่เขียนในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้วทำให้ตัวผกผันของ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งแทนด้วย $y = f^{-1}(x)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งด้วย

$$\text{ดังนั้น } D_{f^{-1}} = R_f \text{ และ } R_{f^{-1}} = D_f$$

$$\text{และ } (x, y) \in f \text{ ก็ต่อเมื่อ } (y, x) \in f^{-1}$$

$$\text{นั่นคือ } y = f(x) \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = f^{-1}(y)$$

ซึ่งมีความหมายเหมือนกับการสลับที่ของ x และ y แล้วจัด y ในรูปของ x จะได้ฟังก์ชันผกผัน ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 29

กำหนด $f(x) = 3x + 4$ ให้หา $f^{-1}(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 3x + 4$ หรือ $y = 3x + 4$ เป็นฟังก์ชัน 1-1

ดังนั้น $f^{-1}(x)$ เป็นฟังก์ชัน

หา $f^{-1}(x)$ โดยสลับที่ระหว่าง x กับ y จะได้ $x = 3y + 4$

เขียนสมการในรูป $y = f^{-1}(x)$

จะได้ $3y = x - 4$

$$y = \frac{x - 4}{3}$$

ดังนั้น $f^{-1}(x) = \frac{x - 4}{3}$

ลองทำ

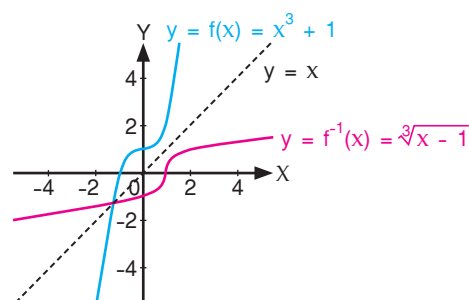
กำหนด $f(x) = \frac{3x}{2} + 1$ ให้หา $f^{-1}(x)$

นักเรียนทราบมาแล้วว่าฟังก์ชันเป็นสลับเซตของความสัมพันธ์ และกราฟของความสัมพันธ์กับกราฟของตัวผกผันของความสัมพันธ์สมมาตรกันโดยมีเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตรในทำนองเดียวกัน กราฟของฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชันผกผัน จะมีเส้น $y = x$ เป็นแกนสมมาตร ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 30

กำหนด $f(x) = x^3 + 1$ ให้เขียนกราฟของฟังก์ชัน f และตัวผกผันของฟังก์ชัน f บนระบบพิกัดฉากเดียวกัน และแสดงให้เห็นว่าตัวผกผันของฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชัน

วิธีทำ



จากกราฟ จะเห็นว่า กราฟของ f และ f^{-1} สมมาตรกัน โดยมีเส้นตรง $y = x$ เป็น

แกนสมมาตร

ซึ่งกล่าวได้ว่า กราฟของ f^{-1} เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนกราฟของ f โดยมีเส้นตรง $y = x$ เป็นเส้นสะท้อน

ต้องแสดงให้เห็นว่า $f(x) = x^3 + 1$ เป็นฟังก์ชัน 1-1

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่งทำให้ $f(x_1) = f(x_2)$

$$\text{จะได้ } x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1$$

$$x_1^3 = x_2^3$$

$$x_1 = x_2$$

สรุปได้ว่า $f(x) = x^3 + 1$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 จึงมีฟังก์ชันผกผัน

หา $f^{-1}(x)$ จาก $f(x) = x^3 + 1$ หรือ $y = x^3 + 1$

สลับที่ระหว่าง x กับ y จะได้

$$x = y^3 + 1$$

$$y^3 = x - 1$$

$$y = \sqrt[3]{x - 1}$$

ดังนั้น $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

ตัวอย่างที่ 30

กำหนด $f(x) = x^2$ ให้เขียนกราฟของฟังก์ชัน f และตัวผกผันของฟังก์ชัน f บนระบบพิกัดฉากเดียวกัน และให้พิจารณาว่า ตัวผกผันของฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ หา $f^{-1}(x)$ จาก $f(x) = x^2$ หรือ $y = x^2$

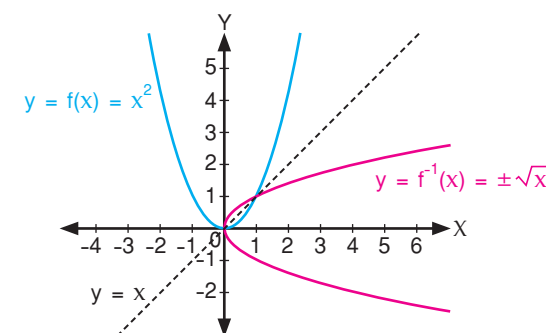
สลับที่ระหว่าง x กับ y จะได้

$$x = y^2$$

$$y = \sqrt{x} \text{ หรือ } -\sqrt{x}$$

ดังนั้น $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ หรือ $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

เขียนกราฟของ f และ f^{-1} โดยมีเส้นตรง $y = x$ เป็นเส้นสะท้อนได้ ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า ถ้าลากเส้นตรงขนานกับแกน Y จะตัดกราฟของ f^{-1} ได้มากกว่า 1 จุด

ดังนั้น ตัวผกผันของฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชัน

ลองทำ

กำหนด $f(x) = x^3 + 2$ ให้เขียนกราฟของฟังก์ชัน f และตัวผกผันของฟังก์ชัน f บนระบบพิกัดฉากเดียวกัน และแสดงให้เห็นว่าตัวผกผันของฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชัน

แบบฝึกทักษะ 1.4

ระดับพื้นฐาน ★

1. ให้หา f^{-1} พร้อมทั้ง $D_{f^{-1}}$ และ $R_{f^{-1}}$
 1) $f = \{(1, 3), (2, 0), (3, 2), (6, 5), (8, 1)\}$ 2) $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 6), (5, 3)\}$

2. ให้หา $f^{-1}(x)$ พร้อมทั้ง $D_{f^{-1}}$ และ $R_{f^{-1}}$
 1) $f(x) = 3x + 2$ 2) $f(x) = \frac{1}{x-3}$
 3) $f(x) = \sqrt{x-3}$ 4) $f(x) = x^2 - 1, x \geq 0$

3. กำหนด $f(x) = 2x - 5$ ให้หา $f^{-1}(x)$

4. กำหนด $f(x) = \sqrt{x^3}$ ให้หา $f^{-1}(x)$

5. ให้เขียนกราฟของ f และตัวผกผันของ f เมื่อกำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้

- 1) $f(x) = 2x + 5$ 2) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$
 3) $f(x) = x^2, x \geq 0$ 4) $f(x) = |x| - 1$

6. กำหนด $f(x) = x^2 - 9$ ให้ตรวจสอบว่า f มีฟังก์ชันผกผันหรือไม่

ระดับกลาง ★★

7. กำหนด $f(2x - 1) = 3x + 2$ ให้หา $f(x)$ และ $f^{-1}(x)$

8. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{เมื่อ } 2 < x < 10 \\ 2x - 10 & \text{เมื่อ } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ และ $f^{-1}(x)$ เป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชัน $f(x)$

ให้หา $f^{-1}(x)$

ระดับท้าทาย ★★★

9. กำหนด $f(x) = x + 2$ และ $g(x) = 3x + 1$ ให้หา $f^{-1}(x)$ และ $g^{-1}(x)$

10. กำหนด $f^{-1}(3x - 2) = x - 1$ ให้หา $f(x)$

1.5 การดำเนินการของฟังก์ชัน (Function Operation)

นักเรียนทราบมาแล้วว่า การบวก การลบ การคูณ และการหาร เป็นการดำเนินการเบื้องต้นของจำนวนสองจำนวน และฟังก์ชันเป็นเซตของคู่อันดับของจำนวนจริง ดังนั้น นักเรียนสามารถนำฟังก์ชันตั้งแต่สองฟังก์ชันขึ้นไปมา บวก ลบ คูณ และหารกัน โดยเรียกฟังก์ชันที่ได้จากการดำเนินการนี้ว่า พีชคณิตของฟังก์ชัน (Algebra of Function) ซึ่งมีบทนิยาม ดังนี้

บทนิยาม กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง ผลบวก (sum) ผลต่าง (difference) ผลคูณ (product) และผลหาร (quotient) ของฟังก์ชันกำหนดโดย

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) & \text{เมื่อ } x \in D_f \cap D_g \\ (f - g)(x) &= f(x) - g(x) & \text{เมื่อ } x \in D_f \cap D_g \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) & \text{เมื่อ } x \in D_f \cap D_g \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} & \text{เมื่อ } x \in D_f \cap D_g \text{ และ } g(x) \neq 0 \end{aligned}$$

จากบทนิยาม นักเรียนจะเห็นว่า

1. โดเมนของ $f + g, f - g$ และ $f \cdot g$ คือ อินเตอร์เซกชันของโดเมนของฟังก์ชันทั้งสอง
2. โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ อินเตอร์เซกชันของโดเมนของฟังก์ชันทั้งสอง โดยที่ฟังก์ชัน $g(x) \neq 0$

ตัวอย่างที่ 32

กำหนด $f = \{(1, 6), (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 3)\}$

และ $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 0), (8, 2), (6, 4)\}$

ให้หา $f + g, (f + g)(1), f - g, (f - g)(2), f \cdot g, (f \cdot g)(3), \frac{f}{g}$ และ $\left(\frac{f}{g}\right)(1)$

วิธีทำ จาก $f = \{(1, 6), (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 3)\}$

$g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 0), (8, 2), (6, 4)\}$

จะได้ $D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $D_g = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

โดเมนของ $f + g, f - g$ และ $f \cdot g$ คือ $D_f \cap D_g = \{1, 2, 3, 4\}$

จะได้ $f + g = \{(1, 6 + 2), (2, 9 + 3), (3, 8 + 5), (4, 7 + 0)\}$
 $= \{(1, 8), (2, 12), (3, 13), (4, 7)\}$

และ $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 6 + 2 = 8$

จะได้ $f - g = \{(1, 6 - 2), (2, 9 - 3), (3, 8 - 5), (4, 7 - 0)\}$
 $= \{(1, 4), (2, 6), (3, 3), (4, 7)\}$

$$\text{และ } (f - g)(2) = f(2) - g(2) = 9 - 3 = 6$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } f \cdot g &= \{(1, 6 \times 2), (2, 9 \times 3), (3, 8 \times 5), (4, 7 \times 0)\} \\ &= \{(1, 12), (2, 27), (3, 40), (4, 0)\}\end{aligned}$$

$$\text{และ } (f \cdot g)(3) = f(3) \cdot g(3) = 8 \times 5 = 40$$

$$\text{โดเมนของ } \frac{f}{g} \text{ คือ } \{x \mid x \in D_f \cap D_g \text{ และ } g(x) \neq 0\}$$

$$\text{เนื่องจาก } g(x) = 0 \text{ เมื่อ } x = 4$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap D_g - \{4\} \\ &= \{1, 2, 3, 4\} - \{4\} = \{1, 2, 3\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } \frac{f}{g} &= \left\{ \left(1, \frac{6}{2}\right), \left(2, \frac{9}{3}\right), \left(3, \frac{8}{5}\right) \right\} \\ &= \left\{ (1, 3), (2, 3), \left(3, \frac{8}{5}\right) \right\}\end{aligned}$$

$$\text{และ } \left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

ลองทำดู

$$\text{กำหนด } f = \{(0, 1), (1, -1), (2, 0), (3, 2), (4, -2), (5, 1), (6, -4)\}$$

$$\text{และ } g = \{(0, 3), (2, 1), (4, 5), (6, 8), (7, -3), (8, 2)\}$$

$$\text{ให้หา } f + g, (f + g)(1), f - g, (f - g)(2), f \cdot g, (f \cdot g)(3), \frac{f}{g} \text{ และ } \left(\frac{f}{g}\right)(1)$$

ตัวอย่างที่ 33

$$\text{กำหนด } f = \{(x, y) \mid y = 3x + 1\}$$

$$\text{และ } g = \{(x, y) \mid y = x + 2\}$$

$$1) \text{ ให้หา } (f + g)(x), (f - g)(x), (f \cdot g)(x) \text{ และ } \left(\frac{f}{g}\right)(x) \text{ พร้อมทั้งหาโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน}$$

$$2) \text{ ให้หา } (f + g)(1), (f - g)(2), (f \cdot g)(3) \text{ และ } \left(\frac{f}{g}\right)(3)$$

$$\text{วิธีทำ } 1) \text{ จาก } f = \{(x, y) \mid y = 3x + 1\}$$

$$\text{และ } g = \{(x, y) \mid y = x + 2\}$$

$$\text{โดเมนของ } f \text{ คือ } \mathbb{R} \text{ และโดเมนของ } g \text{ คือ } \mathbb{R}$$

$$\text{โดเมนของ } f + g, f - g \text{ และ } f \cdot g \text{ คือ } D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$\text{โดเมนของ } \frac{f}{g} \text{ คือ } \{x \mid x \in D_f \cap D_g \text{ และ } g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (3x + 1) + (x + 2) = 4x + 3, x \in \mathbb{R}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (3x + 1) - (x + 2) = 2x - 1, x \in \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (3x + 1)(x + 2) = 3x^2 + 7x + 2, x \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x + 1}{x + 2} \text{ เมื่อ } x \neq -2$$

$$2) (f + g)(1) = 4(1) + 3 = 7$$

$$(f - g)(2) = 2(2) - 1 = 3$$

$$(f \cdot g)(3) = 3(3^2) + 7(3) + 2 = 50$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{3(3) + 1}{3 + 2} = 2$$

ลองทำดู

$$\text{กำหนด } f = \{(x, y) \mid y = 2x + 1\}$$

$$\text{และ } g = \{(x, y) \mid y = x + 3\}$$

$$1) \text{ ให้หา } (f + g)(x), (f - g)(x), (f \cdot g)(x) \text{ และ } \left(\frac{f}{g}\right)(x) \text{ พร้อมทั้งหาโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน}$$

$$2) \text{ ให้หา } (f + g)(1), (f - g)(2), (f \cdot g)(0) \text{ และ } \left(\frac{f}{g}\right)(-2)$$

ตัวอย่างที่ 34

$$\text{กำหนด } f = \{(x, y) \mid y = x + 2 \text{ และ } x \in [-1, 3]\}$$

$$\text{และ } g = \{(x, y) \mid y = 2x - 1 \text{ และ } x \in [-2, 2]\}$$

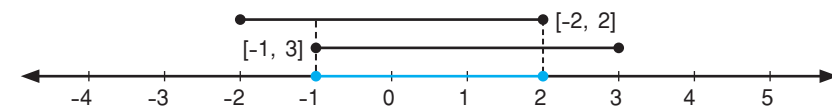
$$\text{ให้หา } f + g \text{ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของ } f + g \text{ และเขียนกราฟของ } f, g \text{ และ } f + g$$

$$\text{วิธีทำ จาก } f(x) = x + 2 \text{ เมื่อ } x \in [-1, 3]$$

$$\text{และ } g(x) = 2x - 1 \text{ เมื่อ } x \in [-2, 2]$$

$$\text{จะได้ } D_f = [-1, 3] \text{ และ } D_g = [-2, 2]$$

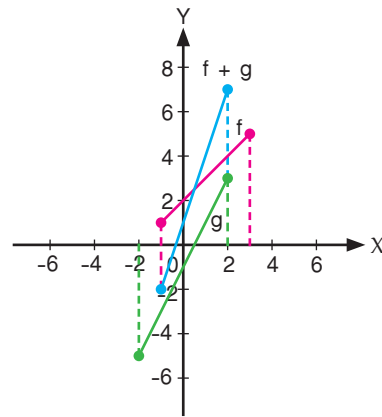
$$\text{เขียนแสดงโดยใช้เส้นจำนวนได้ ดังนี้}$$



$$\text{ดังนั้น } D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-1, 2]$$

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \quad , x \in [-1, 2] \\ &= (x + 2) + (2x - 1) \quad , x \in [-1, 2] \\ &= 3x + 1 \quad , x \in [-1, 2]\end{aligned}$$

เขียนกราฟของ f , g และ $f + g$ ได้ ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า $D_{f+g} = [-1, 2]$
 $R_{f+g} = [-2, 7]$

ตัวอย่างที่ 35

กำหนด $f = \{(x, y) \mid y = 4x - 2 \text{ และ } x \in [-2, 3]\}$

และ $g = \{(x, y) \mid y = -2x \text{ และ } x \in [-1, 5]\}$

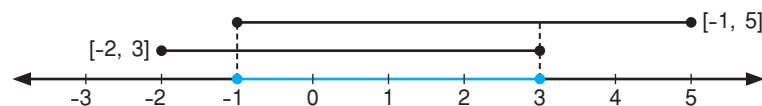
ให้หา $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ และ $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ พร้อมทั้งหาเรนจ์ของแต่ละฟังก์ชัน

วิธีทำ จาก $f(x) = 4x - 2$ เมื่อ $x \in [-2, 3]$

และ $g(x) = -2x$ เมื่อ $x \in [-1, 5]$

จะได้ $D_f = [-2, 3]$ และ $D_g = [-1, 5]$

เขียนแสดงโดยใช้เส้นจำนวนได้ ดังนี้



ดังนั้น $D_f \cap D_g = [-1, 3]$

โดเมนของ $f + g$, $f - g$ และ $f \cdot g$ คือ $D_f \cap D_g = [-1, 3]$

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \quad , x \in [-1, 3] \\ &= (4x - 2) + (-2x) \quad , x \in [-1, 3] \\ &= 2x - 2 \quad , x \in [-1, 3]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f - g)(x) &= f(x) - g(x) \quad , x \in [-1, 3] \\ &= (4x - 2) - (-2x) \quad , x \in [-1, 3] \\ &= 6x - 2 \quad , x \in [-1, 3]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \quad , x \in [-1, 3] \\ &= (4x - 2)(-2x) \quad , x \in [-1, 3] \\ &= -8x^2 + 4x \quad , x \in [-1, 3]\end{aligned}$$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $\{x \mid x \in D_f \cap D_g \text{ และ } g(x) \neq 0\}$

เนื่องจาก $g(x) = 0$ เมื่อ $x = 0$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap D_g - \{0\} \\ &= [-1, 3] - \{0\} \\ &= [-1, 0) \cup (0, 3]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \frac{4x - 2}{-2x} = -2 + \frac{1}{x} \quad , x \in [-1, 0) \cup (0, 3]\end{aligned}$$

หา R_{f+g}

เนื่องจาก โดเมนของ $f + g$ เป็นสับเซตของจำนวนจริง ดังนั้นจึงต้องหาเรนจ์โดยใช้ค่าของโดเมน $x \in [-1, 3]$ ดังนี้

จาก $-1 \leq x \leq 3$ ต้องหาค่าของ $2x - 2$

นำ 2 คูณทั้งสองสมการ จะได้

$$-2 \leq 2x \leq 6$$

บวกอสมการด้วย -2 จะได้

$$-2 - 2 \leq 2x - 2 \leq 6 - 2$$

$$-4 \leq 2x - 2 \leq 4$$

$$-4 \leq y \leq 4$$

ดังนั้น $R_{f+g} = \{y \mid -4 \leq y \leq 4\}$ หรือ $R_{f+g} = [-4, 4]$

หา R_{f-g}

เนื่องจาก โดเมนของ $f - g$ เป็นสับเซตของจำนวนจริง ดังนั้นจึงต้องหาเรนจ์โดยใช้ค่าของโดเมน $x \in [-1, 3]$ ดังนี้

จาก $-1 \leq x \leq 3$ ต้องหาค่าของ $6x - 2$

นำ 6 คูณทั้งสองสมการ จะได้

$$-6 \leq 6x \leq 18$$

บวกอสมการด้วย -2 จะได้

$$-6 - 2 \leq 6x - 2 \leq 18 - 2$$

$$-8 \leq 6x - 2 \leq 16$$

$$-8 \leq y \leq 16$$

ดังนั้น $R_{f \cdot g} = \{y \mid -8 \leq y \leq 16\}$ หรือ $R_{f \cdot g} = [-8, 16]$

หา $R_{f \cdot g}$ โดยจัดรูป $(f \cdot g)(x) = -8x^2 + 4x$ ให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ ดังนี้

$$\text{จาก } (f \cdot g)(x) = -8x^2 + 4x, x \in [-1, 3]$$

$$= -8\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{2}, x \in [-1, 3]$$

$$= -8\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}, x \in [-1, 3]$$

จะเห็นว่า $(f \cdot g)(x)$ มีค่ามากที่สุด คือ $\frac{1}{2}$ เมื่อ $x = \frac{1}{4}$ และมีค่าลดลง เมื่อ $x \in [-1, 3]$

พิจารณา เมื่อ $x = -1$ จะได้ $(f \cdot g)(-1) = -8\left(-1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} = -12$

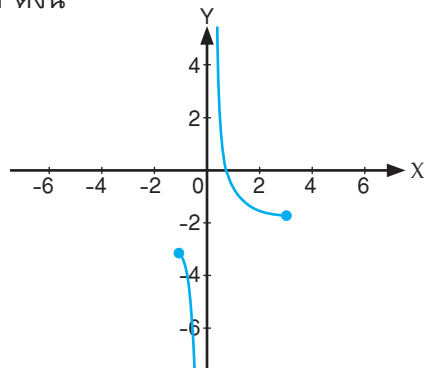
และเมื่อ $x = 3$ จะได้ $(f \cdot g)(3) = -8\left(3 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} = -60$

$$\text{ดังนั้น } R_{f \cdot g} = \left[-60, \frac{1}{2}\right]$$

หา $R_{\frac{f}{g}}$ โดยพิจารณาจากกราฟ

$$\text{จาก } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = -2 + \frac{1}{x}, x \in [-1, 0) \cup (0, 3]$$

ซึ่งเขียนกราฟได้ ดังนี้



$$\text{ดังนั้น } R_{\frac{f}{g}} = (-\infty, -3] \cup \left[-\frac{5}{3}, \infty\right)$$

ลองทำ

กำหนด $f = \{(x, y) \mid y = 3x + 5 \text{ และ } x \in [-1, 4]\}$

และ $g = \{(x, y) \mid y = 2x \text{ และ } x \in [-3, 2]\}$

ให้หา $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ และ $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ พร้อมทั้งหาเรนจ์ของแต่ละฟังก์ชัน

แนวข้อสอบ A-Level



กำหนด $f(x) = x - 2$ และ $g(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ ให้หา $D_{\frac{f}{g}}$

แนวคิด จาก $D_f = \mathbb{R}$ และ $D_g = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$

จะได้ $D_f \cap D_g = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$

จาก $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $x \in D_f \cap D_g$ และ $g(x) \neq 0$

ซึ่ง $g(x) \neq 0$ เมื่อ $x \neq 2$ หรือ 3

ดังนั้น $D_{\frac{f}{g}} = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$

แบบฝึกทักษะ 1.5

ระดับพื้นฐาน ★

1. กำหนด $f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 0), (4, 8), (5, 9)\}$ และ $g = \{(1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 0)\}$
ให้หา $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$ และ $f + 2g$

2. ให้หา D_{f+g} เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ และ $g(x)$ ดังต่อไปนี้

$$1) f(x) = 3x + 1 \text{ และ } g(x) = x^2 - 1 \quad 2) f(x) = \frac{1}{x - 2} \text{ และ } g(x) = \frac{1}{|x| - 1}$$

3. ให้หา $D_{\frac{f}{g}}$ เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ และ $g(x)$ ดังต่อไปนี้

$$1) f(x) = x^3 - 2 \text{ และ } g(x) = x - 3 \quad 2) f(x) = \sqrt{x + 1} \text{ และ } g(x) = x - 1$$

ระดับกลาง ★★

4. กำหนด $f = \{(x, y) \mid y = 2x + 1 \text{ เมื่อ } x \in (0, 4]\}$ และ $g = \{(x, y) \mid y = x^2 \text{ เมื่อ } x \in [1, 6)\}$

ให้หา $(f \cdot g)(x)$ และเรนจ์ของ $f \cdot g$

ระดับท้าทาย ★★★

5. ให้หา $\frac{f+g}{h}$ และโดเมนของ $\frac{f+g}{h}$ จากฟังก์ชัน $f = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x^2\}$,

$$g = \{(x, y) \mid y = 3x + 2\} \text{ และ } h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid y = x + 2\}$$

1.6 ฟังก์ชันประกอบ (Composite Function)

โดยทั่วไปการผลิตบรรจุภัณฑ์มีขั้นตอนหลายขั้นตอน แต่ละขั้นตอนจำเป็นต้องใช้เครื่องจักร ซึ่งผลิตชิ้นงานที่แตกต่างกัน งานที่ได้จากเครื่องจักรหนึ่งต้องนำไปเป็นวัตถุดิบป้อนให้อีกเครื่องจักรหนึ่ง ดำเนินการต่อเนื่องอย่างนี้ไปเรื่อย ๆ จนกว่าชิ้นงานจะเสร็จสมบูรณ์ เรียกกระบวนการผลิตนี้ว่า กระบวนการถ่ายทอด และอาจใช้ฟังก์ชันเป็นแบบจำลองได้ ดังนี้

ให้ x เป็นวัตถุดิบของเครื่องจักร A และ $A(x)$ เป็นผลผลิตจากเครื่องจักร A

B เป็นเครื่องจักรที่ต้องใช้วัตถุดิบจากเครื่องจักร A คือ $A(x)$ และผลผลิตจากเครื่องจักร B เขียนแทนด้วย $B(A(x))$ ซึ่งเป็นกระบวนการถ่ายทอดจากเครื่องจักร A ไปยังเครื่องจักร B เมื่อเขียนเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ให้ฟังก์ชัน f แทนเครื่องจักร A และฟังก์ชัน g แทนเครื่องจักร B จะได้ว่า

$f(x)$ แทนผลผลิตจากเครื่องจักร A ซึ่งมี x เป็นวัตถุดิบ

$g(x)$ แทนผลผลิตจากเครื่องจักร B ซึ่งมี $f(x)$ เป็นวัตถุดิบ

เรียก $g(f(x))$ ว่า ฟังก์ชันประกอบ โดยมีนิยาม ดังนี้

นิยาม กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย $g \circ f$ คือ ฟังก์ชันที่กำหนดโดเมนโดย

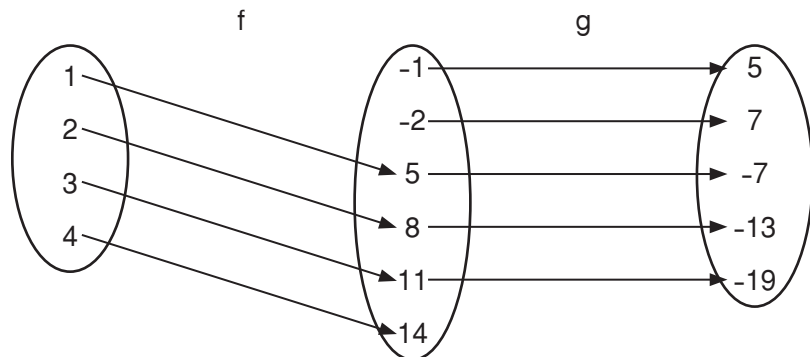
$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

และกำหนด $g \circ f$ โดย $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ สำหรับทุก x ใน $D_{g \circ f}$

จากนิยาม $x \in D_f$ และ $f(x) \in D_g$ จะได้ว่า $R_f \cap D_g \neq \emptyset$, $D_{g \circ f} \subset D_f$ และ $R_{g \circ f} \subset R_g$ ฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$ คือ ฟังก์ชันที่กำหนดโดเมนโดย $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

ตัวอย่างที่ 36

กำหนดแผนภาพของฟังก์ชัน f และ g ให้หาฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$



วิธีทำ จากแผนภาพ เขียนโดเมนและเรนจ์ของ f และ g ดังนี้

$$D_f = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{และ} \quad R_f = \{5, 8, 11, 14\}$$

$$D_g = \{-1, -2, 5, 8, 11\} \quad \text{และ} \quad R_g = \{5, 7, -7, -13, -19\}$$

จะได้ $R_f \cap D_g = \{5, 8, 11\}$ จึงมีฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$ โดยมีสมาชิก 5, 8 และ 11 เป็นตัวถ่ายทอด

$$\text{จาก } (1, 5) \in f \quad \text{และ} \quad (5, -7) \in g \quad \text{จะได้ } (g \circ f)(1) = -7$$

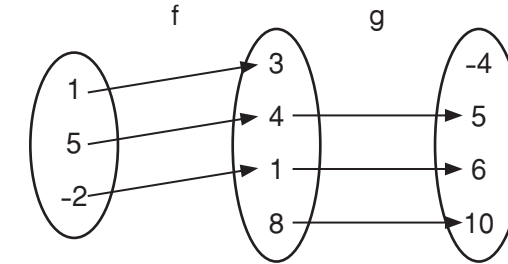
$$(2, 8) \in f \quad \text{และ} \quad (8, -13) \in g \quad \text{จะได้ } (g \circ f)(2) = -13$$

$$(3, 11) \in f \quad \text{และ} \quad (11, -19) \in g \quad \text{จะได้ } (g \circ f)(3) = -19$$

$$\text{ดังนั้น } g \circ f = \{(1, -7), (2, -13), (3, -19)\}$$

ลองทำดู

กำหนดแผนภาพฟังก์ชัน f และ g ให้หาฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$



ตัวอย่างที่ 37

กำหนด $f = \{(1, 3), (2, 5), (4, 8), (6, 9)\}$ และ $g = \{(3, a), (5, b), (7, c), (9, d)\}$

ให้หาฟังก์ชัน $g \circ f$ และ $f \circ g$ (ถ้ามี)

วิธีทำ จาก $D_f = \{1, 2, 4, 6\}$ และ $R_f = \{3, 5, 8, 9\}$

$$D_g = \{3, 5, 7, 9\} \quad \text{และ} \quad R_g = \{a, b, c, d\}$$

เนื่องจาก $R_f \cap D_g = \{3, 5, 9\}$ ดังนั้น จึงมีฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$

โดยมีสมาชิก 3, 5 และ 9 เป็นตัวถ่ายทอด

$$\text{จาก } (1, 3) \in f \quad \text{และ} \quad (3, a) \in g \quad \text{จะได้ } (g \circ f)(1) = a$$

$$(2, 5) \in f \quad \text{และ} \quad (5, b) \in g \quad \text{จะได้ } (g \circ f)(2) = b$$

$$(6, 9) \in f \quad \text{และ} \quad (9, d) \in g \quad \text{จะได้ } (g \circ f)(6) = d$$

$$\text{ดังนั้น } g \circ f = \{(1, a), (2, b), (6, d)\}$$

เนื่องจาก $R_g \cap D_f = \emptyset$ ดังนั้น จึงไม่มีฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$

คุณทันารู้
โดยทั่วไป
 $g \circ f \neq f \circ g$

ลองทำดู

กำหนด $f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 8)\}$ และ $g = \{(3, 0), (5, 4), (6, 8)\}$
ให้หาฟังก์ชัน $g \circ f$ และ $f \circ g$ (ถ้ามี)

ตัวอย่างที่ 38

กำหนด $f(x) = x^2 - 2$ และ $g(x) = x + 1$ ให้หาฟังก์ชัน $g \circ f$ และ $f \circ g$ พร้อมทั้งโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันประกอบทั้งสอง

วิธีทำ จาก $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [-2, \infty)$

$$D_g = \mathbb{R} \text{ และ } R_g = \mathbb{R}$$

เนื่องจาก $R_f \cap D_g = [-2, \infty)$ จึงมี $g \circ f$

และ $R_g \cap D_f = \mathbb{R}$ จึงมี $f \circ g$

$$\begin{aligned} \text{จาก } (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2 - 2) \\ &= (x^2 - 2) + 1 = x^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } g \circ f = \{(x, y) \mid y = x^2 - 1\}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{หา } R_{g \circ f} \text{ จาก } (g \circ f)(x) &= x^2 - 1, x \in \mathbb{R} \text{ จะได้ } x^2 \geq 0 \\ x^2 + (-1) &\geq 0 + (-1) \\ x^2 - 1 &\geq -1 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } R_{g \circ f} = [-1, \infty)$$

$$\begin{aligned} \text{จาก } (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x + 1) = (x + 1)^2 - 2 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } f \circ g = \{(x, y) \mid y = x^2 + 2x - 1\}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{หา } R_{f \circ g} \text{ จาก } (f \circ g)(x) &= (x + 1)^2 - 2, x \in \mathbb{R} \text{ จะได้ } (x + 1)^2 \geq 0 \\ (x + 1)^2 + (-2) &\geq 0 + (-2) \\ (x + 1)^2 - 2 &\geq -2 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } R_{f \circ g} = [-2, \infty)$$

แบบแนวคิด

ขั้นตอนการหา $D_{g \circ f}$

1. หา R_f และ D_g

2. หา $R_f \cap D_g$

1) ถ้า $R_f \cap D_g = \emptyset$
แล้วไม่เกิด $(g \circ f)(x)$

2) ถ้า $R_f \cap D_g \neq \emptyset$
แล้วเกิด $(g \circ f)(x)$

3. หาเซตของ x ที่
 $f(x) \in R_f \cap D_g$ ซึ่งจะได้
 $D_{g \circ f}$ คือ เซตของ x

จดจำไว้

โดยทั่วไป

$$R_{g \circ f} \neq R_{f \circ g}$$

ลองทำดู

กำหนด $f(x) = 2x$ และ $g(x) = 3x + 1$ ให้หาฟังก์ชัน $g \circ f$ และ $f \circ g$ พร้อมทั้งโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันประกอบทั้งสอง

ตัวอย่างที่ 39

กำหนด $f(x) = 3x + 1$ ให้หา

$$1) (f \circ f^{-1})(x)$$

$$2) (f^{-1} \circ f)(x)$$

วิธีทำ จาก $f(x) = 3x + 1$ ①

$$\text{จะได้ } f^{-1}(3x + 1) = x$$

$$\text{ให้ } 3x + 1 = k$$

$$\text{จะได้ } x = \frac{k - 1}{3}$$

$$\text{ดังนั้น } f^{-1}(k) = \frac{k - 1}{3}$$

$$\text{หรือ } f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{3} \text{②}$$

$$1) (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x))$$

$$\text{จาก ② จะได้ } f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x - 1}{3}\right)$$

$$\text{จาก ① จะได้ } f\left(\frac{x - 1}{3}\right) = 3\left(\frac{x - 1}{3}\right) + 1 = x$$

$$\text{ดังนั้น } (f \circ f^{-1})(x) = x \text{ เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$2) (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x))$$

$$\text{จาก ① จะได้ } f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x + 1)$$

$$\text{จาก ② จะได้ } f^{-1}(3x + 1) = \frac{(3x + 1) - 1}{3} = x$$

$$\text{ดังนั้น } (f^{-1} \circ f)(x) = x \text{ เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

ลองทำดู

กำหนด $f(x) = 2x + 3$ ให้หา $(f \circ f^{-1})(x)$ และ $(f^{-1} \circ f)(x)$

จากตัวอย่างที่ 39 เป็นไปตามทฤษฎีบทของฟังก์ชันผกผัน ดังนี้

ทฤษฎีบท

ถ้า $f: A \xrightarrow{1-1} B$ แล้ว

1) $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ สำหรับทุก $x \in \mathbf{R}$ 2) $(f \circ f^{-1})(x) = x$ สำหรับทุก $x \in \mathbf{R}$

ตัวอย่างที่ 40

กำหนด $(f \circ g)(x) = -3x^2 + 6x - 7$ และ $g(x) = x^2 - 2x + 3$ ให้หา $f(x)$

วิธีทำ วิธีที่ 1 จาก $(f \circ g)(x) = -3x^2 + 6x - 7$

จะได้ $f(g(x)) = -3x^2 + 6x - 7$

$f(x^2 - 2x + 3) = -3x^2 + 6x - 7$

แสดงว่า เมื่อแทน x ใน f ด้วย $x^2 - 2x + 3$ จะเป็นพหุนามที่มี 3 พจน์

คือ พจน์กำลังสอง พจน์กำลังหนึ่ง และพจน์ค่าคงตัว

ดังนั้น $f(x)$ จะเป็นฟังก์ชันที่มีกำลังสูงสุดเป็นหนึ่ง

ให้ $f(x) = ax + b$ และแทน x ด้วย $x^2 - 2x + 3$ จะได้

$f(x^2 - 2x + 3) = a(x^2 - 2x + 3) + b$

$-3x^2 + 6x - 7 = ax^2 - 2ax + 3a + b$

$-3x^2 + 6x - 7 = ax^2 - 2ax + (3a + b)$

จากการเท่ากันของสมการ จะได้ว่า $a = -3$

และ $3a + b = -7$

จะได้ $3(-3) + b = -7$

$b = 2$

ดังนั้น $f(x) = -3x + 2$

วิธีที่ 2 จาก $(f \circ g)(x) = -3x^2 + 6x - 7$

จะได้ $f(g(x)) = -3x^2 + 6x - 7 = -3(x - 1)^2 - 4$ ①

และ $g(x) = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$

จะได้ $(x - 1)^2 = g(x) - 2$ ②

แทน ② ใน ① จะได้ $f(g(x)) = -3(g(x) - 2) - 4$

$= -3g(x) + 2$

$f(x) = -3x + 2$

แนะแนวคิด

ฟังก์ชันเชิงเส้น

$f(x) = ax + b$ เมื่อ a, b

เป็นจำนวนจริงใดๆ และ

$a \neq 0$ เป็นฟังก์ชันที่มี

กำลังสูงสุดเป็นหนึ่ง

แบบฝึกทักษะ 1.6

ระดับพื้นฐาน ★

1. กำหนด $f = \{(1, a), (2, b), (3, b), (4, c), (5, d)\}$

และ $g = \{(a, 3), (b, 5), (c, 4), (e, 6)\}$

ให้หาฟังก์ชัน $g \circ f$ และ $f \circ g$ พร้อมเขียนแผนภาพประกอบ

2. กำหนด $f = \{(1, 3), (2, 5), (4, 8), (6, 9)\}$

และ $g = \{(3, a), (5, b), (7, c), (9, d)\}$

ให้หาฟังก์ชัน $g \circ f$ และ $f \circ g$ (ถ้ามี)

1) $(g \circ f)(1), (g \circ f)(2), (g \circ f)(6)$ 2) $(f \circ g)(3)$

3. กำหนด $f(x) = x^2$ และ $g(x) = x^3 + 1$ ให้หาฟังก์ชัน $g \circ f$ และ $f \circ g$ พร้อมทั้งโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันประกอบทั้งสอง

4. กำหนด $(f \circ g)(x) = -x$ และ $f(x) = 3x$ ให้หา $g(x)$

ระดับกลาง ★★

5. กำหนด $f(x) = x, g(x) = 3x + 7$ และ $h(x) = x^2$ ให้หา $(f \circ g \circ h)(x)$

6. กำหนด $f(x) = x^2 - 3x + 1, g(x) = x + 2$ และ $h(x) = 2x + 1$ ให้หา $(f \circ g \circ h)(x)$

7. กำหนด $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ และ $g(x) = \sqrt{x+2}$ ให้หา

1) $(g \circ f)(x), (g \circ f)(4)$ และ $D_{g \circ f}$ 2) $(f \circ g)(x), (f \circ g)(2)$ และ $D_{f \circ g}$

8. กำหนด $f(x) = 2x + 3$ และ $g(x) = x - 5$ ให้หา $(f \circ g)^{-1}(x)$ และ $(g \circ f)^{-1}(x)$

9. กำหนด $f(g(x)) = x + 1$ และ $f(x) = x - 1$ ให้หา $g(x)$

10. กำหนด $f(g(x)) = 2x^2 + 1$ และ $f(x) = 2x$ ให้หา $g(x)$

11. กำหนด $f(x) = 3x + 1$ และ $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$ ให้หา $g(x)$

12. กำหนด $f(x) = 2x$ และ $g(x) = \frac{1}{x-2}$ ให้หาค่าของ x ที่ทำให้ $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$

ระดับท้าทาย ★★★

13. กำหนด $f(x) = 2 - 3x$ และ $h(x) = 9x^2 - 6x + 3$ ให้หาฟังก์ชัน g ซึ่ง $g \circ f = h$

ลองทำ

กำหนด $(f \circ g)(x) = x^2 + 3x - 5$ และ $g(x) = 2x + 1$ ให้หา $f(x)$

1.7 การนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องฟังก์ชันและกราฟไปใช้ในการแก้ปัญหา

นักเรียนได้ศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชันมาแล้ว ในหัวข้อนี้นักเรียนจะได้นำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่พบในชีวิตจริง ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 41

ให้เขียนกราฟของอัตราค่าไปรษณียากรสำหรับส่งพัสดุไปรษณีย์ทางอากาศจากไทยไปยังมาเลเซีย ดังข้อมูลในตาราง

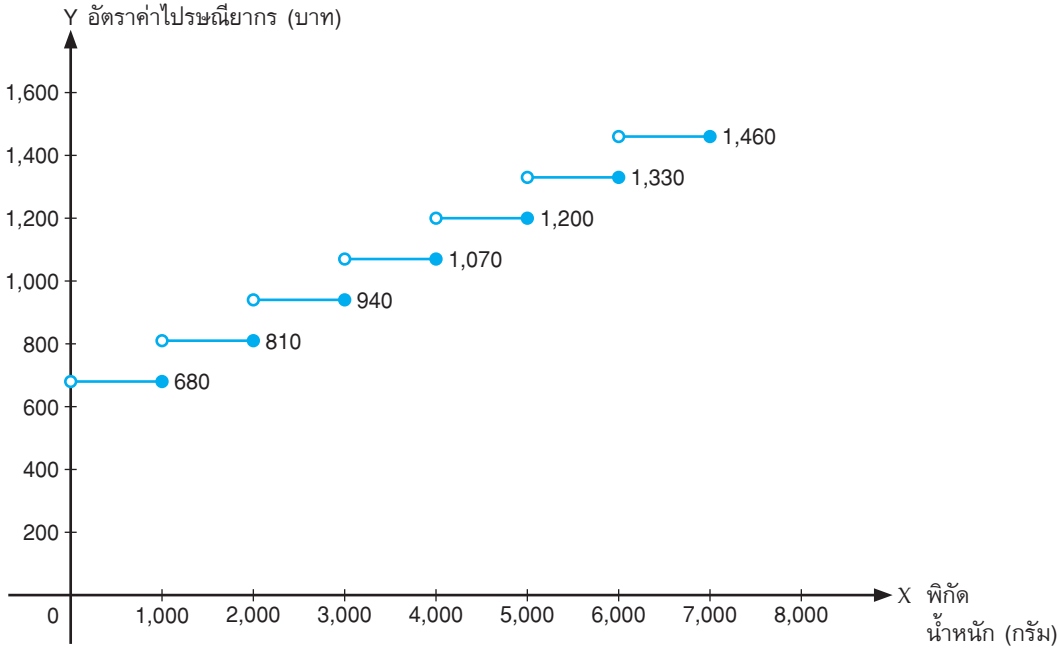
พิกัดน้ำหนัก	อัตราค่าไปรษณียากร (บาท)
ไม่เกิน 1,000 กรัม	680
เกิน 1,000 กรัม แต่ไม่เกิน 2,000 กรัม	810
เกิน 2,000 กรัม แต่ไม่เกิน 3,000 กรัม	940
เกิน 3,000 กรัม แต่ไม่เกิน 4,000 กรัม	1,070
เกิน 4,000 กรัม แต่ไม่เกิน 5,000 กรัม	1,200
เกิน 5,000 กรัม แต่ไม่เกิน 6,000 กรัม	1,330
เกิน 6,000 กรัม แต่ไม่เกิน 7,000 กรัม	1,460

ที่มา : บริษัทไปรษณีย์ไทย จำกัด

วิธีทำ เขียนฟังก์ชันในรูป $f(x)$ เมื่อ x เป็นน้ำหนักของพัสดุไปรษณีย์ทางอากาศ และ $f(x)$ เป็นอัตราค่าไปรษณียากรได้ ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 680 ; & 0 < x \leq 1,000 \\ 810 ; & 1,000 < x \leq 2,000 \\ 940 ; & 2,000 < x \leq 3,000 \\ 1,070 ; & 3,000 < x \leq 4,000 \\ 1,200 ; & 4,000 < x \leq 5,000 \\ 1,330 ; & 5,000 < x \leq 6,000 \\ 1,460 ; & 6,000 < x \leq 7,000 \end{cases}$$

จากข้อมูลจะเห็นว่า อัตราค่าไปรษณียากรในแต่ละช่วงจะเป็นช่วงครึ่งเปิด ซึ่งเมื่อนำไปเขียนกราฟจะมีจุดที่เป็นจุดโปร่งทางด้านซ้ายมือในแต่ละช่วง เขียนกราฟของฟังก์ชัน f ได้ ดังนี้



ลองทำดู

ให้เขียนกราฟของอัตราค่าไปรษณียากรสำหรับส่งพัสดุไปรษณีย์ทางอากาศจากไทยไปยังสหรัฐอเมริกา ดังข้อมูลในตาราง

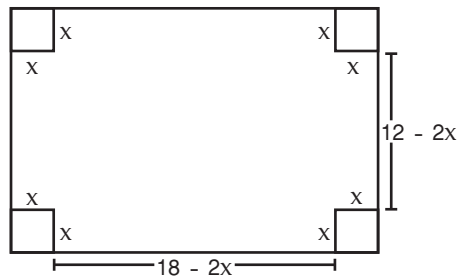
พิกัดน้ำหนัก	อัตราค่าไปรษณียากร (บาท)
ไม่เกิน 1,000 กรัม	1,225
เกิน 1,000 กรัม แต่ไม่เกิน 2,000 กรัม	1,980
เกิน 2,000 กรัม แต่ไม่เกิน 3,000 กรัม	2,740
เกิน 3,000 กรัม แต่ไม่เกิน 4,000 กรัม	3,495
เกิน 4,000 กรัม แต่ไม่เกิน 5,000 กรัม	4,250
เกิน 5,000 กรัม แต่ไม่เกิน 6,000 กรัม	5,005
เกิน 6,000 กรัม แต่ไม่เกิน 7,000 กรัม	5,750

ที่มา : บริษัทไปรษณีย์ไทย จำกัด

ตัวอย่างที่ 42

สร้างกล่องกระดาษฝาดเปิดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจากกระดาษแข็งซึ่งมีความกว้าง 12 นิ้ว และความยาว 18 นิ้ว มาตัดมุมทั้งสี่ให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแล้วพับด้านทั้งสี่ขึ้น กำหนด x แทนความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ให้เขียนฟังก์ชันในรูปของ x ซึ่งมีค่าของฟังก์ชันเป็นปริมาตรของกล่องกระดาษ

วิธีทำ กำหนด $V(x)$ แทนปริมาตรของกล่องกระดาษ และ x แทนความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } V(x) &= \text{ความกว้าง} \times \text{ความยาว} \times \text{ความสูง} \\ &= (12 - 2x)(18 - 2x)x \\ &= 4x^3 - 60x^2 + 216x \end{aligned}$$

ลองทำ

จำนวนนับจำนวนหนึ่ง เมื่อรวมกับจำนวนนับอีกจำนวนหนึ่งมีผลบวกเท่ากับ 100 ให้เขียนฟังก์ชันในรูปของ x ซึ่งมีค่าของฟังก์ชันเป็นผลคูณของจำนวนนับทั้งสองจำนวน

ตัวอย่างที่ 43

บริษัทผลิตสินค้าแปรรูปแห่งหนึ่ง ถ้าขายสินค้าชิ้นละ 150 บาท จะขายได้ 2,000 ชิ้น แต่ถ้าขายสินค้าชิ้นละ 100 บาท จะขายได้ 2,500 ชิ้น ซึ่งราคาสินค้าต่อชิ้นกับจำนวนสินค้าที่ขายได้มีความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ให้หา

- 1) ฟังก์ชันในรูปของ x ซึ่งมีค่าของฟังก์ชันเป็นจำนวนสินค้าที่ขายได้
- 2) ถ้าขายสินค้าชิ้นละ 200 บาท จะขายสินค้าได้กี่ชิ้น

วิธีทำ 1) ให้ x แทนราคาสินค้าต่อชิ้น

$f(x)$ แทนจำนวนสินค้าที่ขายได้

จากรูปทั่วไปของฟังก์ชันเชิงเส้นจะได้

$$f(x) = ax + b \quad \dots\dots ①$$

$$\text{จาก } x = 150, f(x) = 2,000$$

นำ x และ $f(x)$ ไปแทนค่าสมการ ① จะได้

$$2,000 = a(150) + b \quad \dots\dots ②$$

$$\text{และ } x = 100, f(x) = 2,500$$

นำ x และ $f(x)$ ไปแทนค่าสมการ ① จะได้

$$2,500 = a(100) + b \quad \dots\dots ③$$

นำสมการ ② - ③ จะได้

$$-500 = 50a$$

$$a = -10$$

นำค่า a แทนใน ② จะได้

$$2,000 = 150(-10) + b$$

$$b = 3,500$$

$$\text{ดังนั้น } f(x) = -10x + 3,500$$

- 2) ถ้าขายสินค้าชิ้นละ 200 บาท จะขายสินค้าได้เท่ากับ

$$f(x) = -10x + 3,500$$

$$f(200) = -10(200) + 3,500$$

$$= 1,500$$

ดังนั้น ถ้าขายสินค้าชิ้นละ 200 บาท จะขายสินค้าได้ 1,500 ชิ้น

ตัวอย่างที่ 44

ยอดขายสินค้าชนิดใหม่ของบริษัทอยู่ที่ 18,000 ชิ้นต่อปี ถ้าบริษัทต้องการให้ยอดขายเพิ่มขึ้นปีละ 10% ของยอดขายปัจจุบัน ให้หา

- 1) สมการแสดงยอดขายสินค้าของแต่ละปี
- 2) อีก 10 ปีถัดไป บริษัทนี้จะมียอดขายเท่าใด

วิธีทำ 1) ให้ x แทนจำนวนปี

$f(x)$ แทนยอดขายสินค้าของปีที่ x

$$\text{จะได้ } f(x) = 18,000 + 18,000 \left(\frac{10}{100} \right) x$$

$$= 18,000 + 1,800x$$

ดังนั้น สมการแทนยอดขายสินค้าของแต่ละปี คือ $f(x) = 18,000 + 1,800x$

- 2) ให้ $x = 10$
 จาก $f(x) = 18,000 + 1,800x$
 จะได้ $f(10) = 18,000 + 1,800(10)$
 $= 36,000$ ชิ้น
 ดังนั้น อีก 10 ปีถัดไป บริษัทนี้จะมียอดขาย 36,000 ชิ้น

ลองทำดู

บริษัทแห่งหนึ่งต้องการขายสินค้าสำเร็จรูป ถ้าขายสินค้าชิ้นละ 100 บาท จะขายได้ 1,500 ชิ้น แต่ถ้าขายสินค้าชิ้นละ 50 บาท จะขายได้ 2,000 ชิ้น ให้หา

- ฟังก์ชันในรูปของ x ซึ่งมีค่าของฟังก์ชันเป็นจำนวนสินค้าที่ขายได้
- ถ้าขายสินค้าชิ้นละ 200 บาท จะขายสินค้าได้กี่ชิ้น

ตัวอย่างที่ 45

เมื่อโยนก้อนหินขึ้นไปบนอากาศในเวลา t วินาทีใด ๆ ความสูงของก้อนหินจากพื้น เป็นไปตามสมการ $h(t) = 16t - 4t^2$ ให้หา

- เวลาเมื่อก้อนหินอยู่สูงจากพื้น 12 เมตร
- ความสูงที่ก้อนหินจะขึ้นไปได้สูงสุด

วิธีทำ เมื่อเวลา t วินาทีใด ๆ ความสูงของก้อนหินเป็น $16t - 4t^2$

- จาก $h(t) = 16t - 4t^2$
 เมื่อ $h = 12$ แทนค่าในสมการ $h(t) = 16t - 4t^2$ จะได้

$$\begin{aligned} 12 &= 16t - 4t^2 \\ 4t^2 - 16t + 12 &= 0 \\ t^2 - 4t + 3 &= 0 \\ (t - 1)(t - 3) &= 0 \\ t &= 1, 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น ก้อนหินอยู่สูงจากพื้น 12 เมตร เมื่อเวลา 1 วินาที หรือ 3 วินาที

- จาก $h(t) = 16t - 4t^2$
 ก้อนหินจะขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อ $t = \frac{-b}{2a}$
 $= \frac{-16}{2(-4)}$
 $= 2$

แทนค่า $t = 2$ ในสมการ $h(t) = 16t - 4t^2$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } h(t) &= 16(2) - 4(2^2) \\ &= 32 - 16 \\ &= 16 \end{aligned}$$

ดังนั้น ความสูงที่ก้อนหินจะขึ้นไปได้สูงสุดเท่ากับ 16 เมตร

แนวคิด

จากฟังก์ชันกำลังสอง
 $y = ax^2 + bx + c$
 จะมีจุดยอดอยู่ที่
 $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

ตัวอย่างที่ 46

บริษัทผลิตชิ้นส่วนเครื่องจักรได้เสนอเงื่อนไขการขายสินค้าที่ผลิตได้นี้ให้กับโรงงานอุตสาหกรรม ดังนี้ ถ้าสั่งซื้อไม่เกิน 50,000 ชิ้น จะให้ราคา 2,400 บาท ต่อ 100 ชิ้น ถ้าสั่งซื้อมากกว่า 50,000 ชิ้น จะลดราคาสินค้าที่เกินจาก 50,000 ชิ้น โดยลดราคา 2 บาท ต่อ 100 ชิ้น กำหนด x แทนจำนวนสินค้าที่สั่งเกิน 50,000 ชิ้น ให้เขียนฟังก์ชันในรูปของ x และหาจำนวนสินค้าที่สั่งซื้อเกิน ซึ่งทำให้ได้ยอดขายมากที่สุด

วิธีทำ กำหนด x แทนจำนวนสินค้าที่สั่งเกิน 50,000 ชิ้น
 ถ้าสั่งซื้อ 50,000 ชิ้น จะให้ราคา 2,400 บาท ต่อ 100 ชิ้น
 ดังนั้น บริษัทจะมียอดขายเท่ากับ $\frac{2,400}{100} \times 50,000$
 ถ้าสั่งซื้อมากกว่า 50,000 ชิ้น จะลดราคาสินค้าที่เกินจาก 50,000 ชิ้น โดยลดราคา 2 บาท ต่อ 100 ชิ้น
 ดังนั้น ราคาสินค้าที่เกิน 50,000 ชิ้น เท่ากับ $\left(\frac{2,400}{100} - 2 \cdot \frac{x}{100}\right)x$
 ยอดขายสินค้าจำนวน 50,000 + x ชิ้น เท่ากับ $(12 \times 10^5) + \left(24 - \frac{x}{50}\right)x$
 นั่นคือ $f(x) = (12 \times 10^5) + \left(24 - \frac{x}{50}\right)x$
 $f(x) = 12 \times 10^5 + 24x - \frac{x^2}{50}$
 หรือ $f(x) = -\frac{x^2}{50} + 24x + (12 \times 10^5)$
 จะได้ $a = -\frac{1}{50}$ และ $b = 24$

จากสูตรฟังก์ชันกำลังสอง ซึ่งมีค่าสูงสุดที่ $x = \frac{-b}{2a}$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } a \text{ และ } b \text{ จะได้ } x &= \frac{-24}{2\left(-\frac{1}{50}\right)} \\ &= 12 \times 50 \\ &= 600 \text{ ชิ้น} \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนสินค้าที่สั่งซื้อเกินเท่ากับ 600 ชิ้น ซึ่งจะทำให้ได้ยอดขายมากที่สุด

ลองทำดู

สมชายโยนลูกบาสเกตบอลขึ้นไปในอากาศ ถ้าความสูงของลูกบาสเกตบอลที่ถูกโยนขึ้นไป (เมตร) หาได้จาก $h(t) = -t^2 + 3.2t$ เมื่อ t แทนเวลา (วินาที) ให้หาเวลาและความสูงในขณะที่ยานบาสเกตบอลอยู่ที่จุดสูงสุดจากพื้นดิน

แบบฝึกทักษะ 1.7

ระดับพื้นฐาน ★

- เขียนกราฟของอัตราค่าโดยสารรถปรับอากาศในสิงคโปร์ ระยะทาง 29 กิโลเมตร ดังตาราง

ระยะทาง	อัตราค่าโดยสาร (ดอลลาร์สิงคโปร์)
ไม่เกิน 3.2 กิโลเมตร	0.70
เกิน 3.2 กิโลเมตร แต่ไม่เกิน 4.2 กิโลเมตร	0.78
เกิน 4.2 กิโลเมตร แต่ไม่เกิน 5.2 กิโลเมตร	0.86
เกิน 5.2 กิโลเมตร แต่ไม่เกิน 6.2 กิโลเมตร	0.94
เกิน 6.2 กิโลเมตร แต่ไม่เกิน 7.2 กิโลเมตร	1.01
เกิน 7.2 กิโลเมตร แต่ไม่เกิน 8.2 กิโลเมตร	1.07
เกิน 8.2 กิโลเมตร แต่ไม่เกิน 9.2 กิโลเมตร	1.13

ที่มา : <https://www.sbstransit.com.sg/>

- การผลิตบรรจุภัณฑ์เป็นรูปทรงกระบอกที่มีฝาเปิดและมีความจุ 100 ลูกบาศก์นิ้ว ให้เขียนฟังก์ชันของวัสดุที่นำมาใช้ผลิตในรูปของรัศมี
- บริษัทแห่งหนึ่งจ่ายค่าจ้างให้พนักงานขายทุกคน คนละเท่า ๆ กัน ซึ่งคิดจากค่ายานพาหนะและค่าเบี้ย และจ่ายค่าจัดการเกี่ยวกับการขายซึ่งคิดเป็นร้อยละจากยอดขายที่พนักงานแต่ละคนขายได้ ปรากฏว่าเมื่อเดือนที่ผ่านมา ตะวันได้รับเงินจากบริษัท 25,000 บาท โดยมียอดขาย 400,000 บาท และอรุณได้รับเงินจากบริษัท 26,500 บาท โดยมียอดขาย 450,000 บาท ให้หา
 - ฟังก์ชันในรูปของ x ซึ่งมีค่าของฟังก์ชันเป็นรายได้ที่พนักงานได้รับในแต่ละเดือน
 - บริษัทจ่ายค่าจัดการเกี่ยวกับการขายให้กับพนักงานร้อยละเท่าใด
- สมมติยิงจรวดขวดน้ำ โดยมีมุมยิง 45° ถ้าความสูงของจรวดขวดน้ำที่ถูกยิงขึ้นไป (เมตร) หาได้จาก $h(t) = -2t^2 + 5.5t$ เมื่อ t แทนเวลา (วินาที) ให้หาเวลาและความสูงในขณะที่ยานจรวดขวดน้ำอยู่ที่จุดสูงสุดจากพื้นดิน
- จิ้งจอกต้องการล้อมรั้วที่ดินเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเพื่อปลูกดอกทานตะวัน โดยด้านหนึ่งของที่ดินติดกับคลอง ซึ่งจิ้งจอกไม่ต้องการล้อมรั้วกันและถ้าเขามีลวดสำหรับทำรั้วยาว 180 เมตร จิ้งจอกจะล้อมรั้วให้มีพื้นที่มากที่สุดได้เท่าใด

ระดับกลาง ★★

- การสร้างบ่อเลี้ยงกุ้งเป็นทรงกระบอก ซึ่งมีฐานเป็นรูปวงกลมและมีปริมาตร 354 ลิตร ถ้าให้รัศมีของบ่อยาว x เซนติเมตร และสูง y เซนติเมตร ให้เขียนฟังก์ชันแทนวัสดุที่ใช้ในรูปของ x
- การสร้างบรรจุภัณฑ์เป็นกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและมีปริมาตร 1,000 ลูกบาศก์นิ้ว ให้เขียนฟังก์ชันแทนวัสดุที่ใช้ในรูปของ x
- กล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความจุ 100 ลูกบาศก์นิ้ว ราคาของวัสดุที่นำมาผลิตในด้านทั้งสี่จะเป็นสองเท่าของราคาวัสดุด้านบนและด้านล่างของกล่อง ถ้าให้ฐานของกล่องยาว x นิ้ว และสูง y นิ้ว ให้เขียนฟังก์ชันเพื่อแสดงราคาในการผลิตกล่อง เมื่อกำหนดราคาวัสดุเท่ากับ 5 บาทต่อตารางนิ้ว

1. ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 3-5 คน เพื่อวิเคราะห์และตอบคำถามต่อไปนี้

- ร้านขายอุปกรณ์ตกแต่งบ้านแห่งหนึ่ง ให้ค่าจ้างพนักงานขาย 3,000 บาทต่อสัปดาห์ และให้ค่าเหนื่อย 3% จากยอดขายที่มากกว่า 10,000 บาท สมมติว่า สัปดาห์นี้พนักงานขายของได้มากเพียงพอที่จะได้ค่าเหนื่อย ถ้าให้ $f(x) = 0.30x$ และ $g(x) = x - 10,000$ นักเรียนคิดว่าฟังก์ชัน $(f \circ g)(x)$ หรือ $(g \circ f)(x)$ เป็นฟังก์ชันที่แสดงค่าเหนื่อยที่พนักงานได้รับจากการขายในสัปดาห์นี้ เพราะเหตุใด
- นักเรียนซื้อสินค้าจากห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่ง แต่สินค้าที่นักเรียนซื้อมีขนาดใหญ่ไม่สามารถนำกลับบ้านเองได้ ทางห้างสรรพสินค้ามีบริการจัดส่งสินค้า ซึ่งนักเรียนจะต้องจ่ายค่าสินค้ารวมกับค่าภาษีมูลค่าเพิ่มและค่าธรรมเนียมการจัดส่งสินค้า ถ้าค่าภาษีมูลค่าเพิ่มคิดเป็น 7% ของราคาสินค้า และค่าธรรมเนียมการจัดส่งสินค้า 500 บาท ให้ x แทนราคาสินค้า



- เขียนฟังก์ชัน $f(x)$ แสดงราคาสินค้าเมื่อรวมภาษีมูลค่าเพิ่มแล้ว และฟังก์ชัน $g(x)$ แสดงราคาสินค้าเมื่อรวมค่าธรรมเนียมจัดส่งสินค้าแล้ว
- คำนวณและเปรียบเทียบค่าของฟังก์ชันระหว่าง $(f \circ g)(x)$ และ $(g \circ f)(x)$ ฟังก์ชันใดส่งผลให้นักเรียนซื้อสินค้าได้ในราคาที่ถูกลง
- สมมติว่า ในทางกฎหมายไม่คิดภาษีค่าธรรมเนียมการจัดส่งสินค้า นักเรียนจะเลือกใช้ฟังก์ชัน $(f \circ g)(x)$ หรือ $(g \circ f)(x)$ เพราะเหตุใด

2. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนมานำเสนอผลการวิเคราะห์และคำตอบที่ได้

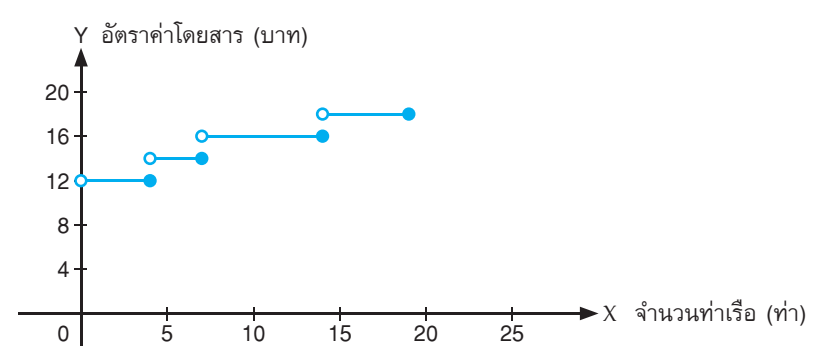
อัตราค่าโดยสารเรือคลองแสนแสบ จากผ่านฟ้าลีลาศไปยัง ม.รามคำแหง 1 ในปี พ.ศ. 2565 เป็นดังนี้

จำนวนท่าเรือ (ท่า)	อัตราค่าโดยสาร (บาท)
ไม่เกิน 4 ท่า	12
เกิน 4 ท่า แต่ไม่เกิน 7 ท่า	14
เกิน 7 ท่า แต่ไม่เกิน 14 ท่า	16
เกิน 14 ท่า แต่ไม่เกิน 19 ท่า	18

1	12	ผ่านฟ้าลีลาศ
2	12	ตลาดโบ๊เบ๊
3	12	สะพานเจริญผล
4	12	สะพานหัวช้าง
5	14	ประตูน้ำ
6	14	ชิดลม
7	14	สะพานวิทยุ
8	16	นานาเหนือ
9	16	นานาใต้
10	16	อโศก
11	16	มศว. ประสานมิตร
12	16	อิตัลไทย
13	16	วัดใหม่ช่องลม
14	16	สุเหร่าบ้านดอน
15	18	ซอยทองหล่อ
16	18	ชาญอิสระ
17	18	รร. วิจิตร
18	18	สะพานคลองตัน
19	18	รวม 1

ที่มา : กลุ่มสถิติวิเคราะห์สำนักแผนงาน กรมเจ้าท่า

จากข้อมูลสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันได้ ดังนี้



จากตัวอย่างการศึกษาข้างต้น ให้นักเรียนค้นคว้าข้อมูลเรื่องการนำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันมาประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน โดยเลือกเรื่องที่สนใจและเป็นเรื่องที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวันของนักเรียนมา 1 เรื่อง แล้วเขียนกราฟของฟังก์ชัน

สรุปแนวคิดหลัก

ฟังก์ชัน

ผลคูณคาร์ทีเซียน

- ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือ เซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมด โดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

ความสัมพันธ์

- r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times B$
- r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A หรือความสัมพันธ์ในเซต A ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times A$

โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

- โดเมนของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วย D_r

$$D_r = \{x \in A \mid \text{มี } y \in B \text{ ซึ่ง } (x, y) \in r\}$$

- เรนจ์ของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วย R_r

$$R_r = \{y \in B \mid \text{มี } x \in A \text{ ซึ่ง } (x, y) \in r\}$$

- พิจารณา D_r และ R_r ของความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไข
 - D_r : จัดตัวแปร y ในรูปของ x แล้วพิจารณาค่า x ที่ทำให้ได้ค่า y ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข
 - R_r : จัดตัวแปร x ในรูปของ y แล้วพิจารณาค่า y ที่ทำให้ได้ค่า x ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

ตัวผกผันของความสัมพันธ์

- ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r คือ ความสัมพันธ์ที่เกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้า และสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r ซึ่งเขียนแทนด้วย r^{-1}

$$r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$$

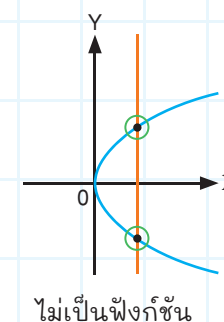
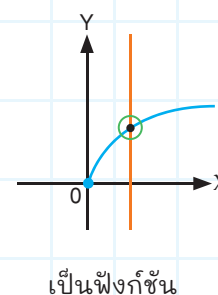
- $D_r = R_{r^{-1}}$ และ $R_r = D_{r^{-1}}$
- การเขียน r^{-1} แบบบอกเงื่อนไขมี 2 แบบ คือ
 - ใช้คู่อันดับ (x, y) แต่ต้องสลับที่ x และ y ในเงื่อนไขข้างหลัง
 - ใช้คู่อันดับ (y, x) แต่ตัวแปร x และ y ในเงื่อนไขข้างหลังยังคงเดิม
- กราฟของ r กับ r^{-1} จะมีเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตร

ฟังก์ชัน

- ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งสมาชิกในโดเมนแต่ละตัวจับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของความสัมพันธ์เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่งเขียนแทนด้วย f

$$\text{ถ้า } (x, y) \in f \text{ และ } (x, z) \in f \text{ แล้ว } y = z$$

- การพิจารณาว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดด้วยกราฟเป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชัน
 - ลากเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y ถ้ามีจุดตัดเพียง 1 จุด ความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน ถ้ามีจุดตัดมากกว่า 1 จุด ความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน



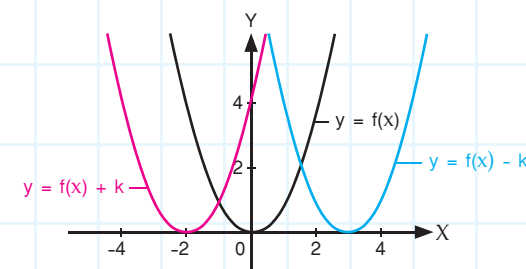
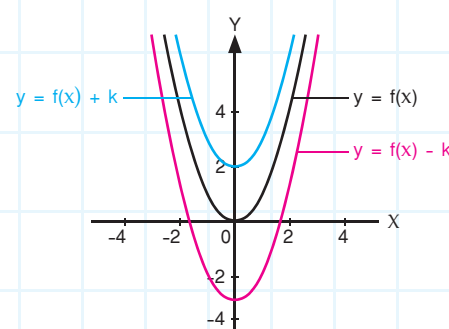
การเลื่อนขนาน

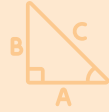
การเลื่อนขนานในแนวตั้ง

- $y = f(x) + k$ ได้จากการเลื่อนกราฟ $y = f(x)$ ขึ้นตามแนวแกน Y เป็นระยะ k หน่วย เมื่อ $k > 0$
- $y = f(x) - k$ ได้จากการเลื่อนกราฟ $y = f(x)$ ลงตามแนวแกน Y เป็นระยะ k หน่วย เมื่อ $k > 0$

การเลื่อนขนานในแนวนอน

- $y = f(x - k)$ ได้จากการเลื่อนกราฟ $y = f(x)$ ไปทางขวาตามแนวแกน X เป็นระยะ k หน่วย เมื่อ $k > 0$
- $y = f(x + k)$ ได้จากการเลื่อนกราฟ $y = f(x)$ ไปทางซ้ายตามแนวแกน X เป็นระยะ k หน่วย เมื่อ $k > 0$





แบบฝึกทักษะ

ประจำหน่วยการเรียนรู้ที่

1

ฟังก์ชันจาก A ไป B

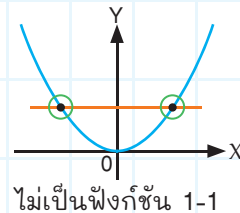
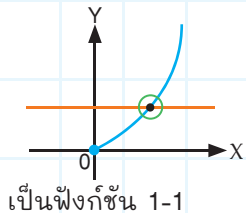
- f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีเซต A เป็นโดเมนและมีเรนจ์เป็นสับเซตของเซต B

ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

- f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีเซต A เป็นโดเมนและมีเซต B เป็นเรนจ์

ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B

- f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ
 - f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B
 - สำหรับ x_1, x_2 ใดๆ ในเซต A ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$
- การพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดด้วยกราฟเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
 - ลากเส้นตรงที่ขนานกับแกน X ถ้ามีจุดตัดเพียง 1 จุด จะเป็นฟังก์ชัน 1-1 ถ้ามีจุดตัดมากกว่า 1 จุด จะไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1



ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

- f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนเซต A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x_1 และ x_2 ใดๆ ใน A ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$
- f เป็นฟังก์ชันลดบนเซต A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x_1 และ x_2 ใดๆ ใน A ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$

ฟังก์ชันผกผัน

- f^{-1} เป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 เรียก f^{-1} ว่า ฟังก์ชันผกผัน

การดำเนินการทางพีชคณิตของฟังก์ชัน

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ เมื่อ $x \in D_f \cap D_g$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ เมื่อ $x \in D_f \cap D_g$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ เมื่อ $x \in D_f \cap D_g$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $x \in D_f \cap D_g$ และ $g(x) \neq 0$

ฟังก์ชันประกอบ

- $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ โดย $g \circ f$ จะหาได้เมื่อ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ และ $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$
- $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ โดย $f \circ g$ จะหาได้เมื่อ $R_g \cap D_f \neq \emptyset$ และ $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

คำชี้แจง : ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

- กำหนด $A = \{2, 6, 5, 7\}$ และ $B = \{5, 6\}$ ให้หา $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ และ $B \times B$
- ให้ตรวจสอบว่า ความสัมพันธ์ที่กำหนดในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชัน และถ้าเป็นฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ เพราะเหตุใด
 - $r_1 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2), (d, 3)\}$
 - $r_2 = \{(x, y) \mid y - 4 = 0\}$
- กำหนด $r = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x - 4}\}$ ให้หา r^{-1} โดเมนและเรนจ์ของ r^{-1} พร้อมทั้งเขียนกราฟ r และ r^{-1} บนระบบพิกัดฉากเดียวกัน
- กำหนด $f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 8), (6, 7)\}$ และ $g(x) = \{(1, 4), (3, 6), (9, 0), (10, 6)\}$ ให้หา $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ และ $\frac{g}{f}$
- กำหนด $f(x) = 2x$ และ $g(x) = x - 3$ ให้หาโดเมนของ $\frac{f}{g}$
- กำหนด $f = \{(x, y) \mid y = 2x - |2x|\}$ ให้หา D_f และ R_f
- ให้พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ว่า เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนเซตที่กำหนด
 - $f(x) = x^3 + 2$ บน $\mathbf{R}$
 - $g(x) = x^2 - 4x + 7$ บนช่วง $(-\infty, -2)$ และ $(2, \infty)$
- กำหนด $f(x) = 2x + 3$ ให้หา $f^{-1}(x)$
- กำหนด $f(x) = x^2 + 2$, $x \geq 0$ ให้หา f^{-1} พร้อมทั้งเขียนกราฟ f และ f^{-1} บนระบบพิกัดฉากเดียวกัน
- กำหนด $f(x) = x^2$ และ $g(x) = \sqrt{x + 3}$ ให้หา $(g \circ f)(x)$ และ $(f \circ g)(x)$
- กำหนด $f(x) = \frac{x - 3}{x}$ และ $g(x) = x + 2$ ให้หา $(f \circ g)(x + 1)$
- กำหนด $f(x) = x^2 + 1$ และ $g(x) = x^2 + 4x + 7$ ให้หาค่าของ $(f \circ g)^{-1}(13)$
- ณเดชต้องการล้อมรั้วให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเพื่อทำสวนผลไม้ โดยด้านหนึ่งของพื้นที่ที่ต้องการล้อมรั้วจะอยู่ติดคลองซึ่งไม่ต้องมีรั้วกัน ถ้ารั้วทั้งหมดยาว 160 เมตร ณเดชจะล้อมรั้วให้มีพื้นที่มากที่สุดได้เท่าใด โดยความยาวของรั้วยังคงเท่าเดิม