

คณิตศาสตร์

เล่ม 1

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ตามผลการเรียนรู้
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ผู้เรียบเรียง

นางวัชรารัตน์ กรอุษณกุล	รศ. ดร.อำพล ธรรมเจริญ	นายไอศุรีย์ สุดประเสริฐ
นางจินดา อยู่เป็นสุข	นายรณชัย มาเจริญทรัพย์	นายวุฒิชัย ศรีวสุธากุล
นางนพรัตน์ วันแก้ว	นางสาวสายสุณี สุทธิจักร์	

ผู้ตรวจ

ผศ.รุจิรา พิพิพัฒน์	นางสาวทองดี กุลแก้วสว่างวงศ์	นางสาวบุรณกมล เอย์นิน
---------------------	------------------------------	-----------------------

บรรณาธิการ

นางสาวจันทร์เพ็ญ ชุ่มคช



คำแนะนำในการใช้สื่อ

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 จัดทำขึ้นสำหรับใช้ประกอบการเรียนการสอน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยดำเนินการจัดทำให้สอดคล้องตามผลการเรียนรู้ในสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ทุกประการ ส่งเสริมทักษะที่จำเป็นสำหรับการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 ทั้งทักษะด้านการคิดวิเคราะห์ การคิดอย่างมีวิจารณญาณ การแก้ปัญหา การคิดสร้างสรรค์ การใช้เทคโนโลยี การสื่อสาร และการร่วมมือ เพื่อให้ผู้เรียนรู้เท่าทันการเปลี่ยนแปลงของระบบเศรษฐกิจ สังคม วัฒนธรรม และสภาพแวดล้อม สามารถแข่งขันและอยู่ร่วมกับประชาคมโลกได้

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
คณะผู้เรียบเรียงได้จัดแบ่งออกเป็น
2 เล่ม ดังนี้



องค์ประกอบต่าง ๆ ในแต่ละหน่วย

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

"GPS เป็นเทคโนโลยีที่ใช้ในการระบุตำแหน่งของวัตถุหรือบุคคลบนพื้นผิวโลกโดยใช้การส่งคลื่นสัญญาณจากดาวเทียมโลกไปยังเครื่องรับ จากนั้นจึงแปลงค่าและใช้วิธีหาค่าของเส้นเมริเดียนที่ตรงนั้น"

ได้เรียนรู้ว่า GPS มีความเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันตรีโกณมิติอย่างไร

ผลการเรียนรู้

- อธิบายฟังก์ชันตรีโกณมิติและกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- อธิบายฟังก์ชันตรีโกณมิติและกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- อธิบายฟังก์ชันตรีโกณมิติและกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- อธิบายฟังก์ชันตรีโกณมิติและกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

- อธิบายฟังก์ชันตรีโกณมิติและกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- อธิบายฟังก์ชันตรีโกณมิติและกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- อธิบายฟังก์ชันตรีโกณมิติและกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- อธิบายฟังก์ชันตรีโกณมิติและกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

การหาพื้นที่ในรูปทรงเรขาคณิต

ความรู้ก่อนเรียน

ทบทวนความรู้เดิมเพื่อเชื่อมโยงเข้าสู่เนื้อหาใหม่

ความรู้ก่อนเรียน

ทบทวนความรู้เดิมเพื่อเชื่อมโยงเข้าสู่เนื้อหาใหม่

ความรู้ก่อนเรียน

ทบทวนความรู้เดิมเพื่อเชื่อมโยงเข้าสู่เนื้อหาใหม่

ผลการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับเนื้อหาในหน่วยการเรียนรู้

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม
ขอบข่ายเนื้อหาในหน่วยการเรียนรู้

QR Code แบบทดสอบ
พื้นฐานก่อนเรียน
แบบฝึกหัดเพื่อทบทวนหรือตรวจสอบความรู้พื้นฐานก่อนเรียน

ความรู้ก่อนเรียน

ทบทวนความรู้เดิมเพื่อเชื่อมโยงเข้าสู่เนื้อหาใหม่

ความรู้ก่อนเรียน

ทบทวนความรู้เดิมเพื่อเชื่อมโยงเข้าสู่เนื้อหาใหม่

ความรู้ก่อนเรียน

ทบทวนความรู้เดิมเพื่อเชื่อมโยงเข้าสู่เนื้อหาใหม่

ความรู้เกี่ยวกับการใช้เทคโนโลยีเป็นเครื่องมือเพื่อช่วยตรวจสอบคำตอบ

แบบทดสอบ

ตรวจสอบคำตอบ

ตรวจสอบคำตอบ

ตรวจสอบคำตอบ

ตรวจสอบคำตอบ

เกร็ดน่ารู้

เสริมความรู้ทั่วไปที่สอดคล้องกับเนื้อหา

เกร็ดน่ารู้

เสริมความรู้ทั่วไปที่สอดคล้องกับเนื้อหา

เกร็ดน่ารู้

เสริมความรู้ทั่วไปที่สอดคล้องกับเนื้อหา

กิจกรรมคณิตศาสตร์

เพื่อส่งเสริมการเรียนรู้แบบ Active Learning

กิจกรรมคณิตศาสตร์

เพื่อส่งเสริมการเรียนรู้แบบ Active Learning

กิจกรรมคณิตศาสตร์

เพื่อส่งเสริมการเรียนรู้แบบ Active Learning

คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง

ที่เชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริง

คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง

ที่เชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริง

คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง

ที่เชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริง

แบบฝึกทักษะ

แบ่งระดับความยากง่ายเหมาะสมกับระดับการเรียนรู้ของผู้เรียน

แบบฝึกทักษะ

แบ่งระดับความยากง่ายเหมาะสมกับระดับการเรียนรู้ของผู้เรียน

แบบฝึกทักษะ

แบ่งระดับความยากง่ายเหมาะสมกับระดับการเรียนรู้ของผู้เรียน

แบบแนวคิด

เทคนิคต่างๆ ที่ขึ้นวิธีวิธีการแก้โจทย์ทางคณิตศาสตร์

แบบแนวคิด

เทคนิคต่างๆ ที่ขึ้นวิธีวิธีการแก้โจทย์ทางคณิตศาสตร์

แบบแนวคิด

เทคนิคต่างๆ ที่ขึ้นวิธีวิธีการแก้โจทย์ทางคณิตศาสตร์

สรุปแนวคิดหลัก

โดยรวมของหน่วยการเรียนรู้เพื่อทบทวนความรู้ที่ได้แก่ผู้เรียน

สรุปแนวคิดหลัก

โดยรวมของหน่วยการเรียนรู้เพื่อทบทวนความรู้ที่ได้แก่ผู้เรียน

สรุปแนวคิดหลัก

โดยรวมของหน่วยการเรียนรู้เพื่อทบทวนความรู้ที่ได้แก่ผู้เรียน

แบบฝึกทักษะ

ประจำหน่วยการเรียนรู้

เพื่อประเมินความรู้ความเข้าใจของผู้เรียนประจำหน่วยการเรียนรู้

แบบฝึกทักษะ

ประจำหน่วยการเรียนรู้

เพื่อประเมินความรู้ความเข้าใจของผู้เรียนประจำหน่วยการเรียนรู้

แบบฝึกทักษะ

ประจำหน่วยการเรียนรู้

เพื่อประเมินความรู้ความเข้าใจของผู้เรียนประจำหน่วยการเรียนรู้

แนวข้อสอบ A-Level

แนวข้อสอบเพื่อเข้าศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษา

แนวข้อสอบ A-Level

แนวข้อสอบเพื่อเข้าศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษา

แนวข้อสอบ A-Level

แนวข้อสอบเพื่อเข้าศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษา

ข้อควรระวัง

อธิบายในสิ่งที่ผู้เรียนมักเข้าใจผิดหรือคลาดเคลื่อน

ข้อควรระวัง

อธิบายในสิ่งที่ผู้เรียนมักเข้าใจผิดหรือคลาดเคลื่อน

ข้อควรระวัง

อธิบายในสิ่งที่ผู้เรียนมักเข้าใจผิดหรือคลาดเคลื่อน

ลองทำดู

เพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกทำจนเกิดความชำนาญ

ลองทำดู

เพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกทำจนเกิดความชำนาญ

ลองทำดู

เพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกทำจนเกิดความชำนาญ

คณิตน่ารู้

เสริมความรู้หรือข้อสังเกตที่ได้จากเนื้อหาที่เรียน

คณิตน่ารู้

เสริมความรู้หรือข้อสังเกตที่ได้จากเนื้อหาที่เรียน

คณิตน่ารู้

เสริมความรู้หรือข้อสังเกตที่ได้จากเนื้อหาที่เรียน

Thinking Time

คำถามกระตุ้นให้ผู้เรียนได้คิดต่อยอดจากเนื้อหาที่เรียน

Thinking Time

คำถามกระตุ้นให้ผู้เรียนได้คิดต่อยอดจากเนื้อหาที่เรียน

Thinking Time

คำถามกระตุ้นให้ผู้เรียนได้คิดต่อยอดจากเนื้อหาที่เรียน

QR Code

ใช้สมาร์ทโฟนเพื่อสแกนเพื่อดูสื่อดิจิทัลเพิ่มเติม

QR Code

ใช้สมาร์ทโฟนเพื่อสแกนเพื่อดูสื่อดิจิทัลเพิ่มเติม

QR Code

ใช้สมาร์ทโฟนเพื่อสแกนเพื่อดูสื่อดิจิทัลเพิ่มเติม

กิจกรรมการเรียนรู้เชิงรุก (Active Learning)

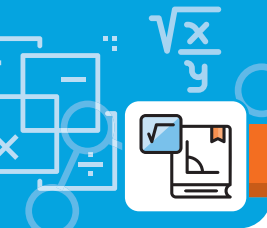
กิจกรรมที่เน้นให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติจริง เพื่อให้เกิดการเรียนรู้ และสร้างองค์ความรู้ด้วยตัวเอง

กิจกรรมการเรียนรู้เชิงรุก (Active Learning)

กิจกรรมที่เน้นให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติจริง เพื่อให้เกิดการเรียนรู้ และสร้างองค์ความรู้ด้วยตัวเอง

กิจกรรมการเรียนรู้เชิงรุก (Active Learning)

กิจกรรมที่เน้นให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติจริง เพื่อให้เกิดการเรียนรู้ และสร้างองค์ความรู้ด้วยตัวเอง



สารบัญ คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1

หน่วยการเรียนรู้ที่

1

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

2

1.1 การวัดความยาวส่วนโค้ง และพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง	4
1.2 ค่าของฟังก์ชันไซน์ และฟังก์ชันโคไซน์	7
1.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ	25
1.4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม	33
1.5 การใช้ตารางค่าฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ	41
1.6 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	47
1.7 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวก และผลต่างของจำนวนจริง หรือมุม	60
1.8 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่า สามเท่าและครึ่งเท่าของ จำนวนจริงหรือมุม	73
1.9 ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ	80
1.10 ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	85
1.11 เอกลักษ์ณตรีโกณมิติ และสมการตรีโกณมิติ	97
1.12 กฎของไซน์และโคไซน์	103
1.13 การหาระยะทางและความสูง	110
คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง	115
สรุปแนวคิดหลัก	116
แบบฝึกทักษะประจำ หน่วยการเรียนรู้ที่ 1	120

หน่วยการเรียนรู้ที่

2

เมทริกซ์

122

2.1 ระบบสมการเชิงเส้น	124
2.2 เมทริกซ์	130
2.3 เมทริกซ์ผกผัน	157
2.4 ดีเทอร์มิแนนต์	164
2.5 การใช้เมทริกซ์แก้ระบบ สมการเชิงเส้น	183
คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง	200
สรุปแนวคิดหลัก	201
แบบฝึกทักษะประจำ หน่วยการเรียนรู้ที่ 2	205

หน่วยการเรียนรู้ที่

3

เวกเตอร์ในสามมิติ

206

3.1 ระบบพิกัดฉากสามมิติ	208
3.2 เวกเตอร์	218
3.3 เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก	237
3.4 ผลคูณเชิงสเกลาร์	258
3.5 ผลคูณเชิงเวกเตอร์	265
3.6 การนำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา	271
คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง	276
สรุปแนวคิดหลัก	277
แบบฝึกทักษะประจำ หน่วยการเรียนรู้ที่ 3	280

กิจกรรมการเรียนรู้เชิงรุก (Active Learning)

282

ภาคผนวก

283

บรรณานุกรม

292



คำอธิบายรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์ เล่ม 1

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

เวลา 80 ชั่วโมง

ศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ การวัดความยาวส่วนโค้งและพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง ค่าของ ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของสองเท่า สามเท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริงหรือมุม ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่างและผลคูณของ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เอกลักษ์ณและสมการตรีโกณมิติ กฎของไซน์และโคไซน์ และการหาระยะทางและความสูง ระบบสมการเชิงเส้น การหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ 2×2 ดีเทอร์มิแนนต์ ของเมทริกซ์ $n \times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม และการใช้เมทริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น ระบบ พิกัดฉากสามมิติ เวกเตอร์ เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก ผลคูณเชิงสเกลาร์ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ และการนำเวกเตอร์ ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

โดยการจัดประสบการณ์หรือสร้างสถานการณ์ในชีวิตประจำวันที่เกี่ยวข้องให้ผู้เรียนได้ศึกษา ค้นคว้า ฝึกทักษะ โดยการปฏิบัติจริง ทดลอง สรุป รายงาน เพื่อพัฒนาทักษะ กระบวนการในการคิดคำนวณ การแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และนำประสบการณ์ด้านความรู้ ความคิด ทักษะและ กระบวนการที่ได้ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์

เพื่อให้เห็นคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานได้อย่างเป็นระบบ มีระเบียบ รอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ และมีความเชื่อมั่นในตนเอง

ผลการเรียนรู้

- เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- แก้สมการตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา
- เข้าใจความหมาย หาผลลัพธ์ของการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่าง เมทริกซ์ และหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $n \times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ ที่ไม่เกินสาม
- หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ 2×2
- แก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน และการดำเนินการตามแถว
- หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ หาผลคูณเชิงสเกลาร์ และผลคูณเชิงเวกเตอร์
- นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

รวม 8 ผลการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

“GPS เป็นเทคโนโลยีที่ใช้ช่วยในการระบุตำแหน่งของวัตถุหรือบุคคลบนพื้นผิวโลกโดยใช้การส่งคลื่นสัญญาณจากพื้นผิวโลกไปยังดาวเทียม จากนั้นจึงส่งต่อกลับมายังผู้รับที่อยู่บนพื้นผิวโลกอีกครั้งหนึ่ง”



นักเรียนคิดว่า GPS มีความเกี่ยวข้องกับ ฟังก์ชันตรีโกณมิติอย่างไร

ผลการเรียนรู้

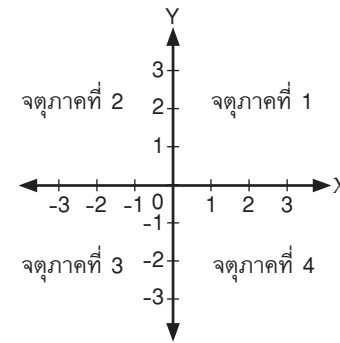
- เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- แก้สมการตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

- ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน
- เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ
- กฎของโคไซน์และกฎของไซน์



กราฟของคู่อันดับบนระบบพิกัดฉาก



จากระบบพิกัดฉาก จะได้ว่า

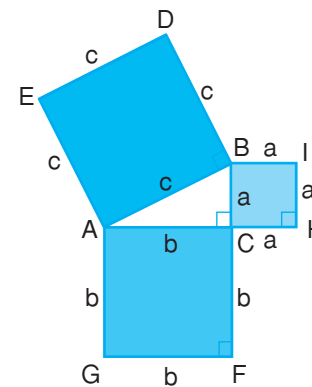
ถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 1 แล้ว $x > 0$ และ $y > 0$

ถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 2 แล้ว $x < 0$ และ $y > 0$

ถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 3 แล้ว $x < 0$ และ $y < 0$

ถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 4 แล้ว $x > 0$ และ $y < 0$

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส



จากรูป สามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้ 2 แบบ ดังนี้

- ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก
- ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก

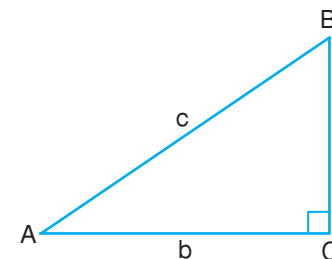
$$a^2 + b^2 = c^2$$

กำลังสองของความยาวด้าน BC หรือพื้นที่ของ $\square BCHI$

กำลังสองของความยาวด้าน AB หรือพื้นที่ของ $\square ABDE$

กำลังสองของความยาวด้าน AC หรือพื้นที่ของ $\square ACFG$

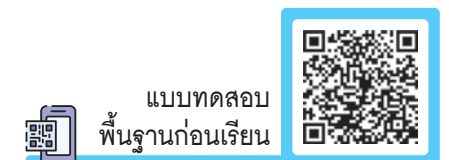
อัตราส่วนตรีโกณมิติ



ไซน์ของมุม A หรือ $\sin A$ คือ $\frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

โคไซน์ของมุม A หรือ $\cos A$ คือ $\frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

แทนเจนต์ของมุม A หรือ $\tan A$ คือ $\frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}$

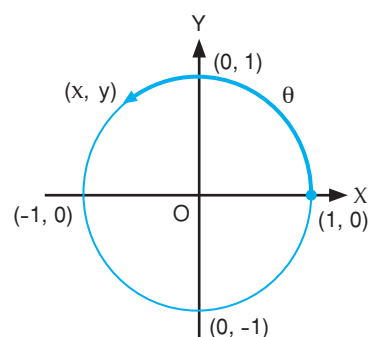


แบบทดสอบ
พื้นฐานก่อนเรียน

1.1 การวัดความยาวส่วนโค้งและพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง

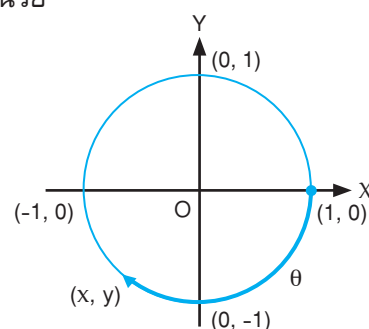
นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า ความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ เป็นความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด รัศมียาว r หน่วย แต่ถ้าความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ เป็นความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด รัศมียาว 1 หน่วย และมีความยาวเส้นรอบวงเท่ากับ 2π หน่วย เรีกวงกลมนี้ว่า วงกลมหนึ่งหน่วย (unit circle)

วงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อวัดระยะจากจุด $(1, 0)$ ไปบนส่วนโค้งของวงกลมเป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย จะมีจุดสิ้นสุดเพียง 1 จุดเท่านั้น คือ จุดปลายส่วนโค้งคู่อันดับ (x, y) ดังรูป



รูปที่ 1 $\theta > 0$

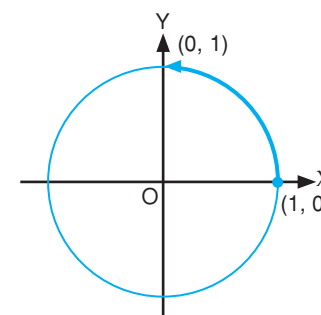
จากรูปที่ 1 ถ้า $\theta > 0$ ให้วัดจากจุด $(1, 0)$ ไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเป็นระยะ θ หน่วย



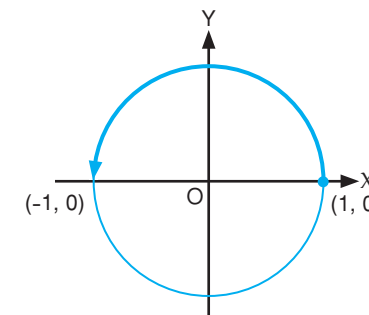
รูปที่ 2 $\theta < 0$

จากรูปที่ 2 ถ้า $\theta < 0$ ให้วัดจากจุด $(1, 0)$ ไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาเป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย

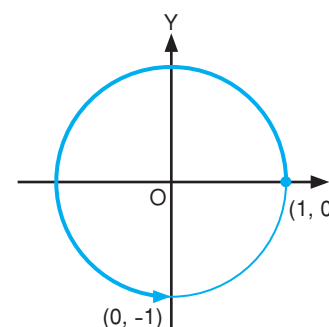
รูปต่อไปนี้เป็นแสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนด θ ให้มีค่าต่าง ๆ กัน ดังนี้



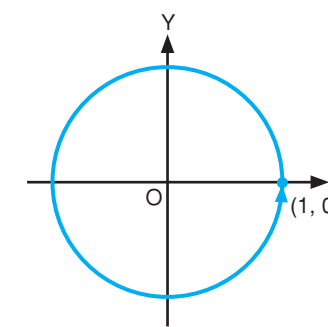
รูปที่ 3 $\theta = \frac{\pi}{2}$



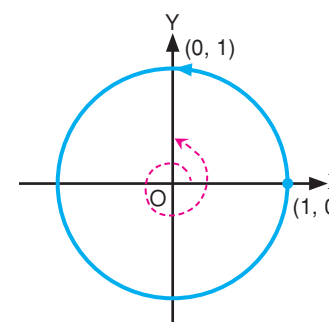
รูปที่ 4 $\theta = \pi$



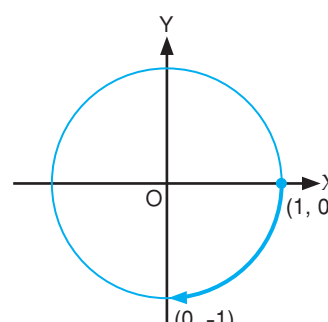
รูปที่ 5 $\theta = \frac{3\pi}{2}$



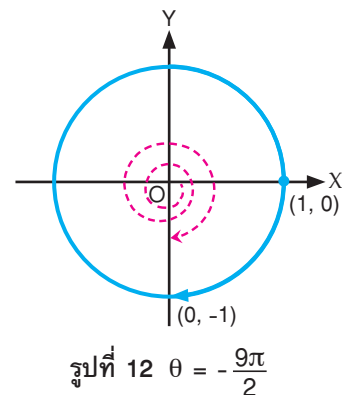
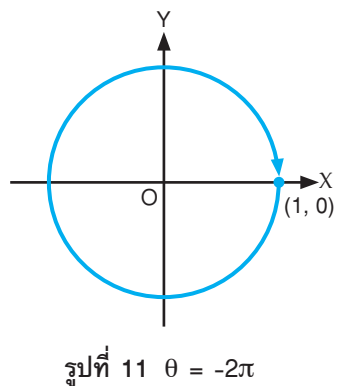
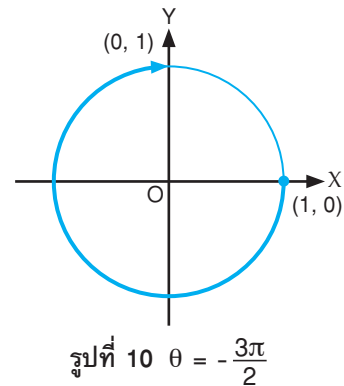
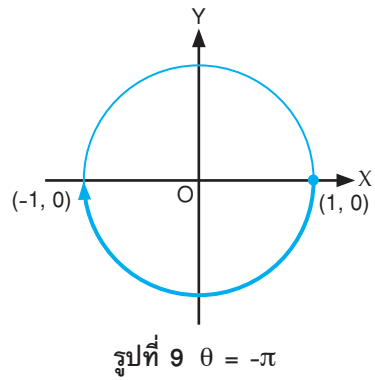
รูปที่ 6 $\theta = 2\pi$



รูปที่ 7 $\theta = \frac{5\pi}{2}$



รูปที่ 8 $\theta = -\frac{\pi}{2}$



จากรูปที่ 3-6 และ 8-11 จะเห็นว่า $|\theta| \leq 2\pi$ แสดงว่า วัดความยาวส่วนโค้งจากจุด (1, 0) ไม่เกิน 1 รอบ แต่รูปที่ 7 และ 12 จะเห็นว่า $|\theta| > 2\pi$ แสดงว่า วัดความยาวส่วนโค้งจากจุด (1, 0) เกิน 1 รอบ

จดจำ
วงกลมหนึ่งหน่วยเป็นวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ 1 หน่วย ดังนั้น วงกลมหนึ่งหน่วยจะมีเส้นรอบวงยาวเท่ากับ $2\pi(1) = 2\pi$ หน่วย



Thinking Time

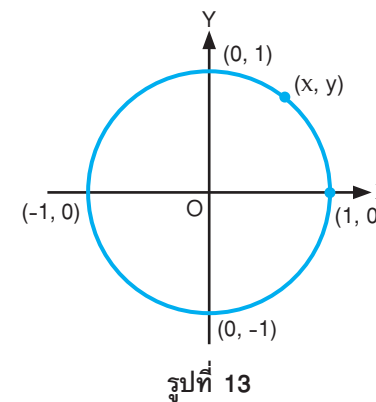
ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย บนวงกลมหนึ่งหน่วยของรูปที่ 3-12 เป็นเท่าใด
- 2) จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย บนวงกลมหนึ่งหน่วยของรูปที่ 3-12 รูปใดบ้างที่เป็นจุดเดียวกัน
- 3) ถ้าวัดระยะจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมเป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย ด้วย θ ที่แตกต่างกันหลายค่า แล้วพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย จะเป็นจุดเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

1.2 ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์

ในหัวข้อนี้ นักเรียนจะได้ศึกษาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริง ซึ่งต้องใช้การเชื่อมโยงความรู้จากการหาภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว $|\theta|$ หน่วย เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงบวก โดยมีแกน X หรือแกน Y เป็นเส้นสะท้อน

1. ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ (Sine Function and Cosine Function)



พิจารณาพิกัดของ (x, y) จะเห็นว่า

- เมื่อ $\theta = 0$ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ มีพิกัด (1, 0)
 $\theta = \frac{\pi}{2}$ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\frac{\pi}{2}|$ มีพิกัด (0, 1)
 $\theta = \pi$ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\pi|$ มีพิกัด (-1, 0)
 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\frac{3\pi}{2}|$ มีพิกัด (0, -1)
 $\theta = 2\pi$ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|2\pi|$ มีพิกัด (1, 0)

จึงกล่าวได้ว่า ค่าของ θ หนึ่งค่า จะกำหนดพิกัด (x, y) ซึ่งเป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยได้เพียงพิกัดเดียว นั่นคือ θ หนึ่งค่า กำหนดค่าของ x ได้หนึ่งค่า และกำหนดค่าของ y ได้หนึ่งค่า ดังตาราง

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	1	0	-1	0	1
y	0	1	0	-1	0

จากตารางเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง θ กับ x ได้ ดังนี้

$$\{(0, 1), (\frac{\pi}{2}, 0), (\pi, -1), (\frac{3\pi}{2}, 0), (2\pi, 1)\}$$

ถ้า f เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง θ กับ x ซึ่งไม่มีสองคู่อันดับใดใช้สมาชิกตัวหน้าซ้ำ จะได้ว่า $f = \{(\theta, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = f(\theta)\}$

เรียกความสัมพันธ์นี้ว่า **ฟังก์ชันโคไซน์** เมื่อ $x = \cosine \theta$ หรือ $x = \cos \theta$

ดังนั้น $f = \{(\theta, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \cos \theta\}$

จากตารางเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง θ กับ y ได้ ดังนี้

$$\{(0, 0), (\frac{\pi}{2}, 1), (\pi, 0), (\frac{3\pi}{2}, -1), (2\pi, 0)\}$$



วงกลมหนึ่งหน่วย



www.aksorn.com/simulation/mat09166

ถ้า g เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง θ กับ y ซึ่งไม่มีสองคู่อันดับใดใช้สมาชิกตัวหน้าซ้ำ

จะได้ว่า $g = \{(\theta, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = g(\theta)\}$

เรียกความสัมพันธ์นี้ว่า ฟังก์ชันไซน์ เมื่อ $y = \sin \theta$ หรือ $y = \sin \theta$

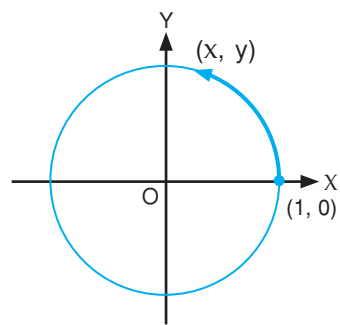
ดังนั้น $g = \{(\theta, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = \sin \theta\}$

จากวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด เป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ จะเห็นว่า $-1 \leq y \leq 1$ และ $-1 \leq x \leq 1$ ดังนั้น ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์เป็นจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1

จากสมการ $x^2 + y^2 = 1$, $x = \cos \theta$ และ $y = \sin \theta$ จะได้ความสัมพันธ์ของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ ดังนี้

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \text{ เมื่อ } \theta \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

2. ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์



รูปที่ 14

จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วยและความสัมพันธ์ $x = \cos \theta$ และ $y = \sin \theta$ จะเห็นว่า ถ้าจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ มีพิกัด (x, y) แล้วพิกัด (x, y) จะเขียนแทนด้วย $(\cos \theta, \sin \theta)$ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1

ให้เขียนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย ของ θ ต่อไปนี้ ในรูป $(\cos \theta, \sin \theta)$

- 1) π 2) $\frac{\pi}{2}$ 3) -2π 4) $-\frac{3\pi}{2}$

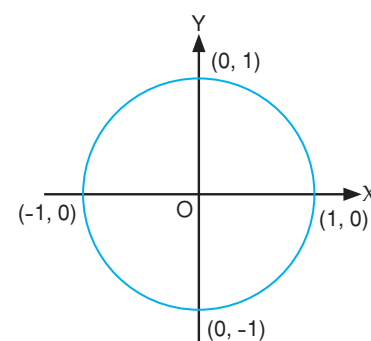
- วิธีทำ 1) $(\cos \pi, \sin \pi)$ 2) $(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2})$
3) $(\cos (-2\pi), \sin (-2\pi))$ 4) $(\cos (-\frac{3\pi}{2}), \sin (-\frac{3\pi}{2}))$

ลองทำดู

ให้เขียนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย ของ θ ต่อไปนี้ ในรูป $(\cos \theta, \sin \theta)$

- 1) 2π 2) $\frac{3\pi}{2}$ 3) $-\frac{\pi}{2}$ 4) $-\pi$

ตัวอย่างที่ 2



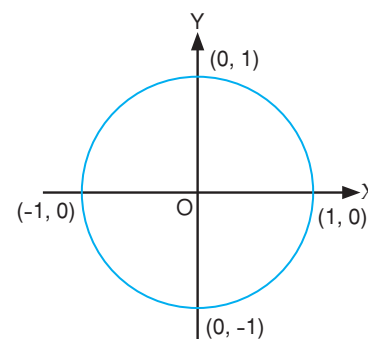
จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วยที่กำหนด ให้หาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ต่อไปนี้

- 1) $\sin 0$ 2) $\cos \frac{\pi}{2}$
3) $\sin \frac{3\pi}{2}$ 4) $\cos 2\pi$
5) $\sin (-\frac{\pi}{2})$ 6) $\cos (-\frac{3\pi}{2})$
7) $\sin (-\pi)$ 8) $\cos (-2\pi)$

วิธีทำ จากความสัมพันธ์ $x = \cos \theta$ และ $y = \sin \theta$ จะได้ว่า

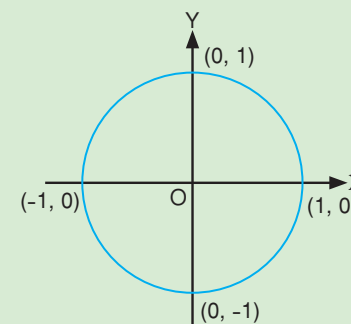
- 1) $\sin 0 = 0$ 2) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$
3) $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ 4) $\cos 2\pi = 1$
5) $\sin (-\frac{\pi}{2}) = -1$ 6) $\cos (-\frac{3\pi}{2}) = 0$
7) $\sin (-\pi) = 0$ 8) $\cos (-2\pi) = 1$

ลองทำดู



จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วยที่กำหนด ให้หาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ต่อไปนี้

- 1) $\cos 0$ 2) $\sin \frac{\pi}{2}$
3) $\cos \frac{3\pi}{2}$ 4) $\sin 2\pi$
5) $\cos (-\frac{\pi}{2})$ 6) $\sin (-\frac{3\pi}{2})$
7) $\cos (-\pi)$ 8) $\sin (-2\pi)$

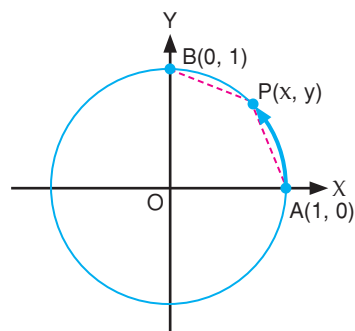


รูปที่ 15

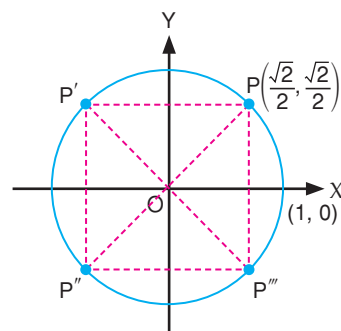
ให้ $P(\theta)$ แทนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วย จะได้ว่า
 $P(n\pi) = (1, 0)$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่
 $P(n\pi) = (-1, 0)$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงบวก

1) การหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}$ และ $\cos \frac{\pi}{4}$



รูปที่ 16



รูปที่ 17

จากรูปที่ 16 กำหนดจุด $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง AB

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย

แสดงว่า ส่วนโค้ง PA ยาวเท่ากับส่วนโค้ง PB ซึ่งยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย

จะได้ว่า คอร์ด PA ยาวเท่ากับคอร์ด PB

ดังนั้น

$$PA = PB$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$$

$$x = y$$

จาก $x^2 + y^2 = 1$ (สมการวงกลมของวงกลมหนึ่งหน่วย)

จะได้ว่า

$$2x^2 = 1$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

เนื่องจากจุด $P(x, y)$ อยู่ในจุดภาคที่ 1 จะได้ว่า $x > 0$ และ $y > 0$

$$\text{ดังนั้น } x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ และ } y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

นั่นคือ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย คือ จุด $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\text{จะได้ว่า } \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ และ } \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

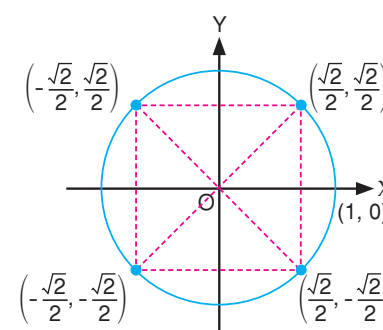
จากรูปที่ 17 นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริง $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $2n\pi \pm \frac{3\pi}{4}$, $2n\pi \pm \frac{5\pi}{4}$ และ $2n\pi \pm \frac{7\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม เช่น $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}$, $\frac{29\pi}{4}$, $\frac{39\pi}{4}$

ตัวอย่างที่ 3

ให้หาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ต่อไปนี้ โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย

- | | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $\cos \frac{3\pi}{4}$ | 2) $\sin \frac{3\pi}{4}$ | 3) $\cos \frac{5\pi}{4}$ | 4) $\sin \frac{5\pi}{4}$ |
| 5) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ | 6) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ | 7) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ | 8) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ |

วิธีทำ



จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วย จะได้ว่า

จุด $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

และ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลม

หนึ่งหน่วยที่ยาว $\left|\frac{\pi}{4}\right|$, $\left|\frac{3\pi}{4}\right|$, $\left|\frac{5\pi}{4}\right|$ และ $\left|\frac{7\pi}{4}\right|$

ตามลำดับ เมื่อวัดจากจุด $(1, 0)$

ในทำนองเดียวกัน จุด $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ และ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ก็เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว $\left|-\frac{\pi}{4}\right|$, $\left|-\frac{3\pi}{4}\right|$, $\left|-\frac{5\pi}{4}\right|$ และ $\left|-\frac{7\pi}{4}\right|$ ตามลำดับ เมื่อวัดจากจุด $(1, 0)$ เช่นกัน

จากความสัมพันธ์ $x = \cos \theta$ และ $y = \sin \theta$ เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย จะได้ว่า

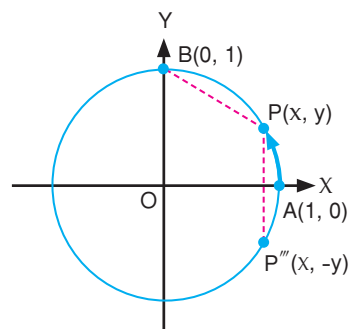
- | | |
|---|---|
| 1) $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 2) $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 3) $\cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 4) $\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 5) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 6) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 7) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 8) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ |

ลองทำ

ให้หาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ต่อไปนี้ โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย

- 1) $\cos \frac{7\pi}{4}$
- 2) $\sin \frac{7\pi}{4}$
- 3) $\cos \frac{11\pi}{4}$
- 4) $\sin \frac{11\pi}{4}$
- 5) $\cos \left(-\frac{7\pi}{4}\right)$
- 6) $\sin \left(-\frac{7\pi}{4}\right)$
- 7) $\cos \left(-\frac{5\pi}{4}\right)$
- 8) $\sin \left(-\frac{5\pi}{4}\right)$

2) การหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{6}$ และ $\cos \frac{\pi}{6}$



รูปที่ 18

จากรูปที่ 18 กำหนดจุด $P(x, y)$ เป็นจุดบนส่วนโค้ง AB ที่ทำให้ส่วนโค้ง PA ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย จะได้ว่า ส่วนโค้ง PB ยาว $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ หน่วย กำหนดจุด $P'''(x, -y)$ เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนจุด $P(x, y)$ โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน จะได้ว่า ส่วนโค้ง AP''' ยาวเท่ากับส่วนโค้ง PA

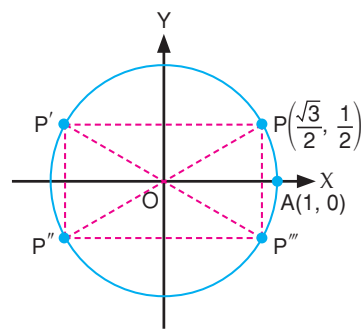
ดังนั้น ส่วนโค้ง PP''' ยาว $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ หน่วย

นั่นคือ ส่วนโค้ง PP''' ยาวเท่ากับส่วนโค้ง PB

ดังนั้น คอร์ด PP''' ยาวเท่ากับคอร์ด PB

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} PP''' &= PB \\ \sqrt{(x - x)^2 + (y + y)^2} &= \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2} \\ 4y^2 &= x^2 + y^2 - 2y + 1 \\ 4y^2 + 2y - 2 &= 0 \quad (\text{เนื่องจาก } x^2 + y^2 = 1) \\ 2y^2 + y - 1 &= 0 \\ (2y - 1)(y + 1) &= 0 \\ y &= \frac{1}{2} \quad \text{หรือ} \quad y = -1 \end{aligned}$$



รูปที่ 19

เนื่องจากจุด $P(x, y)$ อยู่ในจุดภาคที่ 1 จะได้ว่า $x > 0$ และ $y > 0$

ดังนั้น $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และเนื่องจาก $x^2 + y^2 = 1$ จะได้ว่า $y = \frac{1}{2}$

นั่นคือ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย คือ จุด $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

จะได้ว่า $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

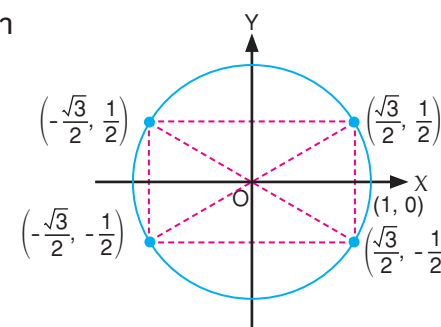
จากรูปที่ 19 นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริง $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}, 2n\pi \pm \frac{7\pi}{6}$ และ $2n\pi \pm \frac{11\pi}{6}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม เช่น $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}$

ตัวอย่างที่ 4

ให้หาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ต่อไปนี้ โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย

- 1) $\cos \frac{5\pi}{6}$
- 2) $\sin \frac{5\pi}{6}$
- 3) $\cos \frac{7\pi}{6}$
- 4) $\sin \frac{7\pi}{6}$
- 5) $\cos \left(-\frac{\pi}{6}\right)$
- 6) $\sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)$
- 7) $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$
- 8) $\sin \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

วิธีทำ



จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วย จะได้ว่า

จุด $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ และ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลม

หนึ่งหน่วยที่ยาว $\left|\frac{\pi}{6}\right|, \left|\frac{5\pi}{6}\right|, \left|\frac{7\pi}{6}\right|$ และ $\left|\frac{11\pi}{6}\right|$

ตามลำดับ เมื่อวัดจากจุด $(1, 0)$

ในทำนองเดียวกัน จุด $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ และ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ก็เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว $\left|-\frac{\pi}{6}\right|, \left|-\frac{5\pi}{6}\right|, \left|-\frac{7\pi}{6}\right|$ และ $\left|-\frac{11\pi}{6}\right|$ ตามลำดับ เมื่อวัดจากจุด $(1, 0)$ เช่นกัน

จากความสัมพันธ์ $x = \cos \theta$ และ $y = \sin \theta$ เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย จะได้ว่า

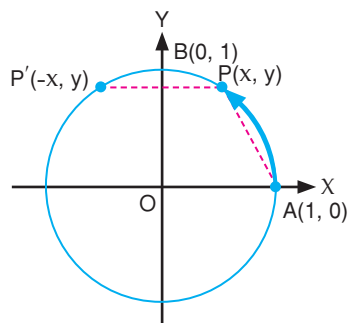
- 1) $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 2) $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$
- 3) $\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 4) $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
- 5) $\cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 6) $\sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
- 7) $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 8) $\sin \left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

ลองทำ

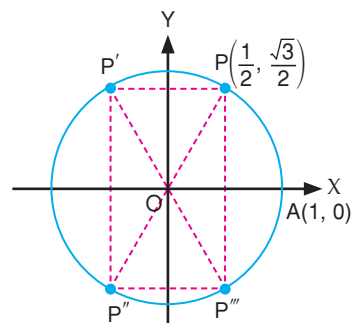
ให้หาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ต่อไปนี้ โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย

- 1) $\cos \frac{11\pi}{6}$
- 2) $\sin \frac{11\pi}{6}$
- 3) $\cos \frac{17\pi}{6}$
- 4) $\sin \frac{17\pi}{6}$
- 5) $\cos \left(-\frac{7\pi}{6}\right)$
- 6) $\sin \left(-\frac{7\pi}{6}\right)$
- 7) $\cos \left(-\frac{11\pi}{6}\right)$
- 8) $\sin \left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

3) การหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}$ และ $\cos \frac{\pi}{3}$



รูปที่ 20



รูปที่ 21

จากรูปที่ 20 กำหนดจุด $P(x, y)$ เป็นจุดบนส่วนโค้ง AB ที่ทำให้ส่วนโค้ง PA ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย กำหนดจุด $P'(-x, y)$ เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนจุด $P(x, y)$ โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน จะได้ว่า ส่วนโค้ง PP' ยาวเท่ากับส่วนโค้ง PA ซึ่งยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

ดังนั้น คอร์ด PP' ยาวเท่ากับคอร์ด PA

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} PP' &= PA \\ \sqrt{(x+x)^2 + (y-y)^2} &= \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} \\ 4x^2 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 \\ 4x^2 + 2x - 2 &= 0 \quad (\text{เนื่องจาก } x^2 + y^2 = 1) \\ 2x^2 + x - 1 &= 0 \\ (2x-1)(x+1) &= 0 \\ x &= \frac{1}{2} \quad \text{หรือ} \quad x = -1 \end{aligned}$$

เนื่องจากจุด $P(x, y)$ อยู่ในจุดภาคที่ 1 จะได้ว่า $x > 0$ และ $y > 0$

ดังนั้น $x = \frac{1}{2}$ และเนื่องจาก $x^2 + y^2 = 1$ จะได้ว่า $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

นั่นคือ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย คือ จุด $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

จะได้ว่า $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ และ $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

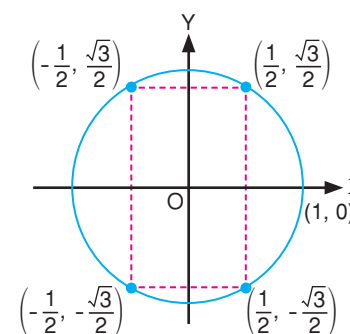
จากรูปที่ 21 นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริง $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, $2n\pi \pm \frac{4\pi}{3}$ และ $2n\pi \pm \frac{5\pi}{3}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม เช่น $-\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{10\pi}{3}$, $\frac{14\pi}{3}$

ตัวอย่างที่ 5

ให้หาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ต่อไปนี้ โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย

- 1) $\sin \frac{4\pi}{3}$
- 2) $\cos \frac{4\pi}{3}$
- 3) $\sin \frac{5\pi}{3}$
- 4) $\cos \frac{5\pi}{3}$
- 5) $\sin \left(-\frac{\pi}{3}\right)$
- 6) $\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right)$
- 7) $\sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$
- 8) $\cos \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

วิธีทำ



จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วย จะได้ว่า

จุด $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ และ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว $\left|\frac{\pi}{3}\right|$, $\left|\frac{2\pi}{3}\right|$, $\left|\frac{4\pi}{3}\right|$ และ $\left|\frac{5\pi}{3}\right|$ ตามลำดับ เมื่อวัดจากจุด $(1, 0)$

ในทำนองเดียวกัน จุด $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ และ $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ก็เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว $\left|-\frac{\pi}{3}\right|$, $\left|-\frac{2\pi}{3}\right|$, $\left|-\frac{4\pi}{3}\right|$ และ $\left|-\frac{5\pi}{3}\right|$ ตามลำดับ เมื่อวัดจากจุด $(1, 0)$ เช่นกัน

จากความสัมพันธ์ $x = \cos \theta$ และ $y = \sin \theta$ เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย จะได้ว่า

- 1) $\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 2) $\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
- 3) $\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 4) $\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$
- 5) $\sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 6) $\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
- 7) $\sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 8) $\cos \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

ลองทำดู

ให้หาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ต่อไปนี้ โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย

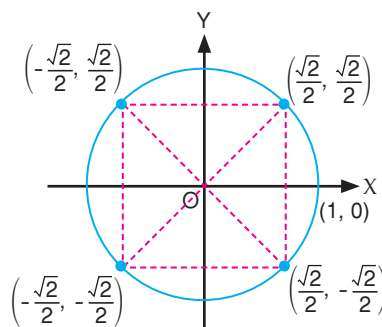
- 1) $\sin \frac{2\pi}{3}$
- 2) $\cos \frac{2\pi}{3}$
- 3) $\sin \frac{7\pi}{3}$
- 4) $\cos \frac{7\pi}{3}$
- 5) $\sin \left(-\frac{4\pi}{3}\right)$
- 6) $\cos \left(-\frac{4\pi}{3}\right)$
- 7) $\sin \left(-\frac{5\pi}{3}\right)$
- 8) $\cos \left(-\frac{5\pi}{3}\right)$

ตัวอย่างที่ 6

ให้หาจำนวนจริง θ ที่สอดคล้องกับฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ต่อไปนี้

- 1) $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ เมื่อ $-2\pi \leq \theta \leq 0$
- 2) $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq 4\pi$

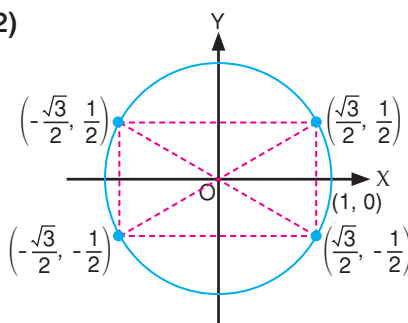
วิธีทำ 1)



จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อ $-2\pi \leq \theta \leq 0$ จะได้ว่า จุด (x, y) ที่เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีค่า $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ เมื่อวัดจากจุด $(1, 0)$ จะมีความยาวเป็น $-\frac{\pi}{4}$ และ $-\frac{3\pi}{4}$

ดังนั้น θ ที่สอดคล้องกับ $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ เมื่อ $-2\pi \leq \theta \leq 0$ คือ $-\frac{\pi}{4}$ และ $-\frac{3\pi}{4}$

2)



จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อ $0 \leq \theta \leq 4\pi$ จะได้ว่า จุด (x, y) ที่เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีค่า $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ เมื่อวัดจากจุด $(1, 0)$ จะมีความยาวเป็น $\frac{\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$ และ $\frac{23\pi}{6}$

ดังนั้น θ ที่สอดคล้องกับ $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq 4\pi$ คือ $\frac{\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$ และ $\frac{23\pi}{6}$

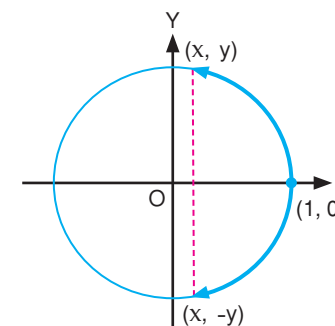
ลองทำดู

ให้หาจำนวนจริง θ ที่สอดคล้องกับฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ต่อไปนี้

- 1) $\cos \theta = \frac{1}{2}$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq 4\pi$
- 2) $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ เมื่อ $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$

3. ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริง

ในหัวข้อนี้ นักเรียนจะได้ศึกษาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริง โดยใช้ความรู้จากการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนและใช้การสะท้อนจุด $P(x, y)$ ซึ่งอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งมีแกน X หรือแกน Y เป็นเส้นสะท้อน



รูปที่ 22

จากรูปที่ 22 พิจารณา $\theta > 0$ และจุด (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย กำหนดจุด $(x, -y)$ เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนจุด (x, y) โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน จึงได้ว่าจุด $(x, -y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย

จากจุด $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$ และ $(x, -y) = (\cos (-\theta), \sin (-\theta))$

จะได้ว่า $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ และ $x = \cos (-\theta)$, $-y = \sin (-\theta)$

จึงสรุปได้ว่า

$$\sin (-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos (-\theta) = \cos \theta$$



ค่าของ
ฟังก์ชันไซน์และ
ฟังก์ชันโคไซน์

ตัวอย่างที่ 7

ให้หาค่าของ $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ และ $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

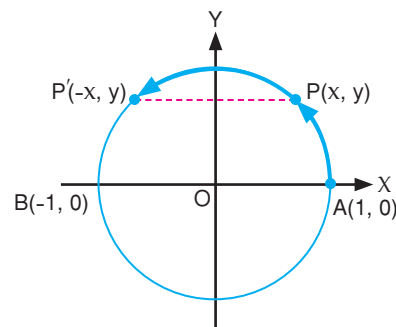
วิธีทำ จาก $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ และ $\cos(-\theta) = \cos \theta$

$$\text{จะได้ว่า } \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ และ } \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ลองทำ

ให้หาค่าของ $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ และ $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

1) การหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$



รูปที่ 23

จากรูปที่ 23 กำหนด $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ และจุด $P'(-x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ θ หน่วย

กำหนด $\alpha = \pi - \theta$ จะได้ว่า $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

เนื่องจากส่วนโค้ง AP' ยาว θ หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง $P'B$ ยาว α หน่วย

กำหนดจุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนจุด $P'(-x, y)$ โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน เนื่องจากส่วนโค้ง $P'B$ ยาว α หน่วย จะได้ว่า ส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย

ดังนั้น จุด $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ α หน่วย

จะได้ว่า $x = \cos \alpha$ และ $y = \sin \alpha$

แต่ $-x = \cos \theta = \cos(\pi - \alpha)$ และ $y = \sin \theta = \sin(\pi - \alpha)$

จึงสรุปได้ว่า

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \text{ และ } \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ตัวอย่างที่ 8

กำหนด $\sin \frac{\pi}{5} = 0.59$ และ $\cos \frac{\pi}{5} = 0.81$ ให้หาค่าของ

1) $\sin \frac{4\pi}{5}$

2) $\cos \frac{4\pi}{5}$

วิธีทำ 1) $\sin \frac{4\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)$

$$= \sin \frac{\pi}{5} \quad \left(\text{จาก } \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \text{ เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 0.59$$

2) $\cos \frac{4\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)$

$$= -\cos \frac{\pi}{5} \quad \left(\text{จาก } \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \text{ เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -0.81$$

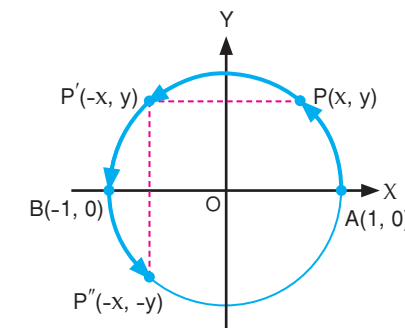
ลองทำ

กำหนด $\sin \frac{\pi}{10} = 0.31$ และ $\cos \frac{\pi}{10} = 0.95$ ให้หาค่าของ

1) $\sin \frac{9\pi}{10}$

2) $\cos \frac{9\pi}{10}$

2) การหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$



รูปที่ 24

จากรูปที่ 24 กำหนด $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ และจุด $P'(-x, -y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ θ หน่วย จะได้ว่า $-x = \cos \theta$ และ $-y = \sin \theta$

กำหนด $\alpha = \theta - \pi$ จะได้ว่า $\theta = \pi + \alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว π หน่วย

จะได้ว่า ส่วนโค้ง BP' ยาว $\theta - \pi = \alpha$ หน่วย

กำหนดจุด $P'(-x, y)$ เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนจุด $P'(-x, -y)$ โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน และจุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนจุด $P'(-x, y)$ โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน

จะได้ว่า ส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย

ดังนั้น จุด $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ α หน่วย

จะได้ว่า $x = \cos \alpha$ และ $y = \sin \alpha$

แต่จาก $-x = \cos \theta = \cos(\pi + \alpha)$ และ $-y = \sin \theta = \sin(\pi + \alpha)$

จึงสรุปได้ว่า

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \text{ และ } \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ตัวอย่างที่ 9

กำหนด $\sin \frac{\pi}{5} = 0.59$ และ $\cos \frac{\pi}{5} = 0.81$ ให้หาค่าของ

1) $\sin \frac{6\pi}{5}$

2) $\cos \frac{6\pi}{5}$

วิธีทำ 1) $\sin \frac{6\pi}{5} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right)$
 $= -\sin \frac{\pi}{5}$ (จาก $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)
 $= -0.59$

2) $\cos \frac{6\pi}{5} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right)$
 $= -\cos \frac{\pi}{5}$ (จาก $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)
 $= -0.81$

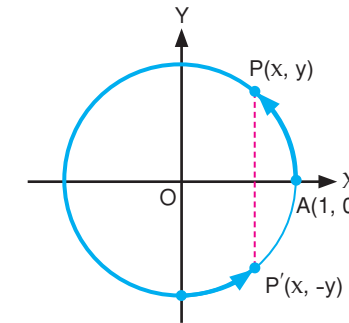
ลองทำ

กำหนด $\sin \frac{\pi}{10} = 0.31$ และ $\cos \frac{\pi}{10} = 0.95$ ให้หาค่าของ

1) $\sin \frac{11\pi}{10}$

2) $\cos \frac{11\pi}{10}$

3) การหาค่า $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$



รูปที่ 25

จากรูปที่ 25 กำหนด $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ และจุด $P'(x, -y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ θ หน่วย จะได้ว่า $x = \cos \theta$ และ $-y = \sin \theta$

กำหนด $\alpha = 2\pi - \theta$ จะได้ว่า $\theta = 2\pi - \alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

เนื่องจากเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย

จะได้ว่า ส่วนโค้ง $P'A$ ยาว $2\pi - \theta = 2\pi - 2\pi + \alpha = \alpha$ หน่วย

กำหนดจุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนจุด $P'(x, -y)$ โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน

จะได้ว่า ส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย

ดังนั้น จุด $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ α หน่วย

จะได้ว่า $x = \cos \alpha$ และ $y = \sin \alpha$

แต่จาก $x = \cos \theta = \cos(2\pi - \alpha)$ และ $-y = \sin \theta = \sin(2\pi - \alpha)$

จึงสรุปได้ว่า

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha \text{ และ } \cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ตัวอย่างที่ 10

กำหนด $\sin \frac{\pi}{5} = 0.59$ และ $\cos \frac{\pi}{5} = 0.81$ ให้หาค่าของ

1) $\sin \frac{9\pi}{5}$

2) $\cos \frac{9\pi}{5}$

วิธีทำ 1) $\sin \frac{9\pi}{5} = \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{5} \right)$
 $= -\sin \frac{\pi}{5} \quad \left(\text{จาก } \sin (2\pi - \alpha) = -\sin \alpha \text{ เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$
 $= -0.59$

$$\begin{aligned} 2) \quad \cos \frac{9\pi}{5} &= \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{5} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{5} \quad \left(\text{จาก } \cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha \text{ เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 0.81 \end{aligned}$$

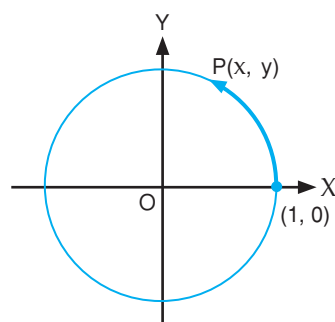
ลองทำดู

กำหนด $\sin \frac{\pi}{10} = 0.31$ และ $\cos \frac{\pi}{10} = 0.95$ ให้หาค่าของ

$$1) \sin \frac{19\pi}{10}$$

$$2) \cos \frac{19\pi}{10}$$

4) การหาค่า $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\theta > 2\pi$



คณิตน่ารู้

การหาค่า $\sin \theta$ และ $\cos \theta$
เมื่อ $\theta < -2\pi$ หาได้จากสมบัติ
ที่ว่า

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos (-\theta) = \cos \theta$$

กำหนด $\theta > 2\pi$ และจุด $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ θ หน่วย

จาก $\theta > 2\pi$ และเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย จะได้ว่า $\theta = 2n\pi + \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ α เป็นระยะของจุด $P(x, y)$ ที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เมื่อ $0 \leq \alpha < 2\pi$

จะเห็นว่า จุด $P(x, y)$ ที่เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ θ หน่วย และจุด $P(x, y)$ ที่เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ α หน่วย เป็นจุดเดียวกัน

ดังนั้น การหาจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ θ หน่วย เมื่อ $\theta > 2\pi$ สามารถหาได้จากจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ α หน่วย เมื่อ $\theta = 2n\pi + \alpha$ และ $0 \leq \alpha < 2\pi$

จึงสรุปได้ว่า

$$\sin (2n\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos (2n\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

ตัวอย่างที่ 11

ให้หาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ต่อไปนี้

1) $\cos \frac{25\pi}{3}$

2) $\sin\left(-\frac{61\pi}{6}\right)$

วิธีทำ 1) $\cos \frac{25\pi}{3} = \cos \left(8\pi + \frac{\pi}{3} \right)$
 $= \cos \left(2(4)\pi + \frac{\pi}{3} \right)$
 $= \cos \frac{\pi}{3}$ (จาก $\cos(2n\pi + \alpha) = \cos \alpha, 0 \leq \alpha < 2\pi$)
 $= \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} 2) \quad \sin\left(-\frac{61\pi}{6}\right) &= -\sin\left(\frac{61\pi}{6}\right) \quad (\text{ආර්ථක } \sin(-\theta) = -\sin \theta, \theta > 0) \\ &= -\sin\left(10\pi + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\sin\left(2(5)\pi + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\sin\frac{\pi}{6} \quad (\text{ආර්ථක } \sin(2n\pi + \alpha) = \sin \alpha, 0 \leq \alpha < 2\pi) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ลองทำดู

ให้หาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ต่อไปนี้

1) $\cos \frac{31\pi}{4}$

$$2) \sin\left(-\frac{50\pi}{3}\right)$$

แบบฝึกทักษะ 1.2

ระดับพื้นฐาน ★

1. ให้เขียนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย ของ θ ต่อไปนี้ ในรูป $(\cos \theta, \sin \theta)$

- 1) 0 2) 10π 3) $-\frac{3\pi}{2}$ 4) -10π

2. ให้หาค่าของ $\cos \theta$ และ $\sin \theta$ ต่อไปนี้ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง

- 1) $\theta = 4\pi + \frac{\pi}{3}$ 2) $\theta = \frac{19\pi}{3}$ 3) $\theta = \frac{31\pi}{4}$ 4) $\theta = -\frac{29\pi}{6}$

3. กำหนด $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ให้หาค่าของ

- 1) $\sin(-\theta)$ 2) $\cos(-\theta)$
3) $\sin(\pi - \theta)$ 4) $\cos(\pi - \theta)$
5) $\sin(\pi + \theta)$ 6) $\cos(\pi + \theta)$
7) $\sin(2\pi - \theta)$ 8) $\cos(2\pi - \theta)$
9) $\sin(2\pi + \theta)$ 10) $\cos(2\pi + \theta)$

4. ให้หาจำนวนจริง θ ที่สอดคล้องกับฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ต่อไปนี้

เมื่อ $-4\pi \leq \theta \leq 4\pi$

- 1) $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ 2) $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ 4) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ระดับกลาง ★★

5. ให้หาค่าของ $\cos \theta$ และ $\sin \theta$ ต่อไปนี้ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง

- 1) $\theta = 3\pi + \frac{\pi}{6}$ 2) $\theta = 5\pi - \frac{\pi}{4}$ 3) $\theta = -\pi - \frac{\pi}{4}$ 4) $\theta = -2\pi + \frac{\pi}{6}$

6. กำหนด $\sin \theta = \frac{1}{2}$ และ $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ให้หาค่าของ

- 1) $\sin(-\pi + \theta)$ 2) $\cos(-\pi + \theta)$
3) $\sin(-\pi - \theta)$ 4) $\cos(-\pi - \theta)$
5) $\sin(-2\pi + \theta)$ 6) $\cos(-2\pi + \theta)$
7) $\sin(-2\pi - \theta)$ 8) $\cos(-2\pi - \theta)$
9) $\sin(\theta - 4\pi)$ 10) $\cos(\theta - 7\pi)$

ระดับท้าทาย ★★★

7. กำหนด $\sin\left(-\frac{91\pi}{18}\right) = 0.17$ ให้หาจำนวนจริง θ ที่ทำให้ $\sin \theta = \sin\left(-\frac{91\pi}{18}\right)$ มา 4 จำนวน

เมื่อ $-10\pi \leq \theta \leq 10\pi$ พร้อมอธิบายเหตุผลประกอบ

1.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ

นอกจากฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ที่กล่าวมาแล้ว ยังมีฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ อีกที่มีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ตามบทนิยามที่กำหนดต่อไปนี้

1. ฟังก์ชันแทนเจนต์ (Tangent Function)

บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ

$$\text{tangent } \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

เขียนแทน tangent θ ด้วย $\tan \theta$ (อ่านว่า แทนทีตา)

ดังนั้น $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$

2. ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (Cotangent Function)

บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ

$$\text{cotangent } \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

เขียนแทน cotangent θ ด้วย $\cot \theta$ (อ่านว่า คอตทีตา)

ดังนั้น $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$

3. ฟังก์ชันเซแคนต์ (Secant Function)

บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ

$$\text{secant } \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

เขียนแทน secant θ ด้วย $\sec \theta$ (อ่านว่า เซกทีตา)

ดังนั้น $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$

4. ฟังก์ชันโคเซแคนต์ (Cosecant Function)

บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ

$$\text{cosecant } \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

เขียนแทน cosecant θ ด้วย $\text{cosec } \theta$ (อ่านว่า โคเซกทีตา)

ดังนั้น $\text{cosec } \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$

การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ แยกพิจารณาจาก 4 กรณี ต่อไปนี้

1) กรณี $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $0 < \sin \theta < 1$ และ $0 < \cos \theta < 1$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ ดังนั้น } \tan \theta > 0 \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \text{ ดังนั้น } \sec \theta > 1$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \text{ ดังนั้น } \cot \theta > 0 \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \text{ ดังนั้น } \operatorname{cosec} \theta > 1$$

สำหรับจำนวนจริง θ ที่ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันมีค่าเป็นจำนวนจริงบวก

ตัวอย่างที่ 12

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1) $\tan \frac{\pi}{3}$ 2) $\cot \frac{\pi}{3}$ 3) $\sec \frac{\pi}{3}$ 4) $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3}$

วิธีทำ 1) $\tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

2) $\cot \frac{\pi}{3} = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3) $\sec \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

4) $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

ลองทำ

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1) $\tan \frac{\pi}{4}$ 2) $\cot \frac{\pi}{4}$ 3) $\sec \frac{\pi}{4}$ 4) $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{4}$

2) กรณี $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

เนื่องจาก $0 < \sin \theta < 1$ และ $-1 < \cos \theta < 0$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ ดังนั้น } \tan \theta < 0 \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \text{ ดังนั้น } \sec \theta < -1$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \text{ ดังนั้น } \cot \theta < 0 \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \text{ ดังนั้น } \operatorname{cosec} \theta > 1$$

สำหรับจำนวนจริง θ ที่ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคเซแคนต์มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก ส่วนฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ มีค่าเป็นจำนวนจริงลบ

ตัวอย่างที่ 13

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1) $\tan \frac{2\pi}{3}$ 2) $\cot \frac{2\pi}{3}$ 3) $\sec \frac{2\pi}{3}$ 4) $\operatorname{cosec} \frac{2\pi}{3}$

วิธีทำ 1) $\tan \frac{2\pi}{3} = \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{\cos \frac{2\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

2) $\cot \frac{2\pi}{3} = \frac{\cos \frac{2\pi}{3}}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

3) $\sec \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{\cos \frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$

4) $\operatorname{cosec} \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

แนะแนวคิด

$$\begin{aligned} \sin \frac{2\pi}{3} &= \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{3} \\ \cos \frac{2\pi}{3} &= \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= -\cos \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

ลองทำ

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1) $\tan \frac{5\pi}{6}$ 2) $\cot \frac{5\pi}{6}$ 3) $\sec \frac{5\pi}{6}$ 4) $\operatorname{cosec} \frac{5\pi}{6}$

3) กรณี $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

เนื่องจาก $-1 < \sin \theta < 0$ และ $-1 < \cos \theta < 0$ เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ ดังนั้น } \tan \theta > 0 \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \text{ ดังนั้น } \sec \theta < -1$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \text{ ดังนั้น } \cot \theta > 0 \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \text{ ดังนั้น } \operatorname{cosec} \theta < -1$$

สำหรับจำนวนจริง θ ที่ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ค่าของฟังก์ชันแทนเจนต์และฟังก์ชันโคแทนเจนต์มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก ส่วนฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ มีค่าเป็นจำนวนจริงลบ

4) กรณี $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

เนื่องจาก $-1 < \sin \theta < 0$ และ $0 < \cos \theta < 1$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ ดังนั้น } \tan \theta < 0 \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \text{ ดังนั้น } \sec \theta > 1$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \text{ ดังนั้น } \cot \theta < 0 \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \text{ ดังนั้น } \operatorname{cosec} \theta < -1$$

สำหรับจำนวนจริง θ ที่ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ค่าของฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันเซแคนต์มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก ส่วนฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ มีค่าเป็นจำนวนจริงลบ

ตัวอย่างที่ 14

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1) $\tan \frac{4\pi}{3}$ 2) $\cot \frac{4\pi}{3}$ 3) $\sec \frac{4\pi}{3}$ 4) $\operatorname{cosec} \frac{4\pi}{3}$

วิธีทำ 1) $\tan \frac{4\pi}{3} = \frac{\sin \frac{4\pi}{3}}{\cos \frac{4\pi}{3}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

2) $\cot \frac{4\pi}{3} = \frac{\cos \frac{4\pi}{3}}{\sin \frac{4\pi}{3}} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3) $\sec \frac{4\pi}{3} = \frac{1}{\cos \frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$

4) $\operatorname{cosec} \frac{4\pi}{3} = \frac{1}{\sin \frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

ลองทำดู

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1) $\tan \frac{5\pi}{4}$ 2) $\cot \frac{5\pi}{4}$ 3) $\sec \frac{5\pi}{4}$ 4) $\operatorname{cosec} \frac{5\pi}{4}$

ตัวอย่างที่ 15

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1) $\tan \frac{5\pi}{3}$ 2) $\cot \frac{5\pi}{3}$ 3) $\sec \frac{5\pi}{3}$ 4) $\operatorname{cosec} \frac{5\pi}{3}$

วิธีทำ 1) $\tan \frac{5\pi}{3} = \frac{\sin \frac{5\pi}{3}}{\cos \frac{5\pi}{3}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

2) $\cot \frac{5\pi}{3} = \frac{\cos \frac{5\pi}{3}}{\sin \frac{5\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

3) $\sec \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{\cos \frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

4) $\operatorname{cosec} \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{\sin \frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

ลองทำดู

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1) $\tan \frac{11\pi}{6}$ 2) $\cot \frac{11\pi}{6}$ 3) $\sec \frac{11\pi}{6}$ 4) $\operatorname{cosec} \frac{11\pi}{6}$

ตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงบางจำนวน เมื่อ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\operatorname{cosec} \theta$	$\sec \theta$	$\cot \theta$
0	0	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม	0



Thinking Time

ถ้า θ เป็นจำนวนจริง แล้ว $\tan(-\theta)$, $\cot(-\theta)$, $\sec(-\theta)$ และ $\operatorname{cosec}(-\theta)$ มีค่าเป็นเท่าใด

ตัวอย่างที่ 16

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 2) $\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 3) $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 4) $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

วิธีทำ 1) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

2) $\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sec\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

3) $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cot\frac{\pi}{4} = -1$

4) $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

ลองทำ

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1) $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ 2) $\sec\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ 3) $\cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ 4) $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

ตัวอย่างที่ 17

ให้หาค่าของ $\sin\frac{7\pi}{6} \cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right) + \tan\frac{13\pi}{4} \cot\frac{9\pi}{4}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$
 $= -\sin\frac{\pi}{6}$
 $= -\frac{1}{2}$
 $\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right) = \cos\frac{13\pi}{3}$
 $= \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right)$
 $= \cos\frac{\pi}{3}$
 $= \frac{1}{2}$
 $\tan\frac{13\pi}{4} = \tan\left(2\pi + \frac{5\pi}{4}\right)$
 $= \tan\frac{5\pi}{4}$
 $= 1$
 $\cot\frac{9\pi}{4} = \cot\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$
 $= \cot\frac{\pi}{4}$
 $= 1$

จะได้ว่า $\sin\frac{7\pi}{6} \cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right) + \tan\frac{13\pi}{4} \cot\frac{9\pi}{4} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 1(1)$
 $= \frac{3}{4}$

ดังนั้น $\sin\frac{7\pi}{6} \cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right) + \tan\frac{13\pi}{4} \cot\frac{9\pi}{4} = \frac{3}{4}$

ลองทำ

ให้หาค่าของ $\sin\left(-\frac{19\pi}{4}\right) \cot\frac{13\pi}{4} - \cos\frac{31\pi}{6} \sin\left(-\frac{20\pi}{3}\right)$

แบบฝึกทักษะ 1.3

ระดับพื้นฐาน ★

1. กำหนด $\sin \theta = \frac{3}{5}$ และ $\cos \theta = \frac{4}{5}$ ให้หาค่าของ

- | | |
|------------------|----------------------------------|
| 1) $\tan \theta$ | 2) $\sec \theta$ |
| 3) $\cot \theta$ | 4) $\operatorname{cosec} \theta$ |

2. กำหนด $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ และ $\cos \theta = \frac{4}{5}$ ให้หาค่าของ

- | | |
|------------------|----------------------------------|
| 1) $\tan \theta$ | 2) $\sec \theta$ |
| 3) $\cot \theta$ | 4) $\operatorname{cosec} \theta$ |

3. กำหนด $\sin \theta = \frac{3}{5}$ และ $\cos \theta = \frac{4}{5}$ ให้หาค่าของ

- | | |
|---------------------|-------------------------------------|
| 1) $\tan (-\theta)$ | 2) $\sec (-\theta)$ |
| 3) $\cot (-\theta)$ | 4) $\operatorname{cosec} (-\theta)$ |

4. ให้หาค่าของ

- 1) $\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{4\pi}{3} + \sin \frac{5\pi}{3}$
- 2) $\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \tan \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}$
- 3) $\sin \frac{5\pi}{4} \cos \frac{4\pi}{3} - \cos \frac{2\pi}{3} \tan \frac{3\pi}{4}$

ระดับกลาง ★★

5. กำหนด $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ และ $\sin \theta = \frac{1}{3}$ ให้หาค่าของ

- | | |
|--------------------------------|--|
| 1) $\sin \theta + \cos \theta$ | 2) $\cot \theta + \operatorname{cosec} \theta$ |
| 3) $\cos \theta - \tan \theta$ | 4) $\sec \theta - \cos \theta$ |

6. กำหนด $-\pi < \theta < -\frac{\pi}{2}$ และ $\tan \theta = \frac{2}{3}$ ให้หาค่าของ

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1) $\sin \theta + \cos \theta$ | 2) $\sin \theta - \sec \theta$ |
| 3) $\cos \theta + \cot \theta$ | 4) $\cos \theta - \sec \theta$ |

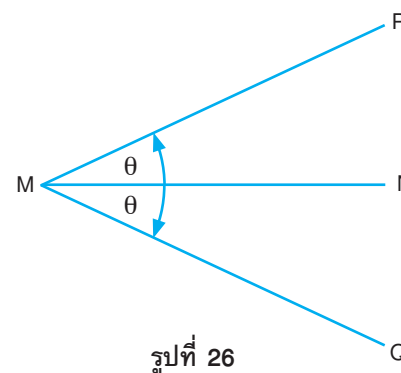
7. ให้หาค่าของ

- 1) $\cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{3} \cot \frac{\pi}{3}$
- 2) $\sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cos \left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \tan \left(-\frac{7\pi}{4}\right) \cos(-2\pi)$

1.4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

(Trigonometric Functions of any angle)

กำหนด $\overline{MN}$ สร้าง $\widehat{NMP}$ และ $\widehat{NMQ}$ ให้มีขนาด θ หน่วย เท่ากัน โดยใช้โปรแทรกเตอร์ วัดขนาดของมุม ซึ่งสามารถวัดขนาดของมุมที่ต้องการสร้างได้ 2 แบบ คือ การวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาและการวัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ดังนี้



เรียกจุด M ว่า จุดยอด (vertex) ของมุม
เรียก $\overline{MN}$ ว่า ด้านเริ่มต้น (initial side) ของมุม
เรียก $\overline{MP}$ และ $\overline{MQ}$ ว่า ด้านสิ้นสุด (terminal side) ของมุม

รูปที่ 26

ดังนั้น การวัดขนาดของมุมทำได้โดยวัดจากด้านเริ่มต้นของมุมไปยังด้านสิ้นสุดของมุม ถ้าวัดมุมในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ขนาดของมุมจะเป็นจำนวนจริงบวก ถ้าวัดมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกาขนาดของมุมจะเป็นจำนวนจริงลบ

นักเรียนทราบมาแล้วว่าหน่วยที่ใช้ในการวัดมุม คือ องศา (degree) เขียนแทนด้วย $^{\circ}$ ซึ่งแบ่งหน่วยย่อยเป็นลิปดา ($'$) และฟิลิปดา ($''$) ดังนี้

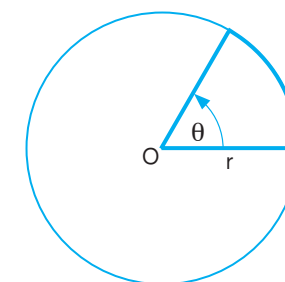
$$1^{\circ} = 60'$$

$$1' = 60''$$

หน่วยวัดมุมที่สำคัญอีกหน่วยหนึ่ง คือ เรเดียน (radian)

1. หน่วยการวัดมุมในระบบเรเดียน

มุม 1 เรเดียน เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่มีความยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้น



θ มีขนาด 1 เรเดียน

รูปที่ 27

จากรูปที่ 27 จะเห็นว่า เป็นวงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วย และมุม θ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลาง ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งที่ยาว r หน่วย ดังนั้น θ จึงมีขนาด 1 เรเดียน

เนื่องจากวงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วย จะมีเส้นรอบวงยาว $2\pi r$ หน่วย

ดังนั้น มุมที่จุดศูนย์กลางซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่มีความยาว $2\pi r$ หน่วย และรัศมี r หน่วย จะมีขนาด $\frac{2\pi r}{r}$ เรเดียน หรือ 2π เรเดียน จึงกล่าวได้ว่า ขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วย ที่ได้จากการหมุนรัศมีไปครบ 1 รอบ มีขนาด 2π เรเดียน แต่ขนาดของมุมนี้เมื่อวัดเป็นหน่วยในระบบองศา จะเท่ากับ 360 องศา

ดังนั้น	360	องศา	เท่ากับ	2π	เรเดียน
จะได้ว่า	180	องศา	เท่ากับ	π	เรเดียน
นั่นคือ	1	องศา	เท่ากับ	$\frac{\pi}{180}$	เรเดียน
และ	1	เรเดียน	เท่ากับ	$\frac{360}{2\pi}$	องศา หรือ $\frac{180}{\pi}$ องศา

ข้อควรระวัง!

การเขียนขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน จะไม่นิยมเขียนหน่วยกำกับไว้

ตัวอย่างที่ 18

- เปลี่ยน 30 องศา ให้มีหน่วยเป็นเรเดียน
- เปลี่ยน $\frac{\pi}{5}$ เรเดียน ให้มีหน่วยเป็นองศา

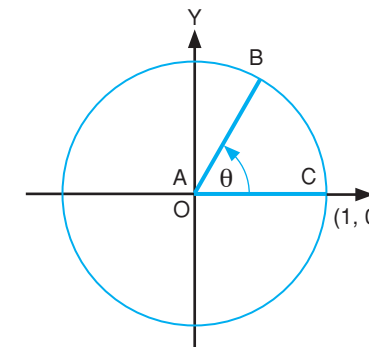
วิธีทำ	1)	เนื่องจาก	$\frac{180}{\pi}$	องศา	เท่ากับ	1	เรเดียน
	ดังนั้น	30	องศา	เท่ากับ	$30 \times \frac{\pi}{180}$		
					$= \frac{\pi}{6}$	เรเดียน	
	2)	เนื่องจาก	1	เรเดียน	เท่ากับ	$\frac{180}{\pi}$	องศา
	ดังนั้น	$\frac{\pi}{5}$	เรเดียน	เท่ากับ	$\frac{\pi}{5} \times \frac{180}{\pi}$		
					$= 36$	องศา	

ลองทำ

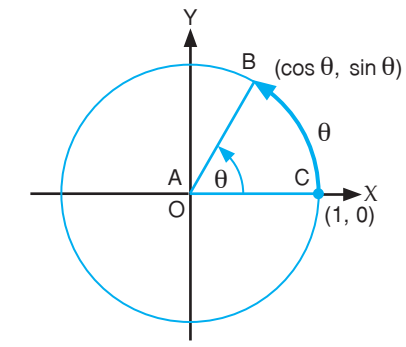
- เปลี่ยน 60 องศา ให้มีหน่วยเป็นเรเดียน
- เปลี่ยน $\frac{3\pi}{4}$ เรเดียน ให้มีหน่วยเป็นองศา

2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

ในหัวข้อ 1.2 นักเรียนได้ศึกษาฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริง ซึ่งกำหนดได้จากวงกลม 1 หน่วย ในหัวข้อนี้ นักเรียนจะได้ศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมและความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงกับฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม ซึ่งต้องเขียนมุมในวงกลม 1 หน่วย ดังนี้



รูปที่ 28



รูปที่ 29

จากรูปที่ 28 จะเห็นว่า $\widehat{BAC}$ มีจุดยอดมุมอยู่ที่จุด $(0, 0)$ มี $\overline{AC}$ และ $\overline{AB}$ เป็นแขนของมุม โดย $\overline{AC}$ ทับแกน X ทางบวก เรียก $\widehat{BAC}$ ว่า มุมที่อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน (standard position)

จากรูปที่ 29 จะเห็นว่า $\widehat{BAC}$ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมรัศมียาว 1 หน่วย ซึ่งมีขนาด θ เรเดียน และจากเรื่องหน่วยการวัดมุมในระบบเรเดียนนักเรียนทราบมาแล้วว่า ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางขนาด 1 เรเดียน จะต้องยาว 1 หน่วย ดังนั้น ส่วนโค้งที่รองรับ $\widehat{BAC}$ จึงยาว θ หน่วย และจะเห็นว่า $\overline{AB}$ ซึ่งเป็นแขนของ $\widehat{BAC}$ ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยเพียงจุดเดียวและเป็นจุดเดียวกันกับจุดปลายของส่วนโค้งที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางเดียวกันกับ θ จึงกล่าวได้ว่า บนวงกลมหนึ่งหน่วย

$\cos$ ของจำนวนจริง θ หมายถึง $\cos$ ของมุม θ เรเดียน
 $\sin$ ของจำนวนจริง θ หมายถึง $\sin$ ของมุม θ เรเดียน

ตัวอย่างที่ 19

ให้หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ

1) $\theta = 30^\circ$

2) $\theta = -60^\circ$

วิธีทำ เนื่องจาก $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ เรเดียน และ $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ เรเดียน จะได้ว่า

1) $\sin \theta = \sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cos \theta = \cos 30^\circ = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\sin \theta = \sin (-60^\circ) = \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \theta = \cos (-60^\circ) = \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

แนะแนวคิด

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

ลองทำ

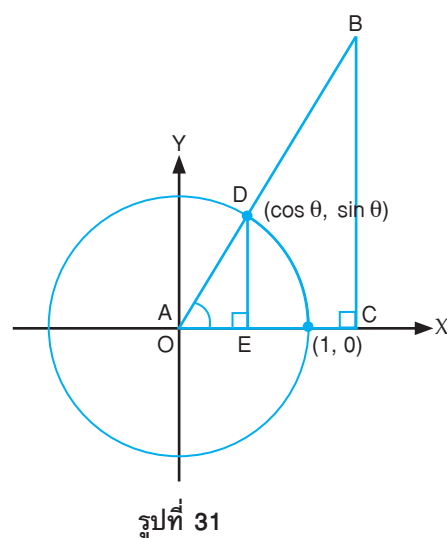
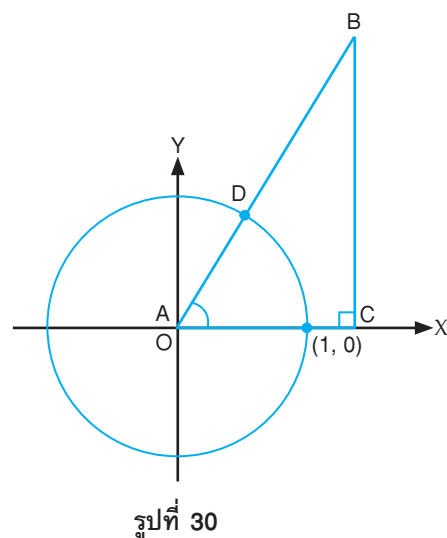
ให้หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ

1) $\theta = 135^\circ$

2) $\theta = -150^\circ$

3. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ในหัวข้อนี้ นักเรียนจะได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงกับฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยใช้ความรู้จากวงกลมหนึ่งหน่วย มุมที่จุดศูนย์กลาง และอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน ดังนี้



จากรูปที่ 30 มี ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีมุม C เป็นมุมฉาก และมีมุม A เป็นมุมที่อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน และแกน AB ตัดวงกลมที่จุด D

จากรูปที่ 31 ลาก $\overline{DE}$ ตั้งฉากกับแกน X จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ADE ซึ่งมีมุม A เป็นมุมที่อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน และจุด D จะมีคู่อันดับเป็น $(\cos \theta, \sin \theta)$

จากรูปสามเหลี่ยม ADE โดยอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะได้ว่า $AE = \cos \theta$, $DE = \sin \theta$ และ $AD = 1$

เนื่องจากรูปสามเหลี่ยม ADE คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม ABC

จะได้ว่า $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ อัตราส่วนของด้านที่สมนัยกัน

นั่นคือ $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$ และ $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$

$\frac{\cos \theta}{AC} = \frac{1}{AB}$ และ $\frac{\sin \theta}{BC} = \frac{1}{AB}$

$\cos \theta = \frac{AC}{AB}$ และ $\sin \theta = \frac{BC}{AB}$

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{BC}{AB}}{\frac{AC}{AB}} = \frac{BC}{AC}$

ดังนั้น $\tan \theta = \frac{BC}{AC}$

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่งนักเรียนทราบค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ $\sin A$, $\cos A$ และ $\tan A$ มาแล้ว ซึ่งจะมีค่า ดังนี้

$\sin A = \frac{BC}{AB}$, $\cos A = \frac{AC}{AB}$, $\tan A = \frac{BC}{AC}$

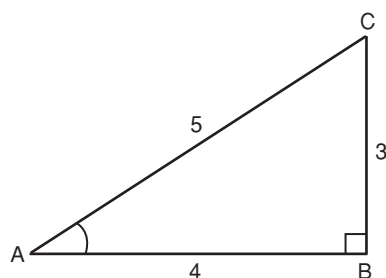
$\sin A = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

$\cos A = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

$\tan A = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม A}}$

ตัวอย่างที่ 20

ให้หาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม A ทุกอัตราส่วน



วิธีทำ

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$$

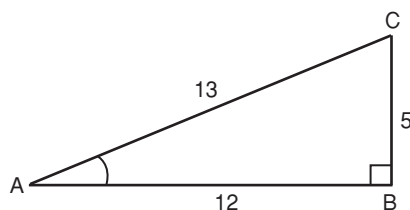
$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$

$$\csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

ลองทำดู

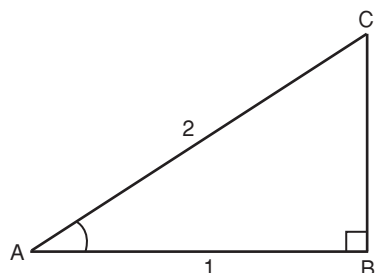
ให้หาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม A ทุกอัตราส่วน



ตัวอย่างที่ 21

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก และ $\cos A = \frac{1}{2}$ ให้หาค่าของ $\sin A$, $\tan A$, $\cot A$, $\sec A$ และ $\csc A$

วิธีทำ จาก $\cos A = \frac{1}{2}$ จะได้รูปสามเหลี่ยม ABC ดังนี้



รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC และทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้ $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$2^2 = 1^2 + BC^2$$

$$BC^2 = 3$$

$$BC = \sqrt{3}$$

ดังนั้น $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = 2$$

$$\csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ลองทำดู

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก และ $\cos A = \frac{3}{10}$ ให้หาค่าของ $\sin A$, $\tan A$, $\cot A$, $\sec A$ และ $\csc A$

แบบฝึกทักษะ 1.4

ระดับพื้นฐาน ★

1. เปลี่ยนมุม θ ในหน่วยองศาต่อไปนี้ ให้มีหน่วยเป็นเรเดียน

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) $\theta = 75^\circ$ | 2) $\theta = 120^\circ$ |
| 3) $\theta = 270^\circ$ | 4) $\theta = -60^\circ$ |
| 5) $\theta = -135^\circ$ | 6) $\theta = -315^\circ$ |

2. เปลี่ยนมุม θ ในหน่วยเรเดียนต่อไปนี้ ให้มีหน่วยเป็นองศา

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| 1) $\theta = \frac{\pi}{4}$ | 2) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ |
| 3) $\theta = \frac{5\pi}{3}$ | 4) $\theta = -\frac{11\pi}{6}$ |
| 5) $\theta = -\frac{7\pi}{3}$ | 6) $\theta = -\frac{9\pi}{2}$ |

3. ให้หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ ต่อไปนี้

- 1) $\theta = 45^\circ$
- 2) $\theta = 120^\circ$
- 3) $\theta = 150^\circ$
- 4) $\theta = 210^\circ$
- 5) $\theta = -30^\circ$
- 6) $\theta = -135^\circ$
- 7) $\theta = -240^\circ$
- 8) $\theta = -300^\circ$

4. ให้หาอัตราส่วนตรีโกณมิติทุกอัตราส่วนของมุม θ ต่อไปนี้



5. ถ้า $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ แล้ว $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\cot \theta$, $\sec \theta$ และ $\operatorname{cosec} \theta$ มีค่าเท่าใด

ระดับกลาง ★★

6. ให้หาค่าของ $\tan \theta$, $\cot \theta$, $\sec \theta$ และ $\operatorname{cosec} \theta$ ต่อไปนี้

- 1) $\theta = 120^\circ$
- 2) $\theta = -150^\circ$
- 3) $\theta = 210^\circ$
- 4) $\theta = -300^\circ$

7. ให้หาค่าของ

- 1) $4 \cos(-30^\circ) + \sin(-60^\circ)$
- 2) $5 \tan 315^\circ \cos(-390^\circ)$
- 3) $2 \sin^2(-45^\circ) \cos^2(-120^\circ) \tan^2 135^\circ$
- 4) $\frac{\cos 420^\circ + \sin(-810^\circ)}{\cos(-450^\circ) + \sin(-270^\circ)}$

แนะแนวคิด

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta &= \sin \theta \cdot \sin \theta \\ \cos^2 \theta &= \cos \theta \cdot \cos \theta \\ \tan^2 \theta &= \tan \theta \cdot \tan \theta\end{aligned}$$

8. ถ้า $\tan \theta \cdot \cot^2 \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ แล้ว θ มีค่าเป็นเท่าใด เมื่อ $-360^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

ระดับท้าทาย ★★★

9. กำหนด $2 \sin \theta = 1$ เมื่อ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ให้หาค่าของ

- 1) $\sin(90^\circ - \theta)$
- 2) $\cos(90^\circ - \theta)$
- 3) $\tan(90^\circ - \theta)$
- 4) $\cot(90^\circ - \theta)$
- 5) $\sec(90^\circ - \theta)$
- 6) $\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)$

1.5 การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ในหัวข้อที่ผ่านมา นักเรียนได้ศึกษาการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้งหกฟังก์ชันของจำนวนจริงหรือของมุมบางมุมมาแล้ว เช่น $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, 30° , 45° , 60° , 90° สำหรับค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมขนาดอื่นๆ สามารถหาได้เช่นกัน แต่จะมีความยุ่งยากนักคณิตศาสตร์จึงได้สร้างตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ หรือมุมที่มีขนาดตั้งแต่ 0° ถึง 90° ในตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชัน Sine, Tangent, Cotangent และ Cosine สำหรับค่าของฟังก์ชัน Cosecant และ Secant หาได้โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ตามลำดับ

ตัวอย่างตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

Degrees	Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine		
43° 00'	.7505	.6820	.9325	1.0724	.7314	.8203	47° 00'
10'	.7534	.6841	.9380	1.0661	.7294	.8174	50'
20'	.7563	.6862	.9435	1.0599	.7274	.8145	40'
30'	.7592	.6884	.9490	1.0538	.7254	.8116	30'
40'	.7621	.6905	.9545	1.0477	.7234	.8087	20'
50'	.7650	.6926	.9601	1.0416	.7214	.8058	10'
44° 00'	.7679	.6947	.9657	1.0355	.7193	.8029	46° 00'
10'	.7709	.6967	.9713	1.0295	.7173	.7999	50'
20'	.7738	.6988	.9770	1.0235	.7153	.7970	40'
30'	.7767	.7009	.9827	1.0176	.7133	.7941	30'
40'	.7796	.7030	.9884	1.0117	.7112	.7912	20'
50'	.7825	.7050	.9942	1.0058	.7092	.7883	10'
45° 00'	.7854	.7071	1.0000	1.0000	.7071	.7854	45° 00'
		Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians	Degrees

จากตารางค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิตินักเรียนจะเห็นว่า ด้านบนและด้านล่างจะมีชื่อฟังก์ชันตรีโกณมิติแตกต่างกัน ดังนั้น การอ่านค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{4}$ หรือของมุมตั้งแต่ 0° ถึง 45° ให้อ่านทางด้านซ้ายของตารางโดยอ่านจากบนลงล่าง แต่ถ้าค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงตั้งแต่ $\frac{\pi}{4}$ ถึง $\frac{\pi}{2}$ หรือของมุมตั้งแต่ 45° ถึง 90° ให้อ่านทางขวามือของตารางโดยอ่านจากล่างขึ้นบน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 22

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ โดยใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- | | | |
|------------------------|------------------------|----------------------------------|
| 1) $\sin 43^\circ 20'$ | 2) $\cos 45^\circ 50'$ | 3) $\tan 46^\circ 10'$ |
| 4) $\cot 0.7941$ | 5) $\sec 0.7738$ | 6) $\operatorname{cosec} 0.8145$ |

วิธีทำ จากตาราง จะได้ว่า

- 1) $\sin 43^\circ 20' = 0.6862$
- 2) $\cos 45^\circ 50' = 0.6967$
- 3) $\tan 46^\circ 10' = 1.0416$
- 4) $\cot 0.7941 = 0.9827$

5) เนื่องจาก $\sec 0.7738 = \frac{1}{\cos 0.7738}$
 จากตาราง จะได้ว่า $\cos 0.7738 = 0.7153$
 ดังนั้น $\sec 0.7738 = \frac{1}{0.7153} \approx 1.3980$

6) เนื่องจาก $\operatorname{cosec} 0.8145 = \frac{1}{\sin 0.8145}$
 จากตาราง จะได้ว่า $\sin 0.8145 = 0.7274$
 ดังนั้น $\operatorname{cosec} 0.8145 = \frac{1}{0.7274} \approx 1.3748$

ลองทำ

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ โดยใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- | | | |
|------------------------|------------------------|----------------------------------|
| 1) $\sin 28^\circ 40'$ | 2) $\cos 64^\circ 10'$ | 3) $\tan 13^\circ 30'$ |
| 4) $\cot 0.7127$ | 5) $\sec 0.5963$ | 6) $\operatorname{cosec} 1.3294$ |

สำหรับการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือของมุมที่ไม่ได้แสดงในตาราง จะใช้ความรู้จากการเทียบบัญญัติไตรยางค์หรือสัดส่วน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 23

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ โดยใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------|
| 1) $\sin 14^\circ 16'$ | 2) $\cos 73^\circ 42'$ | 3) $\tan 0.4225$ |
|------------------------|------------------------|------------------|

วิธีทำ 1) จากตาราง จะได้ว่า $\sin 14^\circ 10' = 0.2447$
 $\sin 14^\circ 20' = 0.2476$

จากค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติข้างต้น จะได้ว่า

ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $10'$ ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น 0.0029

ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $6'$ ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น $\frac{0.0029}{10} \times 6 \approx 0.0017$

ดังนั้น $\sin 14^\circ 16' \approx 0.2447 + 0.0017 = 0.2464$

2) จากตาราง จะได้ว่า $\cos 73^\circ 40' = 0.2812$
 $\cos 73^\circ 50' = 0.2784$

จากค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติข้างต้น จะได้ว่า

ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $10'$ ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ลดลง 0.0028

ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $2'$ ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ลดลง $\frac{0.0028}{10} \times 2 \approx 0.0006$

ดังนั้น $\cos 73^\circ 42' \approx 0.2812 - 0.0006 = 0.2806$

3) จากตาราง จะได้ว่า $\tan 0.4218 = 0.4487$
 $\tan 0.4247 = 0.4522$

จากค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติข้างต้น จะได้ว่า

ค่าของจำนวนจริงเพิ่มขึ้น 0.0029 ค่าของฟังก์ชันแทนเจนต์เพิ่มขึ้น 0.0035

ค่าของจำนวนจริงเพิ่มขึ้น 0.0007 ค่าของฟังก์ชันแทนเจนต์เพิ่มขึ้น d

นั่นคือ $\frac{d}{0.0035} = \frac{0.0007}{0.0029}$
 $d = \frac{0.0007}{0.0029} \times 0.0035$
 ≈ 0.0008

ดังนั้น $\tan 0.4225 \approx 0.4487 + 0.0008 = 0.4495$

ลองทำ

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ โดยใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------|
| 1) $\sin 14^\circ 28'$ | 2) $\cos 78^\circ 12'$ | 3) $\tan 0.6759$ |
|------------------------|------------------------|------------------|

ข้อควรระวัง!

การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือของมุมที่ไม่ได้แสดงในตารางโดยใช้ความรู้จากการเทียบบัญญัติไตรยางศ์หรือสัดส่วน ถ้าฟังก์ชันตรีโกณมิติใดมีค่าของฟังก์ชันลดลงเมื่อขนาดของมุมเพิ่มขึ้น ค่าที่ได้จากการเทียบบัญญัติไตรยางศ์หรือสัดส่วนต้องนำไปลบออกจากค่าตั้งต้น

นอกจากนี้ ยังสามารถใช้ตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติหาค่าของจำนวนจริงหรือของมุม เมื่อทราบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือของมุมนั้น ๆ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 24

กำหนด $0 \leq \theta \leq \pi$ ให้หาค่าของ θ ที่ทำให้

$$1) \cos \theta = 0.8843 \quad 2) \sin \theta = 0.4780$$

วิธีทำ 1) จากตาราง จะได้ว่า $\cos 0.4858 = 0.8843$

ดังนั้น θ มีค่าเท่ากับ 0.4858

2) เนื่องจาก $\sin \theta = 0.4780$ มีค่าอยู่ระหว่าง $\sin 0.4974$ กับ $\sin 0.5003$

จากตาราง จะได้ว่า $\sin 0.4974 = 0.4772$ และ $\sin 0.5003 = 0.4797$

จากค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติข้างต้น จะได้ว่า

ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น 0.0025 ค่าของจำนวนจริงเพิ่มขึ้น 0.0029

ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น 0.0008 ค่าของจำนวนจริงเพิ่มขึ้น d

$$\text{นั่นคือ} \quad \frac{d}{0.0029} = \frac{0.0008}{0.0025}$$

$$d = \frac{0.0008}{0.0025} \times 0.0029 \\ \approx 0.0009$$

$$\text{จะได้ว่า} \quad \sin(0.4974 + 0.0009) = 0.4780$$

$$\sin 0.4983 = 0.4780$$

ดังนั้น θ มีได้ 2 ค่า คือ 0.4983 หรือ $\pi - 0.4983$

จดจำ

เนื่องจากค่าของ $\sin \theta$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \pi$ มี 2 ค่า คือ $\sin \theta$ และ $\sin(\pi - \theta)$ ดังนั้น ข้อ 2) จึงได้ θ เท่ากับ 0.4983 และ $\pi - 0.4983$

ลองทำ

กำหนด $0 \leq \theta \leq \pi$ ให้หาค่าของ θ ที่ทำให้

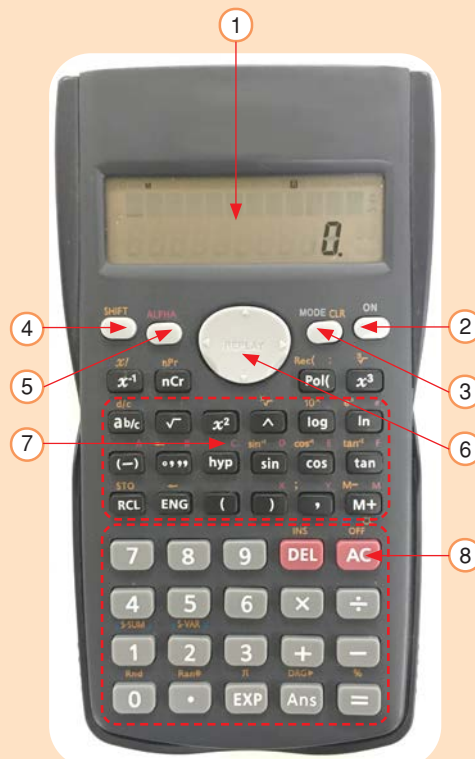
$$1) \cos \theta = 0.9013$$

$$2) \sin \theta = 0.6424$$



มูเทคโนโลยี่

ในปัจจุบัน การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่อหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ต้องการไม่เป็นที่ยอมรับ เนื่องจากสามารถใช้เครื่องคิดเลขหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ต้องการได้ละเอียดกว่าการใช้ตาราง



ส่วนประกอบหลักบนเครื่องคิดเลข

1. หน้าจอแสดงผลการทำงาน
2. ปุ่มเปิดเครื่อง
3. ปุ่ม MODE/SETUP ใช้สำหรับเลือกโหมดหรือตั้งค่าเครื่อง
4. ปุ่ม SHIFT สำหรับเรียกใช้คำสั่งที่เป็นสีเหลือง แล้วตามด้วยปุ่มคำสั่งนั้น ๆ
5. ปุ่ม ALPHA สำหรับเรียกใช้คำสั่งที่เป็นตัวอักษรสีแดง แล้วตามด้วยปุ่มคำสั่งนั้น ๆ
6. ปุ่มควบคุมทิศทาง ใช้เลื่อนดูคำตอบหรือแก้ไขการคำนวณ
7. ปุ่มฟังก์ชันและสูตรการคำนวณ
8. ปุ่มตัวเลข/เครื่องหมายการดำเนินการ

ตัวอย่าง 1) ให้หาค่าของ $\sin 38^\circ$ โดยใช้เครื่องคิดเลข

กดปุ่ม **MODE MODE 1 sin 3 8 =**

จะปรากฏจำนวน 0.615661475

ดังนั้น $\sin 38^\circ$ เท่ากับ 0.6157

2) ให้หาค่าของ $\cos 0.7912$ โดยใช้เครื่องคิดเลข

กดปุ่ม **MODE MODE 2 cos 0 . 7 9 1 2 =**

จะปรากฏจำนวน 0.702992385

ดังนั้น $\cos 0.7912$ เท่ากับ 0.7030

หมายเหตุ ปุ่มกดบนเครื่องคิดเลขแต่ละรุ่นจะมีความแตกต่างกัน ให้อ้างอิงวิธีการตามเครื่องคิดเลขรุ่นนั้น ๆ

แบบฝึกทักษะ 1.5

ระดับพื้นฐาน ★

1. ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ โดยใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- | | |
|------------------------|--|
| 1) $\sin 38^\circ 40'$ | 2) $\cos 62^\circ 28'$ |
| 3) $\tan 0.1542$ | 4) $\cot 1.1560$ |
| 5) $\sec 41^\circ$ | 6) $\operatorname{cosec} 77^\circ 10'$ |
| 7) $\sin 42^\circ 18'$ | 8) $\tan 12^\circ 36'$ |

2. ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ โดยใช้เครื่องคิดเลข

- | | |
|--------------------|--------------------|
| 1) $\sin 63^\circ$ | 2) $\tan 11^\circ$ |
| 3) $\cos 0.7436$ | 4) $\tan 0.4558$ |

ระดับกลาง ★★

3. กำหนด $0 \leq \theta \leq \pi$ ให้หาค่าของ θ ที่ทำให้

- | | |
|---------------------------|---|
| 1) $\sin \theta = 0.3700$ | 2) $\cos \theta = 0.9159$ |
| 3) $\tan \theta = 0.4765$ | 4) $\cot \theta = 1.5204$ |
| 5) $\sec \theta = 1.2232$ | 6) $\operatorname{cosec} \theta = 2.7902$ |
| 7) $\tan \theta = 0.4684$ | 8) $\sin \theta = 1.0785$ |

4. ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $\hat{CAB}$ เป็นมุมฉาก AB เท่ากับ 32 องศา และมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 14 เซนติเมตร อยากทราบว่าความยาวของด้าน AB และ AC เป็นเท่าใด

5. ถ้า $\triangle PQR$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $\hat{RPQ}$ เป็นมุมฉาก ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 13 เซนติเมตร และด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 5 เซนติเมตร อยากทราบว่า $\hat{PQR}$ และ $\hat{QRP}$ มีขนาดเป็นเท่าใด

ระดับท้าทาย ★★★

6. เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งซึ่งมีมุม A และมุม B เป็นมุมที่อยู่ภายในข้างเดียวกันของเส้นตัด ถ้า $\cot A = 1.3270$ และ $\tan B = 0.3249$ อยากทราบว่าเส้นตรงคู่ขนานกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

1.6 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

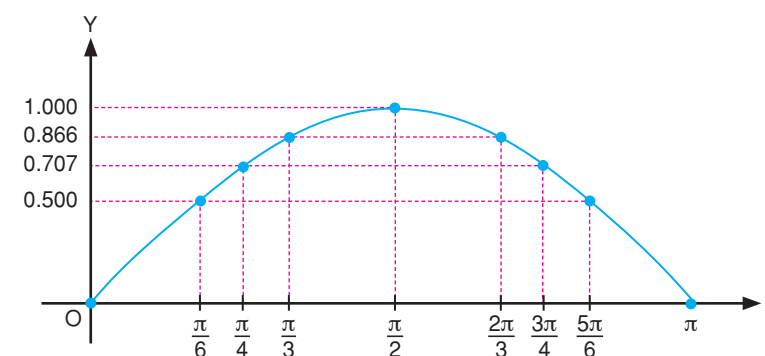
นักเรียนได้ศึกษาการเขียนกราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น เช่น $y = x + 3$ และกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง เช่น $y = x^2 + x - 6$ ซึ่งนักเรียนทราบแล้วว่า การเขียนกราฟของฟังก์ชันแต่ละชนิดจะต้องสมมติค่าของตัวแปร x ให้เหมาะสมเพื่อให้ได้คู่อันดับของกราฟที่ค่อนข้างจะสมบูรณ์เพื่อนำไปเขียนกราฟ สำหรับการเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะใช้หลักการเดียวกัน ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. กราฟของ $y = \sin x$

ให้นักเรียนพิจารณารูปของ $y = \sin x$ ในแต่ละช่วงต่อไปนี้

1) กราฟของ $y = \sin x$ เมื่อ $0 \leq x \leq \pi$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

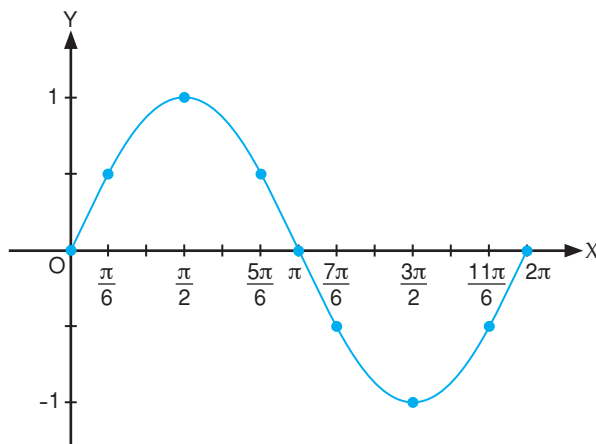


รูปที่ 32

2) กราฟของ $y = \sin x$ เมื่อ $0 \leq x \leq 2\pi$

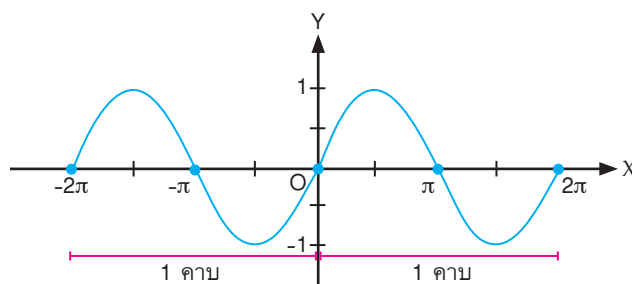
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0





รูปที่ 33

จาก $\sin(2n\pi + \alpha) = \sin \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้กราฟของฟังก์ชันไซน์ ดังนี้
กราฟของ $y = \sin x$ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$



รูปที่ 34

จากกราฟของ $y = \sin x$ ข้างต้น จะเห็นว่า กราฟจะแบ่งแกน X ออกเป็นช่วงย่อยที่สั้นที่สุด 2 ช่วง โดยที่ช่วงย่อยแต่ละช่วงมีความยาวเท่ากัน และกราฟในแต่ละช่วงย่อยมีลักษณะเหมือนกัน เรียกความยาวของช่วงย่อยดังกล่าวว่า **คาบ (period)** และเรียกฟังก์ชันของกราฟว่า **ฟังก์ชันที่เป็นคาบ (periodic function)**

และจากกราฟข้างต้นเป็นกราฟที่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด ซึ่งจะเรียกค่าที่เท่ากับครึ่งหนึ่งของค่าสูงสุดลบด้วยค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่เป็นคาบว่า **แอมพลิจูด (amplitude)** ซึ่งเป็นไปตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม

แอมพลิจูดของฟังก์ชันที่เป็นคาบเท่ากับ $\frac{\text{ค่าสูงสุด} - \text{ค่าต่ำสุด}}{2}$

จากกราฟของ $y = \sin x$ จะเห็นว่า $-2\pi \leq x \leq 0$ และ $0 \leq x \leq 2\pi$ เป็นช่วงที่มีความยาว 2π เท่ากัน และกราฟบนช่วงนี้มีลักษณะเหมือนกัน จึงกล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน $y = \sin x$ มีคาบเท่ากับ 2π และเมื่อพิจารณากราฟในช่วง $-2\pi \leq x \leq 0$ จะเห็นว่า กราฟของฟังก์ชันเป็นกราฟเส้นโค้งเปิดลงด้านล่างตั้งแต่ช่วง -2π ถึง $-\pi$ ซึ่งมีค่าสูงสุดเท่ากับ 1 และเป็นกราฟเส้นโค้งเปิดขึ้นด้านบนตั้งแต่ช่วง $-\pi$ ถึง 0 ซึ่งมีค่าต่ำสุดเท่ากับ -1 ดังนั้น ฟังก์ชัน $y = \sin x$ มีแอมพลิจูดเท่ากับ $\frac{1 - (-1)}{2} = 1$

โดเมนของฟังก์ชันไซน์ คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คือ $[-1, 1]$

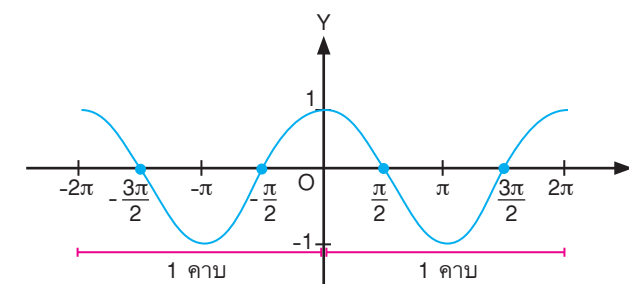
กราฟของฟังก์ชันไซน์ตัดแกน X ที่จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ $\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$

กราฟของฟังก์ชันไซน์ตัดแกน Y ที่จุด $(0, 0)$

2. กราฟของ $y = \cos x$

กราฟของ $y = \cos x$ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ มีลักษณะการเขียนกราฟคล้ายกับกราฟของ $y = \sin x$

จาก $\cos(2n\pi + \alpha) = \cos \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้กราฟของฟังก์ชันโคไซน์ ดังนี้



จากกราฟของ $y = \cos x$ จะเห็นว่า $-2\pi \leq x \leq 0$ และ $0 \leq x \leq 2\pi$ เป็นช่วงที่มีความยาว 2π เท่ากัน และกราฟบนช่วงนี้มีลักษณะเหมือนกัน จึงกล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน $y = \cos x$ มีคาบเท่ากับ 2π และเมื่อพิจารณากราฟในช่วง $-2\pi \leq x \leq 0$ จะเห็นว่า กราฟของฟังก์ชันมีค่าสูงสุดเท่ากับ 1 และมีค่าต่ำสุดเท่ากับ -1 ดังนั้น ฟังก์ชัน $y = \cos x$ มีแอมพลิจูดเท่ากับ $\frac{1 - (-1)}{2} = 1$

โดเมนของฟังก์ชันโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชันโคไซน์ คือ $[-1, 1]$

กราฟของฟังก์ชันโคไซน์ตัดแกน X ที่จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ $\dots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$

กราฟของฟังก์ชันโคไซน์ตัดแกน Y ที่จุด $(0, 1)$

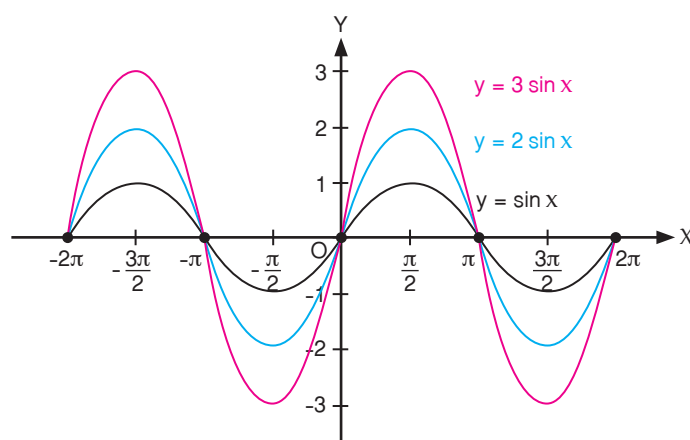
ตัวอย่างที่ 25

เขียนกราฟของ $y = \sin x$, $y = 2 \sin x$ และ $y = 3 \sin x$ บนระบบพิกัดฉากเดียวกัน เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ พร้อมทั้งหาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชันทั้งสาม

วิธีทำ

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$2 \sin x$	0	2	0	-2	0
$3 \sin x$	0	3	0	-3	0

จากตารางเขียนกราฟได้ ดังนี้



จากกราฟจะได้เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชันทั้งสาม ดังนี้

ฟังก์ชัน	เรนจ์	คาบ	แอมพลิจูด
$\sin x$	$[-1, 1]$	2π	$\frac{1 - (-1)}{2} = 1$
$2 \sin x$	$[-2, 2]$	2π	$\frac{2 - (-2)}{2} = 2$
$3 \sin x$	$[-3, 3]$	2π	$\frac{3 - (-3)}{2} = 3$

ลองทำ

เขียนกราฟของ $y = \sin x$, $y = \frac{1}{2} \sin x$ และ $y = \frac{1}{4} \sin x$ บนระบบพิกัดฉากเดียวกัน เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ พร้อมทั้งหาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชันทั้งสาม

จากตัวอย่างที่ 25 การหาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชันไซน์ในรูปทั่วไป เป็นดังนี้

กำหนด $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = a \sin(nx)$ เมื่อ $n > 0$

จะได้ว่า เรนจ์ของฟังก์ชันเท่ากับ $[-|a|, |a|]$

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ $\frac{2\pi}{n}$

แอมพลิจูดของฟังก์ชันเท่ากับ $|a|$

จากรูปทั่วไปของฟังก์ชันไซน์ จะเห็นว่า คาบของฟังก์ชันเท่ากับ $\frac{2\pi}{n}$ และแอมพลิจูดของฟังก์ชันเท่ากับ $|a|$ ทำให้การเขียนกราฟของฟังก์ชันไซน์ทำได้รวดเร็วขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 26

เขียนกราฟของ $y = 4 \sin 2x$ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ พร้อมทั้งหาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูด

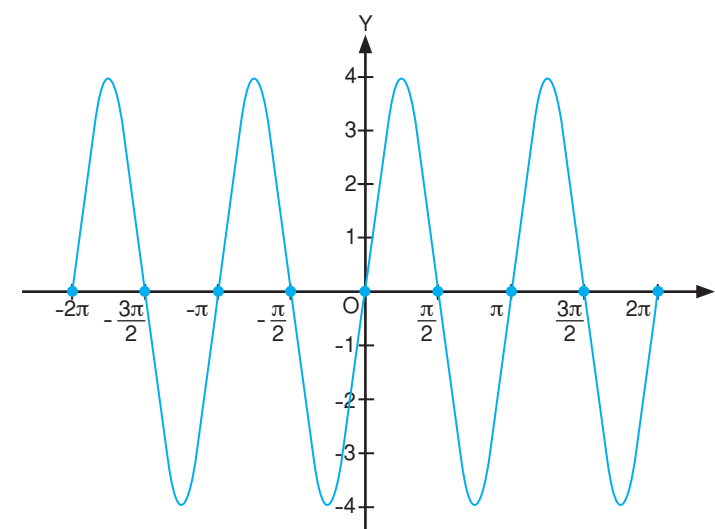
วิธีทำ จาก $y = 4 \sin 2x$ จะได้ว่า $a = 4$ และ $n = 2$

ดังนั้น เรนจ์ของฟังก์ชันเท่ากับ $[-|a|, |a|] = [-4, 4]$

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

แอมพลิจูดของฟังก์ชันเท่ากับ $|a| = |4| = 4$

เขียนกราฟของ $y = 4 \sin 2x$ ได้ ดังนี้



ลองทำ

เขียนกราฟของ $y = \frac{1}{2} \sin 2x$ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ พร้อมทั้งหาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูด

ตัวอย่างที่ 27

ให้หาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของ $y = 8 \sin 6x$

วิธีทำ จาก $y = 8 \sin 6x$ จะได้ว่า $a = 8$ และ $n = 6$

ดังนั้น เรนจ์ของฟังก์ชันเท่ากับ $[-|a|, |a|] = [-8, 8]$

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

แอมพลิจูดของฟังก์ชันเท่ากับ $|a| = |8| = 8$

ลองทำดู

ให้หาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของ $y = 2 \sin \frac{x}{2}$

การหาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชันโคไซน์ในรูปแบบทั่วไป เป็นดังนี้

กำหนด $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = a \cos (nx)$ เมื่อ $n > 0$

จะได้ว่า เรนจ์ของฟังก์ชันเท่ากับ $[-|a|, |a|]$

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ $\frac{2\pi}{n}$

แอมพลิจูดของฟังก์ชันเท่ากับ $|a|$

ตัวอย่างที่ 28

เขียนกราฟของ $y = 2 \cos 2x$ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ พร้อมทั้งหาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูด

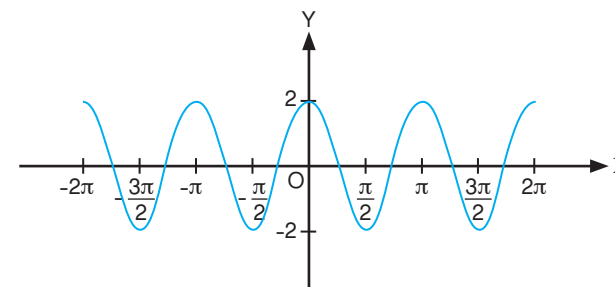
วิธีทำ จาก $y = 2 \cos 2x$ จะได้ว่า $a = 2$ และ $n = 2$

ดังนั้น เรนจ์ของฟังก์ชันเท่ากับ $[-|a|, |a|] = [-2, 2]$

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

แอมพลิจูดของฟังก์ชันเท่ากับ $|a| = |2| = 2$

เขียนกราฟของ $y = 2 \cos 2x$ ได้ ดังนี้



ลองทำดู

เขียนกราฟของ $y = 3 \cos 3x$ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ พร้อมทั้งหาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูด

ตัวอย่างที่ 29

ให้หาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของ $y = 2 \cos \frac{x}{4}$

วิธีทำ จาก $y = 2 \cos \frac{x}{4}$ จะได้ว่า $a = 2$ และ $n = \frac{1}{4}$

ดังนั้น เรนจ์ของฟังก์ชันเท่ากับ $[-|a|, |a|] = [-2, 2]$

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$

แอมพลิจูดของฟังก์ชันเท่ากับ $|a| = |2| = 2$

ลองทำดู

ให้หาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของ $y = 3 \cos \frac{x}{3}$

การเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติบางฟังก์ชันอาจต้องใช้ความรู้ เรื่อง การเลื่อนขนาน โดยใช้การเลื่อนขนานกราฟรูปมาตรฐานในแนวแกนนอนหรือแนวแกนตั้ง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 30

เขียนกราฟของ $y = 2 \sin 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

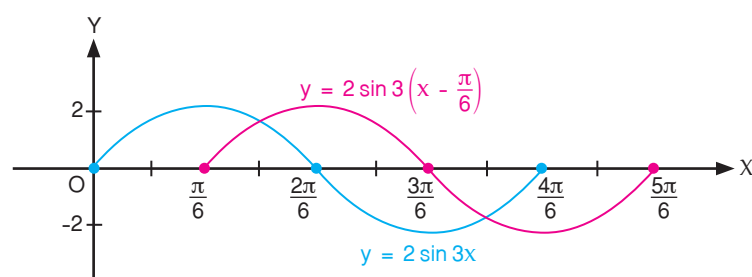
วิธีทำ เนื่องจากกราฟของ $y = 2 \sin 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ เป็นกราฟที่เกิดจากการเลื่อนขนานกราฟของ $y = 2 \sin 3x$ ไปทางขวา $\frac{\pi}{6}$ หน่วย

ดังนั้น การเขียนกราฟของ $y = 2 \sin 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ จึงมีขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เขียนกราฟของ $y = 2 \sin 3x$

ขั้นตอนที่ 2 เลื่อนกราฟของ $y = 2 \sin 3x$ ไปทางขวา $\frac{\pi}{6}$ หน่วย จะได้กราฟของ

$$y = 2 \sin 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ ดังรูป}$$



ลองทำ

เขียนกราฟของ $y = 3 \sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

ตัวอย่างที่ 31

เขียนกราฟของ $y = -3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$

วิธีทำ นำ $y = -3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$ มาจัดรูปใหม่ จะได้ $y = -3 \cos 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$

จะเป็นฟังก์ชันที่มี 1 คาบ เท่ากับ $\frac{2\pi}{2} = \pi$ และแอมพลิจูดเท่ากับ $|-3| = 3$

เนื่องจากกราฟของ $y = -3 \cos 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ เป็นกราฟที่เกิดจากการเลื่อนขนาน

กราฟของ $y = -3 \cos 2x$ ไปทางซ้าย $\frac{\pi}{6}$ หน่วย แล้วเลื่อนกราฟขึ้น 2 หน่วย

ดังนั้น การเขียนกราฟของ $y = -3 \cos 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ จึงมีขั้นตอน ดังนี้

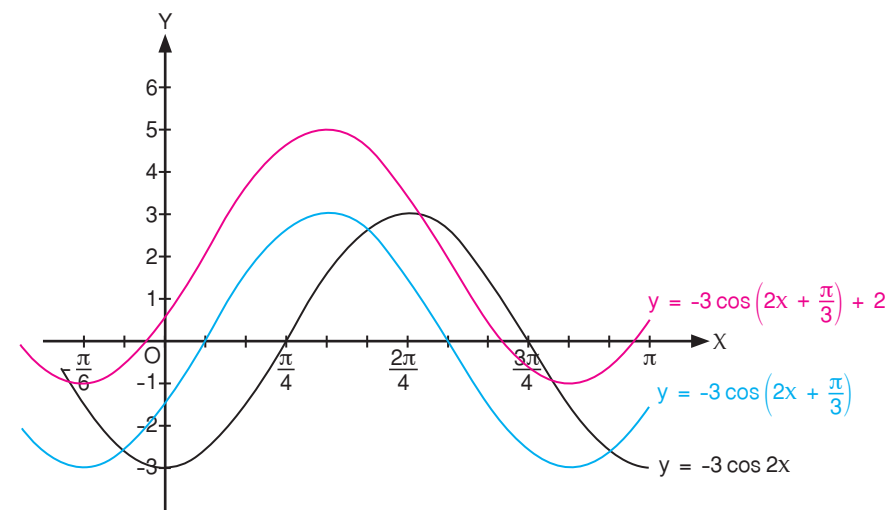
ขั้นตอนที่ 1 เขียนกราฟของ $y = -3 \cos 2x$

ขั้นตอนที่ 2 เลื่อนกราฟของ $y = -3 \cos 2x$ ให้ขนานกับแกน X ไปทางซ้าย $\frac{\pi}{6}$ หน่วย

จะได้กราฟของ $y = -3 \cos 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ หรือ $y = -3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

แล้วเลื่อนกราฟของ $y = -3 \cos 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ขึ้น 2 หน่วย จะได้กราฟของ

$y = -3 \cos 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ หรือ $y = -3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$ ดังรูป



ลองทำ

เขียนกราฟของ $y = -2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 3$

ในการเขียนกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ นักเรียนควรทราบโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังนี้

โดเมนของฟังก์ชันแทนเจนต์ คือ $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$

โดเมนของฟังก์ชันเซแคนต์ คือ $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$

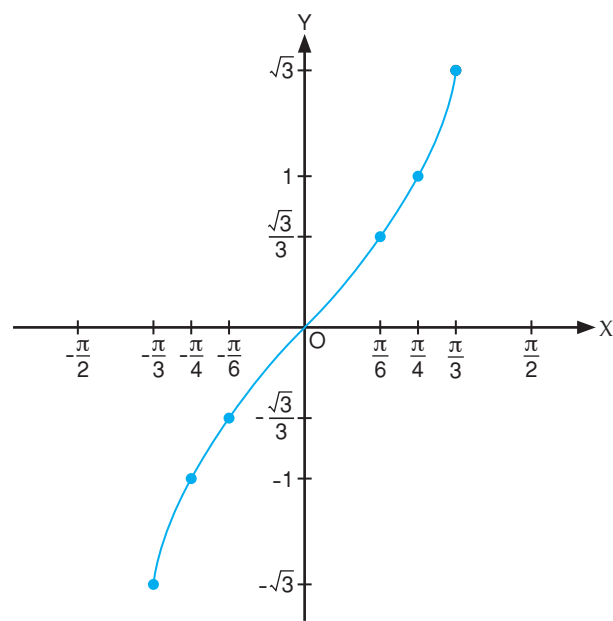
โดเมนของฟังก์ชันโคแทนเจนต์ คือ $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

โดเมนของฟังก์ชันโคเซแคนต์ คือ $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

3. กราฟของ $y = \tan x$

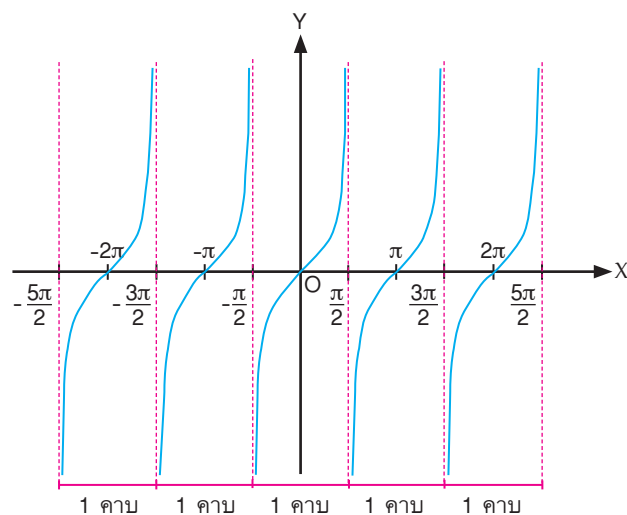
พิจารณากราฟของ $y = \tan x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



รูปที่ 36

จาก $\tan(n\pi + \alpha) = \tan \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้กราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์ ดังนี้



รูปที่ 37

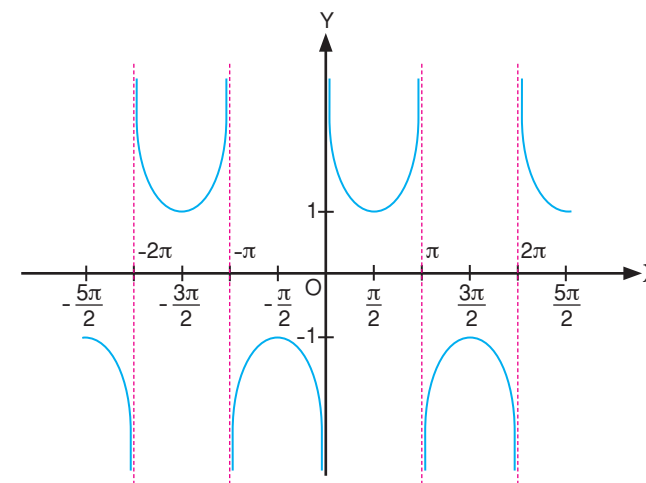
จากกราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์ เส้นตรง $x = -\frac{\pi}{2}$ และ $x = \frac{\pi}{2}$ ไม่ใช่สมาชิกของโดเมนของ $y = \tan x$ และเส้นกราฟจะโค้งเข้าหาเส้นตรง $x = -\frac{\pi}{2}$ และ $x = \frac{\pi}{2}$

เมื่อพิจารณารูปเป็นช่วงย่อยจะเห็นว่า กราฟของฟังก์ชันแต่ละช่วงย่อยมีลักษณะเหมือนกัน ซึ่งแต่ละช่วงย่อยมีความยาวเท่ากับ π ดังนั้น ฟังก์ชันแทนเจนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ และมีคาบเท่ากับ π และจะเห็นว่า กราฟของ $y = \tan x$ ในแต่ละคาบไม่มีค่าต่ำสุดและค่าสูงสุด ดังนั้น จึงไม่มีแอมพลิจูด

สำหรับกราฟของฟังก์ชันโคเซแคนต์ ฟังก์ชันเซแคนต์ และฟังก์ชันโคแทนเจนต์ ซึ่งทั้ง 3 ฟังก์ชัน เป็นส่วนกลับของฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ และฟังก์ชันแทนเจนต์ ตามลำดับ

4. กราฟของ $y = \operatorname{cosec} x$

พิจารณารูปของ $y = \operatorname{cosec} x$



รูปที่ 38

จากกราฟของ $y = \operatorname{cosec} x$ จะเห็นว่า ค่าของฟังก์ชันโคเซแคนต์เป็นจำนวนจริงทุกจำนวน ยกเว้นค่าระหว่าง -1 กับ 1

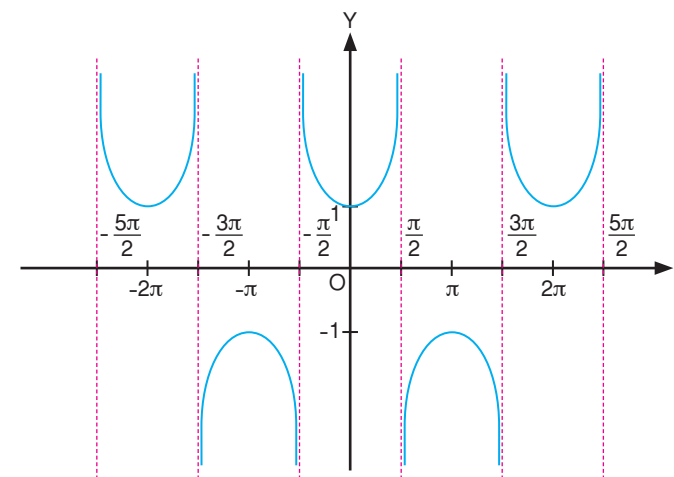
เรนจ์ของฟังก์ชันโคเซแคนต์ คือ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

ฟังก์ชันโคเซแคนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับ 2π

ฟังก์ชันโคเซแคนต์ไม่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด จึงไม่มีแอมพลิจูด

5. กราฟของ $y = \sec x$

พิจารณารูปของ $y = \sec x$



รูปที่ 39

จากกราฟของ $y = \sec x$ จะเห็นว่า ค่าของฟังก์ชันเซแคนต์เป็นจำนวนจริงทุกจำนวน ยกเว้น
ค่าระหว่าง -1 กับ 1

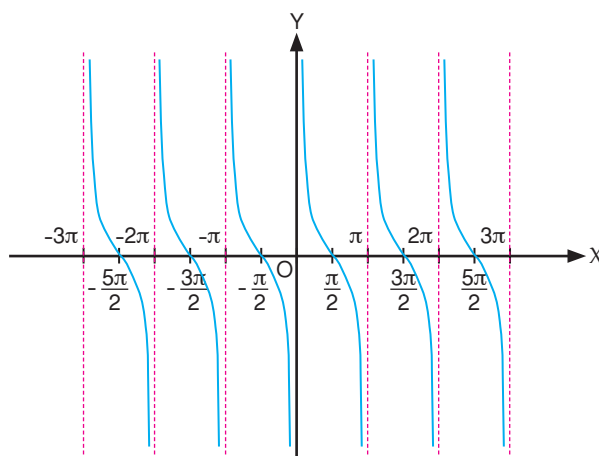
เรนจ์ของฟังก์ชันเซแคนต์ คือ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

ฟังก์ชันเซแคนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับ 2π

ฟังก์ชันเซแคนต์ไม่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด จึงไม่มีแอมพลิจูด

6. กราฟของ $y = \cot x$

พิจารณากราฟของ $y = \cot x$



รูปที่ 40

จากกราฟของ $y = \cot x$ จะเห็นว่า ค่าของฟังก์ชันโคแทนเจนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและ
มีคาบเท่ากับ π

ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ไม่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด จึงไม่มีแอมพลิจูด

แบบฝึกทักษะ 1.6

ระดับพื้นฐาน ★

1. ให้หาคาบและแอมพลิจูดของฟังก์ชันต่อไปนี้

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| 1) $y = 5 \sin x$ | 2) $y = \frac{1}{2} \sin x$ |
| 3) $y = \sin 8x$ | 4) $y = \sin \frac{x}{3}$ |
| 5) $y = 6 \cos \frac{x}{2}$ | 6) $y = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$ |
| 7) $y = 3 \cos x$ | 8) $y = \frac{1}{2} \cos 4x$ |

2. เขียนกราฟของ $y = a \sin nx$ หรือ $y = a \cos nx$ ต่อไปนี้ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

- | | |
|---------------------------------------|------------------------------|
| 1) $y = 4 \sin x$ | 2) $y = \sin 4x$ |
| 3) $y = \frac{1}{3} \sin \frac{x}{2}$ | 4) $y = \frac{2}{5} \sin 2x$ |
| 5) $y = 6 \cos x$ | 6) $y = 3 \cos \frac{x}{4}$ |
| 7) $y = \cos \frac{x}{3}$ | 8) $y = 3 \cos 4x$ |

3. ให้หาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1) $y = \frac{1}{4} \sin \frac{x}{3}$ | 2) $y = \frac{1}{6} \sin \frac{4}{5} x$ |
| 3) $y = \frac{1}{7} \cos \frac{x}{8}$ | 4) $y = \frac{3}{8} \cos \frac{3}{4} x$ |

ระดับกลาง ★★

4. ให้หาคาบและแอมพลิจูดของฟังก์ชันต่อไปนี้

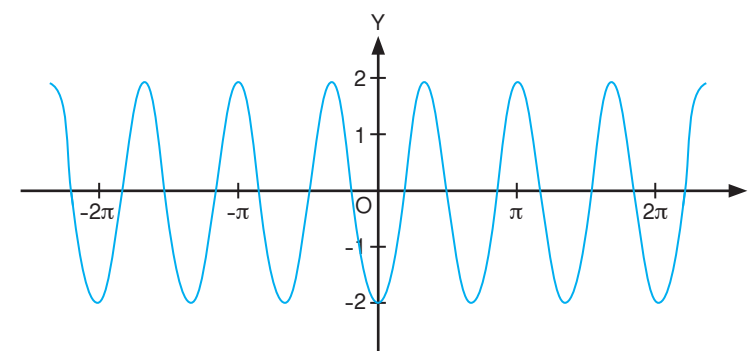
- | | |
|--|--|
| 1) $y = \frac{4}{5} \sin 7x - 1$ | 2) $y = \frac{4}{7} \sin \left(2x - \frac{3\pi}{4} \right)$ |
| 3) $y = \frac{2}{7} \cos 8x + \frac{3}{5}$ | 4) $y = 2 \cos \left(5x + \frac{7\pi}{8} \right) + 1$ |

5. เขียนกราฟของ $y = a \sin nx$ หรือ $y = a \cos nx$ ต่อไปนี้ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

- | | |
|--|--|
| 1) $y = 3 \sin 2x + 3$ | 2) $y = 3 \sin 4 \left(x + \frac{\pi}{8} \right)$ |
| 3) $y = 2 \sin 3 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + 3$ | 4) $y = \frac{7}{4} \cos 3x - 2$ |
| 5) $y = \frac{2}{3} \cos \frac{x}{2} + 1$ | 6) $y = \frac{3}{5} \cos \left(2x - \frac{\pi}{8} \right) + 10$ |

ระดับท้าทาย ★★★

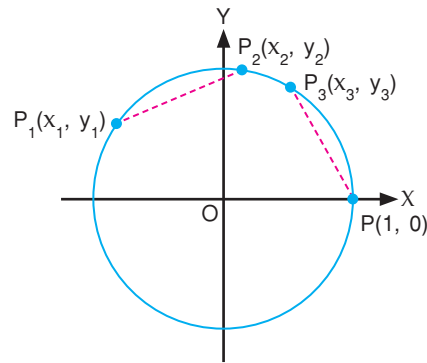
6. เขียนฟังก์ชันตรีโกณมิติจากกราฟต่อไปนี้



1.7 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

ในหัวข้อที่ผ่านมา นักเรียนได้ศึกษาการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียวหรือของมุมเพียงมุมเดียวมาแล้ว ในหัวข้อนี้ นักเรียนจะได้ศึกษาการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงสองจำนวนหรือมุมสองมุม

ให้นักเรียนพิจารณาค่าของ $\cos(\alpha - \beta)$ เมื่อ α และ β เป็นจำนวนจริงหรือมุมดังต่อไปนี้



รูปที่ 41

กำหนดส่วนโค้ง PP_1 ยาว α หน่วย และส่วนโค้ง PP_2 ยาว β หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง P_1P_2 ยาว $\alpha - \beta$ หน่วย

กำหนด P_3 เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ทำให้ส่วนโค้ง PP_3 ยาวเท่ากับส่วนโค้ง P_1P_2

ดังนั้น ส่วนโค้ง PP_3 ยาว $\alpha - \beta$ หน่วย

กำหนดพิกัดของจุด P_1 , P_2 และ P_3 เป็น (x_1, y_1) , (x_2, y_2) และ (x_3, y_3) ตามลำดับ

ซึ่งเป็นพิกัดจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α , β และ $\alpha - \beta$ ตามลำดับ

$$\text{จะได้ว่า } x_1 = \cos \alpha \quad y_1 = \sin \alpha \quad \dots\dots ①$$

$$x_2 = \cos \beta \quad y_2 = \sin \beta \quad \dots\dots ②$$

$$x_3 = \cos(\alpha - \beta) \quad y_3 = \sin(\alpha - \beta) \quad \dots\dots ③$$

เนื่องจากส่วนโค้ง PP_3 ยาวเท่ากับส่วนโค้ง P_1P_2

จะได้ว่า ความยาวของคอร์ด PP_3 เท่ากับความยาวของคอร์ด P_1P_2

ดังนั้น

$$PP_3 = P_1P_2$$

$$\sqrt{(x_3 - 1)^2 + (y_3 - 0)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$(x_3 - 1)^2 + (y_3 - 0)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$(x_3^2 - 2x_3 + 1) + y_3^2 = (x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2) + (y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2)$$

$$(x_3^2 + y_3^2) - 2x_3 + 1 = (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - 2x_1x_2 - 2y_1y_2$$

$$1 - 2x_3 + 1 = 1 + 1 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2$$

$$x_3 = x_1x_2 + y_1y_2$$

เนื่องจากจุด (x_1, y_1) เป็นจุดที่อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้นสมการวงกลมที่ผ่านจุด (x_1, y_1) คือ $x_1^2 + y_1^2 = 1$

จาก ①, ② และ ③ สรุปได้ว่า

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

ที่กล่าวมาข้างต้นเป็นการหาค่าของ $\cos(\alpha - \beta)$ หรือโคไซน์ของผลต่างระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนหรือมุมสองมุม ซึ่งสามารถนำค่าของ $\cos(\alpha - \beta)$ ไปใช้ในการหาค่าของฟังก์ชันอื่นๆ คือ $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$ และ $\sin(\alpha - \beta)$ ซึ่งจะได้กล่าวต่อไป

การหาค่าของ $\cos(\alpha + \beta)$ ทำได้ ดังนี้

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta))$$

$$= \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta)$$

$$= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha (-\sin \beta)$$

$$= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{aligned} \sin(-\theta) &= -\sin \theta \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

ต่อไปจะเป็นการหาค่าของ $\sin(\alpha + \beta)$ ซึ่งต้องใช้ค่าของ $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ และ $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ มาช่วยในการหา ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

พิจารณาค่าของ $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha$$

$$= 0(\cos \alpha) + 1(\sin \alpha)$$

$$= \sin \alpha$$

สรุปได้ว่า

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\text{จาก } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

แทนค่า α ด้วย $\frac{\pi}{2} - \beta$

$$\text{จะได้ว่า } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

สรุปได้ว่า

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos \beta$$

เนื่องจาก $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ และ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos \beta$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } \sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) \\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin \beta \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

พิจารณาการหาค่าของ $\sin(\alpha - \beta)$ ดังนี้

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) \\ &= \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha (-\sin \beta) \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

นักเรียนสามารถหาค่าของ $\tan(\alpha + \beta)$ และ $\tan(\alpha - \beta)$ ได้ เมื่อทราบค่าของ $\sin(\alpha + \beta)$ และ $\cos(\alpha + \beta)$ ดังนี้

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \quad \text{เมื่อ } \cos(\alpha + \beta) \neq 0$$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

$$= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}$$

เมื่อ $\cos \alpha \cos \beta \neq 0$

$$= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

เมื่อ $\tan \alpha \tan \beta \neq 1$

สรุปได้ว่า

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

เมื่อ $\tan \alpha \tan \beta \neq 1$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

เมื่อ $\tan \alpha \tan \beta \neq -1$



Thinking Time

ให้แสดงว่า $\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \beta + \cot \alpha}$ และ $\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha}$

ตัวอย่างที่ 32

ให้หาค่าของ

$$1) \cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$2) \sin(30^\circ - 45^\circ)$$

วิธีทำ 1) จาก $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } \cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right) &= \cos \frac{5\pi}{6} \cos \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{6} \sin \frac{3\pi}{4} \\ &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

2) จาก $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
 จะได้ว่า $\sin(30^\circ - 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ - \cos 30^\circ \sin 45^\circ$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

ดังนั้น $\sin(30^\circ - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

ลองทำ

ให้หาค่าของ

1) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$

2) $\cos(60^\circ + 45^\circ)$

ตัวอย่างที่ 33

ให้หาค่าของ

1) $\tan \frac{5\pi}{12}$

2) $\cos 420^\circ$

วิธีทำ 1) จาก

$$\tan \frac{5\pi}{12} = \tan \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right)$$

และ $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

จะได้ว่า $\tan\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \frac{2\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{2\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}}$

$$= \frac{-\sqrt{3} - 1}{1 + (-\sqrt{3})(1)}$$

$$= \frac{-(1 + \sqrt{3})}{1 - \sqrt{3}} \times \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{-1 - 2\sqrt{3} - 3}{1 - 3}$$

$$= 2 + \sqrt{3}$$

2) จาก

$$\cos 420^\circ = \cos(360^\circ + 60^\circ)$$

และ $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

จะได้ว่า $\cos(360^\circ + 60^\circ) = \cos 360^\circ \cos 60^\circ - \sin 360^\circ \sin 60^\circ$

$$= \cos 60^\circ$$

ดังนั้น $\cos 420^\circ = \frac{1}{2}$

ลองทำ

ให้หาค่าของ

1) $\tan \frac{\pi}{12}$

2) $\cos 300^\circ$

ตัวอย่างที่ 34

ให้หาค่าของ

1) $\tan(180^\circ + \alpha)$ เมื่อ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

2) $\cos(-225^\circ)$

วิธีทำ 1) จาก $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

จะได้ว่า $\tan(180^\circ + \alpha) = \frac{\tan 180^\circ + \tan \alpha}{1 - \tan 180^\circ \tan \alpha}$

$$= \frac{0 + \tan \alpha}{1 - 0}$$

$$= \tan \alpha$$

ดังนั้น $\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$

2) จาก $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

จะได้ว่า $\cos(-225^\circ) = \cos 225^\circ$

$$= \cos(180^\circ + 45^\circ)$$

$$= \cos 180^\circ \cos 45^\circ - \sin 180^\circ \sin 45^\circ$$

$$= (-1) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 0$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ดังนั้น $\cos(-225^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ลองทำ

ให้หาค่าของ

1) $\tan(360^\circ + \alpha)$ เมื่อ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

2) $\sin 135^\circ$

นอกจากที่กล่าวมาแล้ว ยังสามารถใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของมุม เมื่อโจทย์หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ รวมทั้งโจทย์ที่ต้องแสดงการพิสูจน์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 35

กำหนด $\sin A = \frac{3}{5}$ และ $\cos B = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < A < \pi$ และ $\pi < B < \frac{3\pi}{2}$

ให้หาค่าของ $\tan(A + B)$

วิธีทำ จาก $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ และ $\sin A = \frac{3}{5}$

$$\text{จะได้ว่า } \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 A = 1$$

$$\cos A = \pm \frac{4}{5}$$

$$\text{แต่ } \frac{\pi}{2} < A < \pi$$

$$\text{จะได้ว่า } \cos A = -\frac{4}{5}$$

$$\text{จาก } \sin^2 B + \cos^2 B = 1 \text{ และ } \cos B = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{จะได้ว่า } \sin^2 B + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\sin B = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{แต่ } \pi < B < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{จะได้ว่า } \sin B = -\frac{1}{2}$$

$$\text{จากข้อกำหนด จะได้ว่า } \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } \tan(A + B) &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\ &= \frac{-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} \\ &= \frac{\frac{-9 + 4\sqrt{3}}{12}}{1 + \frac{3\sqrt{3}}{12}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{-9 + 4\sqrt{3}}{12}}{\frac{12 + 3\sqrt{3}}{12}} \\ &= \frac{-9 + 4\sqrt{3}}{12 + 3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \tan(A + B) = \frac{-9 + 4\sqrt{3}}{12 + 3\sqrt{3}}$$

ลองทำ

กำหนด $\sin A = -\frac{4}{5}$ และ $\cos B = \frac{1}{2}$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} < A < 2\pi$ และ $0 < B < \frac{\pi}{2}$
ให้หาค่าของ $\tan(A - B)$

ตัวอย่างที่ 36

กำหนด $13 \sin \alpha + 5 = 0$ และ $13 \cos \beta - 12 = 0$ เมื่อ $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ และ $270^\circ < \beta < 360^\circ$ ให้หาค่าของ $\cos(\alpha + \beta)$

วิธีทำ จาก $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ และ $13 \sin \alpha + 5 = 0$

$$\text{จะได้ว่า } \sin \alpha = -\frac{5}{13}$$

$$\text{จาก } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\text{จะได้ว่า } \left(-\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{12}{13}$$

$$\text{แต่ } 180^\circ < \alpha < 270^\circ$$

$$\text{จะได้ว่า } \cos \alpha = -\frac{12}{13}$$

$$\text{จาก } \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \text{ และ } 13 \cos \beta - 12 = 0$$

$$\text{จะได้ว่า } \cos \beta = \frac{12}{13}$$

$$\text{และ } \sin^2 \beta + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1^2$$

$$\sin \beta = \pm \frac{5}{13}$$

$$\text{แต่ } 270^\circ < \beta < 360^\circ$$

$$\text{จะได้ว่า } \sin \beta = -\frac{5}{13}$$

จากข้อกำหนด จะได้ว่า $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ และ $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$

$$\sin \beta = -\frac{5}{13} \text{ และ } \cos \beta = \frac{12}{13}$$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \left(-\frac{12}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) - \left(-\frac{5}{13}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(\alpha + \beta) = -1$$

ลองทำ

กำหนด $5 \sin A + 4 = 0$ และ $\tan B + 1 = 0$ เมื่อ $270^\circ < A < 360^\circ$ และ $90^\circ < B < 180^\circ$

ให้หาค่าของ $\sin(A + B)$

ตัวอย่างที่ 37

ให้หาค่าของ

$$1) \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{3\pi}{20} + \cos \frac{\pi}{10} \sin \frac{3\pi}{20}$$

$$2) \cos 65^\circ \cos 35^\circ + \cos 25^\circ \cos 55^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } 1) \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{3\pi}{20} + \cos \frac{\pi}{10} \sin \frac{3\pi}{20} &= \sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3\pi}{20}\right) \\ &= \sin \frac{5\pi}{20} \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{3\pi}{20} + \cos \frac{\pi}{10} \sin \frac{3\pi}{20} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} 2) \cos 65^\circ \cos 35^\circ + \cos 25^\circ \cos 55^\circ &= \cos 65^\circ \cos 35^\circ + \sin 65^\circ \sin 35^\circ \\ &= \cos(65^\circ - 35^\circ) \\ &= \cos 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \cos 65^\circ \cos 35^\circ + \cos 25^\circ \cos 55^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ลองทำ

ให้หาค่าของ

$$1) \frac{\tan \frac{3\pi}{8} + \tan \frac{7\pi}{24}}{1 - \tan \frac{3\pi}{8} \tan \frac{7\pi}{24}}$$

$$2) \sin 118^\circ \cos 25^\circ - \cos 118^\circ \sin 25^\circ$$

ตัวอย่างที่ 38

$$\text{ให้หาค่าของ } \frac{\sin \alpha \cos(45^\circ - \alpha) + \cos \alpha \sin(45^\circ - \alpha)}{\cos \alpha \cos(60^\circ - \alpha) - \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha)}$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \frac{\sin \alpha \cos(45^\circ - \alpha) + \cos \alpha \sin(45^\circ - \alpha)}{\cos \alpha \cos(60^\circ - \alpha) - \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha)} &= \frac{\sin[\alpha + (45^\circ - \alpha)]}{\cos[\alpha + (60^\circ - \alpha)]} \\ &= \frac{\sin 45^\circ}{\cos 60^\circ} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{\sin \alpha \cos(45^\circ - \alpha) + \cos \alpha \sin(45^\circ - \alpha)}{\cos \alpha \cos(60^\circ - \alpha) - \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha)} = \sqrt{2}$$

ลองทำ

$$\text{ให้หาค่าของ } \frac{\sin A \cos(60^\circ - A) + \cos A \sin(60^\circ - A)}{\cos A \cos(30^\circ - A) - \sin A \sin(30^\circ - A)}$$

ตัวอย่างที่ 39

$$\text{ให้พิสูจน์ว่า } \sin(60^\circ - \alpha) + \sin(60^\circ + \alpha) = \sqrt{3} \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \sin(60^\circ - \alpha) + \sin(60^\circ + \alpha) &= (\sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha) + (\sin 60^\circ \cos \alpha + \cos 60^\circ \sin \alpha) \\ &= 2 \sin 60^\circ \cos \alpha \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cos \alpha \\ &= \sqrt{3} \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \sin(60^\circ - \alpha) + \sin(60^\circ + \alpha) = \sqrt{3} \cos \alpha$$

ให้พิสูจน์ว่า $\sin 4\alpha \cos \alpha + \cos 4\alpha \sin \alpha = \sin 3\alpha \cos 2\alpha + \cos 3\alpha \sin 2\alpha$

ตัวอย่างที่ 40

ให้พิสูจน์ว่า $\tan 15^\circ + \tan 75^\circ = 4$

วิธีทำ $\tan 15^\circ + \tan 75^\circ = \tan (45^\circ - 30^\circ) + \tan (30^\circ + 45^\circ)$

$$\begin{aligned} &= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} + \frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ} \\ &= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)} \\ &= \frac{\left[1^2 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right] + \left[1^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right]}{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\ &= \frac{1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{9} + 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{9}}{1 - \frac{3}{9}} \\ &= \frac{\frac{8}{3}}{\frac{2}{3}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

ให้พิสูจน์ว่า $\tan 105^\circ - \tan 15^\circ = -4$

แบบฝึกทักษะ 1.7

ระดับพื้นฐาน ★

1. ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ โดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

- | | | |
|---------------------------------|---|---|
| 1) $\sin (60^\circ + 45^\circ)$ | 2) $\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ | 3) $\sin 75^\circ$ |
| 4) $\cos 15^\circ$ | 5) $\tan 105^\circ$ | 6) $\sin \frac{7\pi}{12}$ |
| 7) $\cos \frac{17\pi}{12}$ | 8) $\tan \frac{11\pi}{12}$ | 9) $\tan \left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ |

2. ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

- | | |
|--|--|
| 1) $\cos \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{15} - \sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{\pi}{15}$ | 2) $\sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{21} - \cos \frac{3\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{21}$ |
| 3) $\cos \frac{4\pi}{5} \cos \frac{\pi}{20} + \sin \frac{4\pi}{5} \sin \frac{\pi}{20}$ | 4) $\sin 5^\circ \cos 25^\circ + \cos 5^\circ \sin 25^\circ$ |
| 5) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ - \sin 20^\circ \sin 40^\circ$ | 6) $\cos 75^\circ \cos 45^\circ - \cos 15^\circ \cos 315^\circ$ |

3. ให้แสดงว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้จริง

- | | |
|--|---|
| 1) $\sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$ | 2) $\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin \theta$ |
| 3) $\tan \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta$ | 4) $\sin (90^\circ - A) = \cos A$ |
| 5) $\cos (270^\circ + B) = \sin B$ | 6) $\tan (90^\circ - A) = \cot A$ |
| 7) $\sin (\pi + \theta) = -\sin \theta$ | 8) $\cos (90^\circ + A) = -\sin A$ |

4. กำหนด $\sin A = \frac{1}{2}$ และ $\cos B = \frac{1}{2}$ เมื่อ $0 < A < \frac{\pi}{2}$ และ $0 < B < \frac{\pi}{2}$
ให้หาค่าของ $\sin (A + B)$ และ $\cos (A - B)$

ระดับกลาง ★★

5. ให้แสดงว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้จริง

- $\cot (270^\circ + A) = -\tan A$
- $\cot (2\pi - \theta) = -\cot \theta$
- $\cot \left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta$

6. กำหนด $\tan A = -\frac{4}{3}$ และ $\cos B = \frac{4}{5}$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < A < \pi$ และ $0 < B < \frac{\pi}{2}$
ให้หาค่าของ $\tan (A + B)$

7. ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

- 1) $\frac{\tan 13^\circ + \tan 32^\circ}{\tan 13^\circ \tan 32^\circ - 1}$
- 2) $\frac{\tan 25^\circ - \tan 85^\circ}{1 + \tan 85^\circ \tan 25^\circ}$
- 3) $\frac{-\tan 15^\circ - 1}{\tan 15^\circ - 1}$
- 4) $\frac{\cot 25^\circ \cot 20^\circ - 1}{\cot 25^\circ + \cot 20^\circ}$
- 5) $\tan 75^\circ - \tan 30^\circ - \tan 75^\circ \tan 30^\circ$
- 6) $\cot 75^\circ + \cot 60^\circ + \cot 75^\circ \cot 60^\circ$

8. ให้เขียนฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

- 1) $\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta$
- 2) $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta$
- 3) $\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \tan \theta}{1 - \frac{\tan \theta}{\sqrt{3}}}$

9. ให้แสดงว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ เป็นจริง

- 1) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + A\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - A\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} + A\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - A\right) = \frac{1}{2}$
- 2) $\sin 3\theta \cos \theta + \cos 3\theta \sin \theta = 2 \sin 2\theta \cos 2\theta$
- 3) $\frac{\tan 4A + \tan 3A}{1 - \tan 4A \tan 3A} = \tan 7A$
- 4) $\frac{\cot 4\theta \cot \theta - 1}{\cot \theta + \cot 4\theta} = \frac{\cot 3\theta \cot 2\theta - 1}{\cot 2\theta + \cot 3\theta}$

10. กำหนด $\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{3}{\sqrt{3}}$ เมื่อ $0^\circ < A < 90^\circ$ และ $0^\circ < B < 90^\circ$
ให้หาค่าของ $A + B$

ระดับท้าทาย ★★★

11. กำหนด $\frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{5}{7}$ ให้หาค่าของ $\tan A \cot B$

1.8 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่า สามเท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริงหรือมุม

จากหัวข้อฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม นักเรียนสามารถนำความรู้ดังกล่าวมาหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่า สามเท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริงหรือมุมได้ ดังนี้

1. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่าของจำนวนจริงหรือมุม

1) การหาค่าของ $\sin 2\alpha$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก} \quad \sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) \\ &= \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha \\ &= \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

2) การหาค่าของ $\cos 2\alpha$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก} \quad \cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) \\ &= \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\text{กำหนด} \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \dots\dots ①$$

$$\text{เนื่องจาก} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\text{แทน } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \text{ ใน } ①$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า} \quad \cos 2\alpha &= (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\text{แทน } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \text{ ใน } ①$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า} \quad \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

3) การหาค่าของ $\tan 2\alpha$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก} \quad \tan 2\alpha &= \tan(\alpha + \alpha) \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} \\ &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad \text{เมื่อ } \tan^2 \alpha \neq 1 \end{aligned}$$

$$\text{สรุปได้ว่า} \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad \text{เมื่อ } \tan^2 \alpha \neq 1$$

ตัวอย่างที่ 41

กำหนด $\sin \theta = \frac{4}{5}$ และ $\cos \theta < 0$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ให้หาค่าของ

- 1) $\sin 2\theta$ 2) $\cos 2\theta$ 3) $\tan 2\theta$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า} \quad \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \theta &= 1 \\ \cos^2 \theta &= 1 - \frac{16}{25} \\ \cos^2 \theta &= \frac{9}{25} \\ \cos \theta &= \pm \frac{3}{5} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\cos \theta < 0$ จะได้ $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \left(\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25} \\ \text{ดังนั้น} \quad \sin 2\theta &= -\frac{24}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \cos 2\theta &= 2 \cos^2 \theta - 1 = 2 \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25} \\ \text{ดังนั้น} \quad \cos 2\theta &= -\frac{7}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \tan 2\theta &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 - \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{24}{7} \\ \text{ดังนั้น} \quad \tan 2\theta &= \frac{24}{7} \end{aligned}$$

ลองทำ

กำหนด $\cos \theta = \frac{5}{13}$ และ $\sin \theta > 0$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ให้หาค่าของ

- 1) $\sin 2\theta$ 2) $\cos 2\theta$ 3) $\tan 2\theta$

ตัวอย่างที่ 42

ให้แสดงว่า $\tan \theta \sin 2\theta = 1 - \cos 2\theta$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \tan \theta \sin 2\theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} (2 \sin \theta \cos \theta) \\ &= 2 \sin^2 \theta \\ &= 1 - \cos 2\theta \end{aligned}$$

ดังนั้น $\tan \theta \sin 2\theta = 1 - \cos 2\theta$

ลองทำ

ให้แสดงว่า $\frac{\sin 2A}{1 - \cos 2A} = \cot A$

2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสามเท่าของจำนวนจริงหรือมุม

1) การหาค่าของ $\sin 3\alpha$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก} \quad \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \text{จะได้ว่า} \quad \sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) \\ &= \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha \\ &= (2 \sin \alpha \cos \alpha) \cos \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha \\ &= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + (1 - \sin^2 \alpha) \sin \alpha - \sin^3 \alpha \\ &= 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - \sin^3 \alpha - \sin^3 \alpha \\ &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

2) การหาค่าของ $\cos 3\alpha$

เนื่องจาก $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) \\ &= \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha \\ &= (2\cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - (2\sin \alpha \cos \alpha) \sin \alpha \\ &= 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2\sin^2 \alpha \cos \alpha \\ &= 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha \\ &= 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2\cos \alpha + 2\cos^3 \alpha \\ &= 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

3) การหาค่าของ $\tan 3\alpha$

เนื่องจาก $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}\tan 3\alpha &= \tan(2\alpha + \alpha) \\ &= \frac{\tan 2\alpha + \tan \alpha}{1 - \tan 2\alpha \tan \alpha} \\ &= \frac{\frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} + \tan \alpha}{1 - \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \cdot \tan \alpha} \\ &= \frac{\frac{2\tan \alpha + \tan \alpha(1 - \tan^2 \alpha)}{1 - \tan^2 \alpha}}{\frac{1 - \tan^2 \alpha - 2\tan^2 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}} \\ &= \frac{2\tan \alpha + \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3\tan^2 \alpha} \\ &= \frac{3\tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3\tan^2 \alpha} \quad \text{เมื่อ } 3\tan^2 \alpha \neq 1\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3\tan^2 \alpha} \quad \text{เมื่อ } 3\tan^2 \alpha \neq 1$$

ตัวอย่างที่ 43

กำหนด $\cos 17^\circ = 0.9563$ ให้หาค่าของ $\cos 51^\circ$

วิธีทำ จาก $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$
จะได้ว่า $\cos 51^\circ = \cos 3(17^\circ)$
$$\begin{aligned}&= 4\cos^3 17^\circ - 3\cos 17^\circ \\ &= 4(0.9563)^3 - 3(0.9563) \\ &\approx 3.4982 - 2.8689 \\ &= 0.6293\end{aligned}$$

ดังนั้น $\cos 51^\circ \approx 0.6293$

ลองทำ

กำหนด $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ให้หาค่าของ $\cos 3\theta$

ตัวอย่างที่ 44

กำหนด $\tan A = \frac{3}{4}$ เมื่อ $0 < A < \frac{\pi}{2}$ ให้หาค่าของ $\tan 3A$

วิธีทำ จาก $\tan 3\alpha = \frac{3\tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3\tan^2 \alpha}$
จะได้ว่า $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$
$$\begin{aligned}&= \frac{3\left(\frac{3}{4}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)^3}{1 - 3\left(\frac{3}{4}\right)^2} \\ &= -\frac{117}{44}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\tan 3A = -\frac{117}{44}$

ลองทำ

กำหนด $\sin A = \frac{3}{5}$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < A < \pi$ ให้หาค่าของ $\tan 3A$

ระดับท้าทาย ★★★

8. ให้หาค่าของ $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

9. กำหนด $\sin^2(\pi + \theta) - \cos^2(\pi - \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
ให้หาค่าของ $\sec 2\theta + \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

10. กำหนด $\sin(A + B) = \frac{2 - \sqrt{3}}{10}$ และ $\sin(A - B) = \frac{2 + \sqrt{3}}{10}$
ให้หาค่าของ $\sin 2A \sin 2B$

แนวแนวคิด

ข้อ 8. ให้ใช้ความสัมพันธ์
ของ $\cos 2\alpha$ มาช่วยใน
การหาคำตอบ

1.9 ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณ ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

กิจกรรม คณิตศาสตร์

1. ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในช่องว่างให้สมบูรณ์

กำหนด $\sin(\alpha + \beta) = \dots\dots\dots ①$

$\sin(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots ②$

$\dots\dots + \dots\dots$ จะได้ว่า $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots$

สรุปได้ว่า

$2 \sin \alpha \cos \beta = \dots\dots\dots$

$\dots\dots - \dots\dots$ จะได้ว่า $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots$

สรุปได้ว่า

$2 \cos \alpha \sin \beta = \dots\dots\dots$

2. นักเรียนคิดว่า การหาค่าของ $2 \cos \alpha \cos \beta$ และ $2 \sin \alpha \sin \beta$ ต้องใช้ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
ของผลบวกหรือผลต่างใดบ้าง และมีวิธีการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอย่างไร

จากกิจกรรมคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \dots\dots\dots ①$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \dots\dots\dots ②$

① + ② จะได้ว่า $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$

สรุปได้ว่า

$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$

① - ② จะได้ว่า $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$

สรุปได้ว่า

$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$

ในทำนองเดียวกัน นักเรียนสามารถหาค่าของ $2 \cos \alpha \cos \beta$ และ $2 \sin \alpha \sin \beta$ โดยใช้วิธี
เดียวกันกับการหาค่าของ $2 \sin \alpha \cos \beta$ และ $2 \cos \alpha \sin \beta$ ซึ่งมีค่า ดังนี้

$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$

$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$

นอกจากความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติดังกล่าว
ยังมีความสัมพันธ์อื่นๆ อีก ดังนี้

กำหนด $x + y = \alpha \dots\dots\dots ①$

$x - y = \beta \dots\dots\dots ②$

① + ② จะได้ว่า $2x = \alpha + \beta$

$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$

① - ② จะได้ว่า $2y = \alpha - \beta$

$y = \frac{\alpha - \beta}{2}$

เนื่องจาก $\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y$

แทนค่า $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ และ $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$ จะได้ว่า

$$\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

สรุปได้ว่า

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

ในทำนองเดียวกัน นักเรียนสามารถหาค่าของ $\sin \alpha - \sin \beta$, $\cos \alpha + \cos \beta$ และ $\cos \alpha - \cos \beta$ โดยใช้วิธีเดียวกันกับการหาค่าของ $\sin \alpha + \sin \beta$ ซึ่งมีค่า ดังนี้

$$\begin{aligned}\sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 46

ให้หาค่าของ $2 \cos 55^\circ \cos 5^\circ - \cos 50^\circ$

วิธีทำ เนื่องจาก $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$
จะได้ว่า $2 \cos 55^\circ \cos 5^\circ - \cos 50^\circ = [\cos(55^\circ + 5^\circ) + \cos(55^\circ - 5^\circ)] - \cos 50^\circ$
 $= (\cos 60^\circ + \cos 50^\circ) - \cos 50^\circ$
 $= \cos 60^\circ$
 $= \frac{1}{2}$
ดังนั้น $2 \cos 55^\circ \cos 5^\circ - \cos 50^\circ = \frac{1}{2}$

ลองทำดู

ให้หาค่าของ $2 \cos 50^\circ \cos 70^\circ - \cos 20^\circ$

ตัวอย่างที่ 47

ให้หาค่าของ $\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \theta\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \theta\right) - \cos \theta$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

จะได้ว่า $\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \theta\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \theta\right) - \cos \theta$

$$\begin{aligned}&= 2 \sin\left(\frac{\left(\frac{5\pi}{6} - \theta\right) + \left(\frac{5\pi}{6} + \theta\right)}{2}\right) \cos\left(\frac{\left(\frac{5\pi}{6} - \theta\right) - \left(\frac{5\pi}{6} + \theta\right)}{2}\right) - \cos \theta \\&= 2 \sin \frac{5\pi}{6} \cos(-\theta) - \cos \theta \\&= 2 \left(\frac{1}{2}\right) \cos \theta - \cos \theta \\&= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \theta\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \theta\right) - \cos \theta = 0$

ลองทำดู

ให้หาค่าของ $\left[\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{11\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{11\pi}{6}\right)\right] \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

ตัวอย่างที่ 48

ให้หาค่าของ $\frac{\sin 40^\circ + \cos 10^\circ}{\sin 70^\circ}$

วิธีทำ $\frac{\sin 40^\circ + \cos 10^\circ}{\sin 70^\circ} = \frac{\sin 40^\circ + \sin 80^\circ}{\cos 20^\circ}$

$$\begin{aligned}&= \frac{2 \sin\left(\frac{40^\circ + 80^\circ}{2}\right) \cos\left(\frac{40^\circ - 80^\circ}{2}\right)}{\cos 20^\circ} \\&= \frac{2 \sin 60^\circ \cos(-20^\circ)}{\cos 20^\circ} \\&= \frac{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} \\&= \sqrt{3}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{\sin 40^\circ + \cos 10^\circ}{\sin 70^\circ} = \sqrt{3}$

แนะแนวคิด

$$\begin{aligned}\cos 10^\circ &= \sin 80^\circ \\ \sin 70^\circ &= \cos 20^\circ \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta\end{aligned}$$

ลองทำดู

ให้หาค่าของ $\frac{\sin 110^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 110^\circ + \cos 20^\circ}$

แบบฝึกทักษะ 1.9

ระดับพื้นฐาน ★

1. ให้หาค่าของ

- 1) $2 \sin 35^\circ \cos 10^\circ - \sin 25^\circ$
- 2) $2 \cos 35^\circ \cos 25^\circ - \cos 10^\circ$
- 3) $2 \cos 50^\circ \sin 10^\circ + \sin 40^\circ$
- 4) $2 \sin \frac{7\pi}{15} \cos \frac{2\pi}{15} - \sin \frac{3\pi}{5}$

2. ให้หาค่าของ

- 1) $\sin 50^\circ + \sin 10^\circ - \cos 20^\circ$
- 2) $\cos 70^\circ + \cos 50^\circ + \cos 170^\circ$
- 3) $\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ + \cos 75^\circ}$
- 4) $\frac{\cos 70^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ - \sin 70^\circ}$

ระดับกลาง ★★

3. กำหนด $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ให้หาค่าของ $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$
4. กำหนด $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ให้หาค่าของ $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$
5. กำหนด $\tan \theta = \frac{1}{3}$ ให้หาค่าของ $\frac{\sin 10\theta - \sin 6\theta}{\cos 10\theta + \cos 6\theta}$
6. กำหนด $\theta = \frac{\pi}{24}$ ให้หาค่าของ $\frac{\sin 26\theta - \sin 10\theta}{\sin 4\theta + \sin 12\theta}$

ระดับท้าทาย ★★★

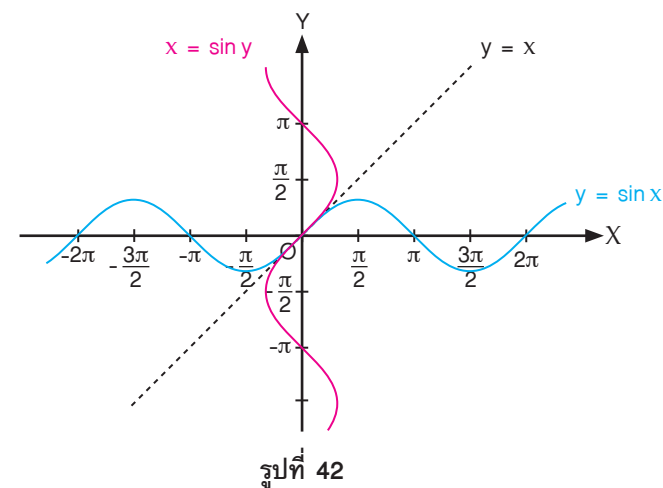
7. กำหนด $\cos 35^\circ + \cos 15^\circ = a$ และ $\sin 35^\circ + \sin 15^\circ = b$ ให้หาค่าของ $\sin 50^\circ$
8. กำหนด $\sin A = k$ ให้หาค่าของ $4 \sin A \sin (60^\circ + A) \sin (60^\circ - A)$

1.10 ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

การหาตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติทำได้โดยการสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของฟังก์ชัน เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 และตัวผกผันของฟังก์ชัน 1-1 เท่านั้นที่เป็นฟังก์ชัน ดังนั้น ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติจึงไม่เป็นฟังก์ชัน แต่ถ้ากำหนดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติให้เหมาะสม จะทำให้ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชัน

1. ตัวผกผันของฟังก์ชันไซน์

พิจารณากราฟของ $y = \sin x$ เมื่อ $-\infty < x < \infty$ และ $-1 \leq y \leq 1$ และกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid x = \sin y\}$



รูปที่ 42

จากกราฟจะเห็นว่า ความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid y = \sin x\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 แต่ถ้ากำหนดโดเมนของ $y = \sin x$ เป็น $\left\{x \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ จะได้ว่า $\{(x, y) \mid y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 ทำให้ได้ฟังก์ชันผกผัน คือ $\{(x, y) \mid x = \sin y, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$ เรียกฟังก์ชันผกผันนี้ว่า **arcsine**

บทนิยาม

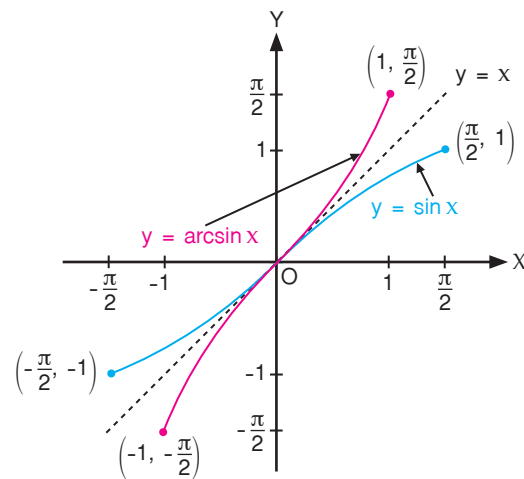
ฟังก์ชัน arcsine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \sin y$ และ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$



จดจำ

ถ้า $(x, y) \in \text{arcsine}$ จะได้ว่า $y = \arcsine x$ หรือเขียนสั้น ๆ ได้เป็น $y = \arcsin x$ โดย $y = \arcsin x$ มีความหมายเดียวกันกับ $x = \sin y$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

พิจารณารูปของฟังก์ชัน $\{(x, y) \mid y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$ และกราฟของฟังก์ชัน $\{(x, y) \mid y = \arcsin x\}$



$$y = \arcsin x, -1 \leq x \leq 1 \text{ และ } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

รูปที่ 43

จากกราฟจะเห็นว่า โดเมนของฟังก์ชัน arcsine คือ $[-1, 1]$ และเรนจ์ของฟังก์ชัน arcsine คือ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

ตัวอย่างที่ 49

ให้หาค่าของ

1) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

วิธีทำ 1) กำหนด $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = y$

โดยบทนิยาม จะได้ว่า $\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ เมื่อ $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

เนื่องจาก $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ สำหรับทุก $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

จะได้ว่า $y = \frac{\pi}{4}$

ดังนั้น $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

2) กำหนด $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y$

โดยบทนิยาม จะได้ว่า $\sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ เมื่อ $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

เนื่องจาก $\sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ สำหรับทุก $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

จะได้ว่า $y = -\frac{\pi}{3}$

ดังนั้น $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$

ลองทำ

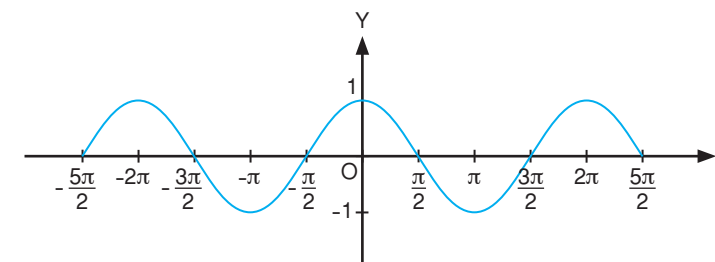
ให้หาค่าของ

1) $\arcsin \frac{1}{2}$

2) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2. ตัวผกผันของฟังก์ชันโคไซน์

พิจารณารูปของ $y = \cos x$



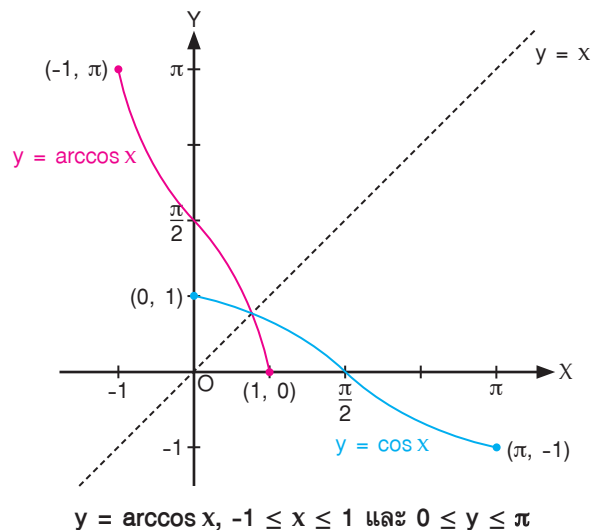
รูปที่ 44

จากกราฟจะเห็นว่า ความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid y = \cos x\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 แต่ถ้ากำหนดโดเมนของ $y = \cos x$ เป็น $\{x \mid 0 \leq x \leq \pi\}$ จะได้ว่า $\{(x, y) \mid y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi\}$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 ทำให้ได้ฟังก์ชันผกผัน คือ $\{(x, y) \mid x = \cos y, 0 \leq y \leq \pi\}$ เรียกฟังก์ชันผกผันนี้ว่า **arccosine**

บทนิยาม ฟังก์ชัน arccosine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \cos y$ และ $0 \leq y \leq \pi$

จดจำ ถ้า $(x, y) \in \text{arccosine}$ จะได้ว่า $y = \text{arccosine } x$ หรือเขียนสั้น ๆ ได้เป็น $y = \arccos x$ โดย $y = \arccos x$ มีความหมายเดียวกันกับ $x = \cos y$ เมื่อ $0 \leq y \leq \pi$

พิจารณารูปของฟังก์ชัน $\{(x, y) \mid y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi\}$ และกราฟของฟังก์ชัน $\{(x, y) \mid y = \arccos x\}$



รูปที่ 45

จากกราฟจะเห็นว่า โดเมนของฟังก์ชัน arccosine คือ $[-1, 1]$ และเรนจ์ของฟังก์ชัน arccosine คือ $[0, \pi]$

ตัวอย่างที่ 50

ให้หาค่าของ

1) $\arccos 1$

2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

วิธีทำ 1) กำหนด

$$\arccos 1 = y$$

โดยบทนิยาม จะได้ว่า $\cos y = 1$ เมื่อ $y \in [0, \pi]$

เนื่องจาก $\cos 0 = 1$ สำหรับทุก $y \in [0, \pi]$

จะได้ว่า $y = 0$

ดังนั้น $\arccos 1 = 0$

2) กำหนด $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = y$

โดยบทนิยาม จะได้ว่า $\cos y = -\frac{1}{2}$ เมื่อ $y \in [0, \pi]$

เนื่องจาก $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ สำหรับทุก $y \in [0, \pi]$

จะได้ว่า $y = \frac{2\pi}{3}$

ดังนั้น $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

ลองทำ

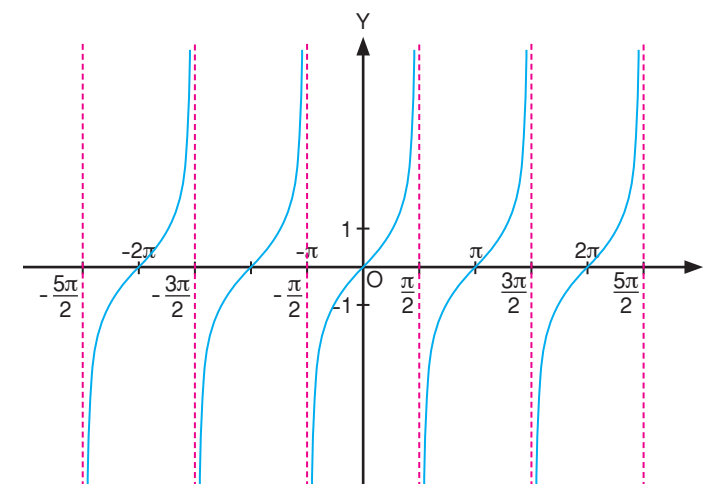
ให้หาค่าของ

1) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3. ตัวผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์

พิจารณารูปของ $y = \tan x$



รูปที่ 46

จากกราฟจะเห็นว่า ความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid y = \tan x\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 แต่ถ้ากำหนดโดเมนของ $y = \tan x$ เป็น $\left\{x \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ จะได้ว่า $\{(x, y) \mid y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 ทำให้ได้ฟังก์ชันผกผัน คือ $\{(x, y) \mid x = \tan y, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\}$ เรียกฟังก์ชันผกผันนี้ว่า **arctangent**

บทนิยาม

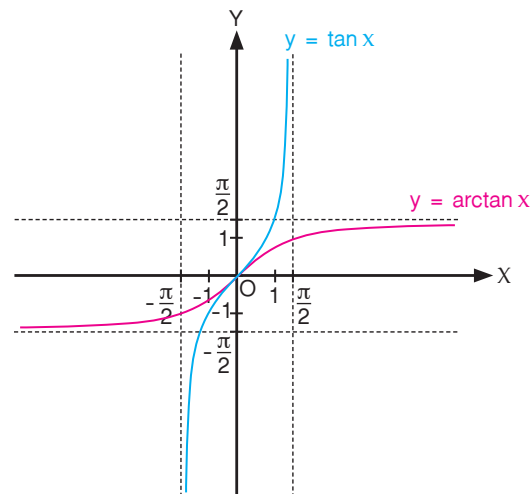
ฟังก์ชัน arctangent คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \tan y$ และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$



คุณทราบดี

ถ้า $(x, y) \in \text{arctangent}$ จะได้ว่า $y = \text{arctangent } x$ หรือเขียนสั้น ๆ ได้เป็น $y = \arctan x$ โดย $y = \arctan x$ มีความหมายเดียวกันกับ $x = \tan y$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

พิจารณารูปของฟังก์ชัน $\{(x, y) \mid y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$ และกราฟของฟังก์ชัน $\{(x, y) \mid y = \arctan x\}$



$$y = \arctan x, -\infty < x < \infty \text{ และ } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

รูปที่ 47

จากกราฟจะเห็นว่า โดเมนของฟังก์ชัน arctangent คือ $\mathbf{R}$ และเรนจ์ของฟังก์ชัน arctangent คือ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ตัวอย่างที่ 51

ให้หาค่าของ

1) $\arctan \frac{\sqrt{3}}{3}$

2) $\arctan (-1)$

วิธีทำ 1) กำหนด

$$\arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = y$$

โดยบทนิยาม จะได้ว่า

$$\tan y = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{เมื่อ } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

เนื่องจาก

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{สำหรับทุก } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

จะได้ว่า

$$y = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{ดังนั้น } \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$$

2) กำหนด

$$\arctan (-1) = y$$

โดยบทนิยาม จะได้ว่า

$$\tan y = -1 \quad \text{เมื่อ } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

เนื่องจาก

$$\tan \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \quad \text{สำหรับทุก } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

จะได้ว่า

$$y = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{ดังนั้น } \arctan (-1) = -\frac{\pi}{4}$$

ลองทำ

ให้หาค่าของ

1) $\arctan \sqrt{3}$

2) $\arctan \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

จากบทนิยามฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ และฟังก์ชันแทนเจนต์ สามารถสรุปความสัมพันธ์ระหว่างโดเมนและเรนจ์ที่ทำให้แต่ละฟังก์ชันมีฟังก์ชันผกผันได้ ดังนี้

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y = \sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1, 1]$
$y = \cos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$
$y = \tan x$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\mathbf{R}$

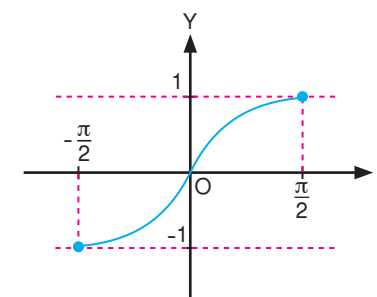
สำหรับฟังก์ชัน arcsine, arccosine และ arctangent มีโดเมนและเรนจ์ ดังนี้

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$y = \arctan x$	$\mathbf{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

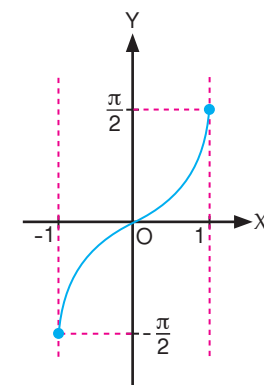
จดจำ

ในหนังสือบางเล่มจะเขียน
 $y = \sin^{-1} x$ แทนฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์
 $y = \cos^{-1} x$ แทนฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคไซน์
 $y = \tan^{-1} x$ แทนฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์

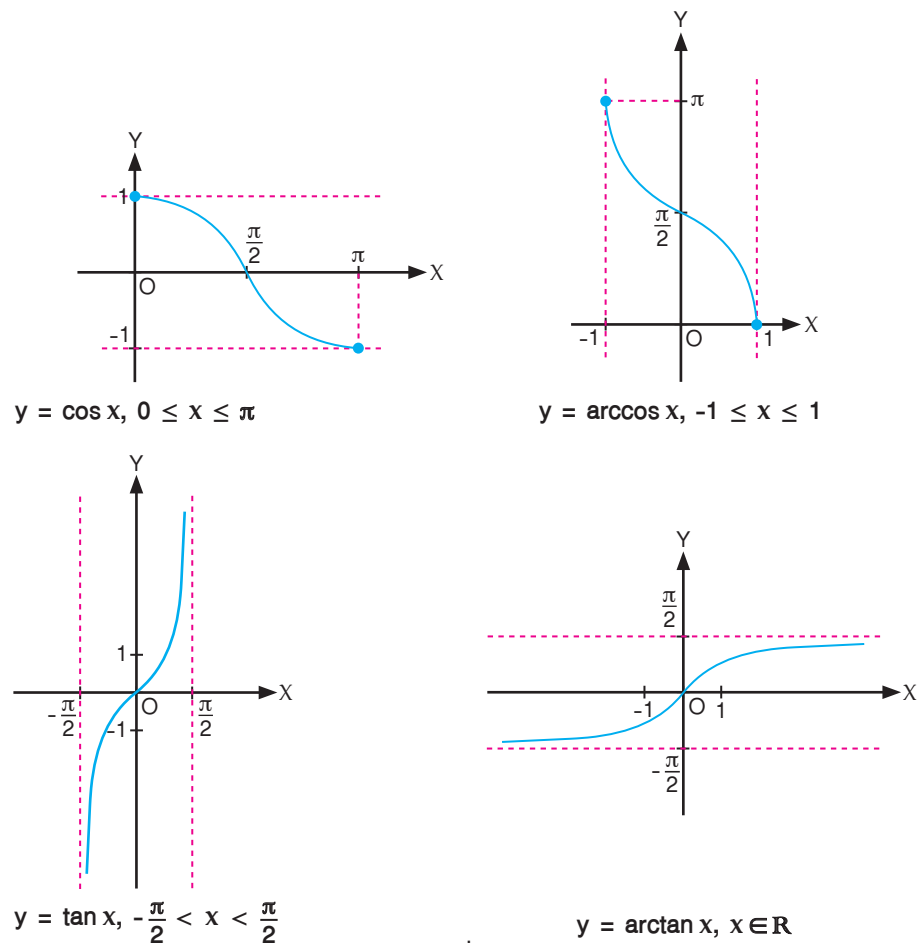
กราฟของฟังก์ชัน sine, cosine, tangent, arcsine, arccosine และ arctangent เป็นดังนี้



$$y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$



$$y = \arcsin x, -1 \leq x \leq 1$$



รูปที่ 48

ตัวอย่างที่ 52

ให้หาค่าของ $\cos(\arctan \sqrt{3})$

วิธีทำ กำหนด $\arctan \sqrt{3} = \theta$

จะได้ว่า $\tan \theta = \sqrt{3}$ เมื่อ $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

เนื่องจาก $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ สำหรับทุก $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

จะได้ว่า $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

ดังนั้น $\cos(\arctan \sqrt{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

ลองทำ

ให้หาค่าของ $\tan(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2})$

สำหรับโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติบางโจทย์ นักเรียนอาจต้องเปิดตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติหรือใช้ความรู้จากฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 53

ให้หาค่าของ $\arcsin 0.2079$

วิธีทำ กำหนด $\arcsin 0.2079 = \theta$

จะได้ว่า $\sin \theta = 0.2079$ เมื่อ $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$

จากการเปิดตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จะได้ว่า $\sin 12^\circ = 0.2079$ สำหรับทุก $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$

ดังนั้น $\theta = 12^\circ$

นั่นคือ $\arcsin 0.2079 = 12^\circ$

ลองทำ

ให้หาค่าของ $\arctan 0.7813$

ตัวอย่างที่ 54

ให้หาค่าของ $\sin(\arcsin \frac{3}{5} + \arccos \frac{4}{5})$

วิธีทำ กำหนด $\arcsin \frac{3}{5} = A$

จะได้ว่า $\sin A = \frac{3}{5}$ เมื่อ $A \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

จาก $\sin A = \frac{3}{5}$ สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ ดังนี้

จะได้ว่า $\cos A = \frac{4}{5}$

กำหนด $\arccos \frac{4}{5} = B$

จะได้ว่า $\cos B = \frac{4}{5}$ เมื่อ $B \in [0, \pi]$

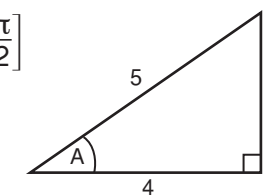
เนื่องจาก $\cos A = \cos B$ จะได้ $\sin A = \sin B = \frac{3}{5}$

นั่นคือ $\sin(\arcsin \frac{3}{5} + \arccos \frac{4}{5}) = \sin(A + B)$

$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$= \frac{3}{5}(\frac{4}{5}) + \frac{4}{5}(\frac{3}{5}) = \frac{24}{25}$

ดังนั้น $\sin(\arcsin \frac{3}{5} + \arccos \frac{4}{5}) = \frac{24}{25}$



ลองทำ

ให้หาค่าของ $\tan\left(\arccos\frac{5}{13} - \arcsin\frac{12}{13}\right)$

ตัวอย่างที่ 55

ให้หาค่าของ $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{4}\right)$

วิธีทำ กำหนด $\arcsin\frac{1}{4} = \theta$
 จะได้ว่า $\sin\theta = \frac{1}{4}$ เมื่อ $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
 นั่นคือ $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{4}\right) = \cos 2\theta$
 $= 1 - 2\sin^2\theta$
 $= 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2$
 $= \frac{7}{8}$

ดังนั้น $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{8}$

ลองทำ

ให้หาค่าของ $\tan\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$

ตัวอย่างที่ 56

ให้แสดงว่า $2\arctan\frac{1}{3} = \arctan\frac{3}{4}$

วิธีทำ กำหนด $\arctan\frac{1}{3} = \theta$
 จะได้ว่า $\tan\theta = \frac{1}{3}$ เมื่อ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
 พิจารณา $\tan\left(2\arctan\frac{1}{3}\right) = \tan 2\theta$
 $= \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$
 $= \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}$
 $= \frac{3}{4}$

ดังนั้น $2\arctan\frac{1}{3} = \arctan\frac{3}{4}$

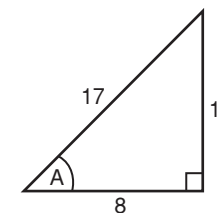
ลองทำ

ให้แสดงว่า $2\arctan\frac{3}{8} = \arctan\frac{48}{55}$

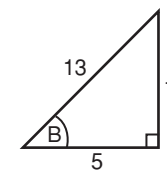
แนวข้อสอบ A-Level

$\sin\left(\arctan\left(\frac{15}{8}\right) - \arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right)$ เท่ากับเท่าใด

แนวคิด กำหนด $\arctan\left(\frac{15}{8}\right) = A$
 จะได้ว่า $\tan A = \frac{15}{8}$ เมื่อ $A \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
 จาก $\tan A = \frac{15}{8}$ สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ ดังนี้
 จะได้ว่า $\sin A = \frac{15}{17}$ และ $\cos A = \frac{8}{17}$



กำหนด $\arccos\left(\frac{5}{13}\right) = B$
 จะได้ว่า $\cos B = \frac{5}{13}$
 จาก $\cos B = \frac{5}{13}$ สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ ดังนี้
 จะได้ว่า $\sin B = \frac{12}{13}$



ดังนั้น $\sin\left(\arctan\left(\frac{15}{8}\right) - \arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right) = \sin(A - B)$
 $= \sin A \cos B - \cos A \sin B$
 $= \frac{15}{17} \left(\frac{5}{13}\right) - \frac{8}{17} \left(\frac{12}{13}\right)$
 $= \frac{75 - 96}{221}$
 $= -\frac{21}{221}$

แบบฝึกทักษะ 1.10

ระดับพื้นฐาน ★

1. ให้หาค่าของ

- | | | |
|--|---|--------------------------|
| 1) $\arcsin 1$ | 2) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 3) $\arctan 1$ |
| 4) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$ | 5) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | 6) $\arctan (-\sqrt{3})$ |

2. ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ โดยใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1) $\arcsin 0.4695$ | 2) $\arcsin 0.5688$ | 3) $\arccos 0.7451$ |
| 4) $\arccos 0.8158$ | 5) $\arctan 0.3839$ | 6) $\arctan 1.1171$ |

ระดับกลาง ★★

3. ให้หาค่าของ

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $\sin \left(\arccos \frac{1}{4}\right)$ | 2) $\cos (\arctan (-3))$ | 3) $\tan \left(\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)$ |
| 4) $\operatorname{cosec} \left(\arcsin \frac{1}{2}\right)$ | 5) $\sec \left(\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ | 6) $\cot (\arcsin 1)$ |
| 7) $\sin (\arccos 0.5640)$ | 8) $\cos (\arctan 0.4348)$ | 9) $\tan (\arccos (-0.7771))$ |

4. ให้หาค่าของ

- | | |
|--|--|
| 1) $\sin \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5}\right)$ | 2) $\cos \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5}\right)$ |
| 3) $\sin \left(2 \arccos \left(-\frac{4}{5}\right)\right)$ | 4) $\tan \left(2 \arcsin \left(-\frac{12}{13}\right)\right)$ |

5. ให้หาค่าของ

- | | |
|--|--|
| 1) $\sin \left(\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13}\right)$ | 2) $\tan \left(\arcsin \frac{1}{2} - \arccos \frac{1}{3}\right)$ |
| 3) $\cos \left(\arcsin \frac{12}{13} + \arcsin \frac{4}{5}\right)$ | 4) $\cos \left(\arctan \left(-\frac{4}{3}\right) + \arcsin \frac{12}{13}\right)$ |

ระดับท้าทาย ★★★

6. ให้แสดงว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้จริง

- $\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{2}$
- $\cos (2 \arcsin x) = 1 - 2x^2$

1.11 เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ และสมการตรีโกณมิติ (Trigonometric Identities and Trigonometric Equations)

ในหัวข้อที่ผ่านมา นักเรียนได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับหัวข้อนี้ นักเรียนจะได้ศึกษาความสัมพันธ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ มาใช้เพื่อแสดงความเท่ากันทุกประการระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ต่างกันอย่างตั้งแต่ 2 ฟังก์ชันขึ้นไป ซึ่งเรียกว่า การพิสูจน์เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

1. เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ (Trigonometric Identities)

พิจารณาสมการต่อไปนี้

$$\cos \theta + \sin \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

จะเห็นว่า สมการ $\cos \theta + \sin \theta = 1$ เป็นจริงสำหรับบาง θ แต่สมการ $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ เป็นจริงสำหรับทุก θ เรียกสมการตรีโกณมิติที่เป็นจริงสำหรับทุกค่าของ θ ว่า **เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ**

การพิสูจน์เอกลักษณ์เป็นการแสดงให้เห็นว่า ค่าทั้งสองข้างของสมการเท่ากันจริง โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งเอกลักษณ์ที่พิสูจน์แล้วสามารถนำไปอ้างอิงในการพิสูจน์เอกลักษณ์อื่น ๆ ได้

💡 ดนิตน่ารู้

สมการที่มีฟังก์ชันตรีโกณมิติปรากฏอยู่ เรียกว่า สมการตรีโกณมิติ

ตัวอย่างที่ 57

ให้พิสูจน์ว่า $\sec^4 x - \sec^2 x = \tan^2 x + \tan^4 x$

วิธีทำ $\sec^4 x - \sec^2 x = (\sec^2 x)^2 - (1 + \tan^2 x)$

$$= (1 + \tan^2 x)^2 - (1 + \tan^2 x)$$

$$= 1 + 2 \tan^2 x + \tan^4 x - 1 - \tan^2 x$$

$$= \tan^2 x + \tan^4 x$$

$$\text{ดังนั้น } \sec^4 x - \sec^2 x = \tan^2 x + \tan^4 x$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

ลองทำดู

ให้พิสูจน์ว่า $\tan^4 x + 2 \tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^4 x}$

ตัวอย่างที่ 58

ให้พิสูจน์ว่า $\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} &= \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \times \frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta(1 - \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\sin \theta(1 - \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$

แบบแนวคิด

คูณทั้งตัวเศษและตัวส่วน
ด้วย $1 - \cos \theta$

ลองทำ

ให้พิสูจน์ว่า $\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$

ตัวอย่างที่ 59

ให้พิสูจน์ว่า $\frac{\sin 7x - \sin 3x - \sin 5x + \sin x}{\cos 7x + \cos 3x - \cos 5x - \cos x} = \tan 2x$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \frac{\sin 7x - \sin 3x - \sin 5x + \sin x}{\cos 7x + \cos 3x - \cos 5x - \cos x} &= \frac{(\sin 7x - \sin 3x) - (\sin 5x - \sin x)}{(\cos 7x + \cos 3x) - (\cos 5x + \cos x)} \\ &= \frac{2 \cos 5x \sin 2x - 2 \cos 3x \sin 2x}{2 \cos 5x \cos 2x - 2 \cos 3x \cos 2x} \\ &= \frac{2 \sin 2x (\cos 5x - \cos 3x)}{2 \cos 2x (\cos 5x - \cos 3x)} \\ &= \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \\ &= \tan 2x \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{\sin 7x - \sin 3x - \sin 5x + \sin x}{\cos 7x + \cos 3x - \cos 5x - \cos x} = \tan 2x$

ลองทำ

ให้พิสูจน์ว่า $\frac{\sin 4x - \sin (-2x) - \sin 6x + \sin (-4x)}{\cos (-2x) - \cos 4x - \cos (-4x) + \cos 6x} = \cot x$

ในการพิสูจน์เอกลักษณ์ที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยม จะเห็นว่าโจทย์กำหนดเงื่อนไข เช่น “ในรูปสามเหลี่ยม ABC หรือ $A + B + C = 180^\circ$ ” หลักการพิสูจน์จะใช้ความสัมพันธ์ของมุมประกอบหนึ่งมุมฉากหรือมุมประกอบสองมุมฉาก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 60

กำหนด $A + B + C = 180^\circ$

ให้พิสูจน์ว่า $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) + \cos C \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \\ &= \left[2 \sin \frac{C}{2} \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \right] + 1 \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} \left[\cos \left(\frac{A-B}{2} \right) - \sin \frac{C}{2} \right] + 1 \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} \left[\cos \left(\frac{A-B}{2} \right) - \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \right] + 1 \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} \left(2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \right) + 1 \\ &= 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

ลองทำ

กำหนด $A + B + C = 180^\circ$

ให้พิสูจน์ว่า $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

2. สมการตรีโกณมิติ (Trigonometric Equations)

นักเรียนทราบมาแล้วว่า ฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยทั่วไปไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 ทำให้ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมอาจมีค่าซ้ำกันได้ เช่น $\sin \frac{\pi}{6}$ และ $\sin \frac{5\pi}{6}$ มีค่าซ้ำกัน คือ $\frac{1}{2}$

ดังนั้น ในการหาคำตอบของสมการตรีโกณมิติ ถ้าโจทย์ไม่ได้กำหนดให้คำตอบอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่ง คำตอบจะอยู่ในรูปของค่าทั่วไป

ตัวอย่างที่ 61

แก้สมการ $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ เมื่อ $0 < x < \frac{\pi}{2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $0 < x < \frac{\pi}{2}$ จะได้ว่า ค่าของ x ในช่วงนี้ที่ทำให้ $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ คือ $\frac{\pi}{6}$

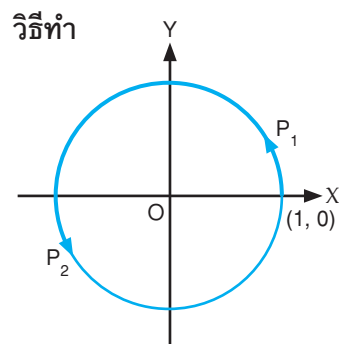
ดังนั้น เซตคำตอบ คือ $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$

ลองทำ

แก้สมการ $\tan x = -\sqrt{3}$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

ตัวอย่างที่ 62

แก้สมการ $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$



จากวงกลมหนึ่งหน่วย จะเห็นว่าค่า θ เมื่อ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

ที่ทำให้ $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ คือ $\frac{\pi}{6}$ และ $\frac{7\pi}{6}$

และ $\tan\left(2n\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$

$\tan\left(2n\pi + \frac{7\pi}{6}\right) = \tan \frac{7\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$

เนื่องจากโจทย์ไม่ได้กำหนดให้คำตอบอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่ง

ดังนั้น ค่าทั่วไปของ θ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $2n\pi + \frac{\pi}{6}$

และ $2n\pi + \frac{7\pi}{6}$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$

ลองทำ

แก้สมการ $\cos \theta = \frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 63

แก้สมการ $\cos 2\theta + 3 \sin \theta = 2$

วิธีทำ $\cos 2\theta + 3 \sin \theta = 2$

$$(1 - 2 \sin^2 \theta) + 3 \sin \theta = 2$$

$$2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta + 1 = 0$$

$$(2 \sin \theta - 1)(\sin \theta - 1) = 0$$

จะได้ว่า $\sin \theta = \frac{1}{2}$ หรือ $\sin \theta = 1$

เนื่องจาก ค่า θ เมื่อ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ที่ทำให้ $\sin \theta = \frac{1}{2}$ คือ $\frac{\pi}{6}$ และ $\frac{5\pi}{6}$

ค่า θ เมื่อ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ที่ทำให้ $\sin \theta = 1$ คือ $\frac{\pi}{2}$

นั่นคือ คำตอบของสมการในช่วง $[0, 2\pi]$ คือ $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ และ $\frac{\pi}{2}$

ดังนั้น ค่าทั่วไปของ θ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $2n\pi + \frac{\pi}{6}, 2n\pi + \frac{5\pi}{6}$

และ $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$

ลองทำ

แก้สมการ $\cos 2\theta - 1 = 0$

ตัวอย่างที่ 64

แก้สมการ $2 \cos^2 x + 2 \cos 2x = 1$

วิธีทำ

$$2 \cos^2 x + 2 \cos 2x = 1$$

$$2 \cos^2 x + 2(2 \cos^2 x - 1) = 1$$

$$2 \cos^2 x + 4 \cos^2 x - 2 = 1$$

$$6 \cos^2 x = 3$$

$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

จะได้ว่า $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ หรือ $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

เนื่องจาก ค่า x เมื่อ $0 \leq x \leq 2\pi$ ที่ทำให้ $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ คือ $\frac{\pi}{4}$ และ $\frac{7\pi}{4}$

ค่า x เมื่อ $0 \leq x \leq 2\pi$ ที่ทำให้ $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ คือ $\frac{3\pi}{4}$ และ $\frac{5\pi}{4}$

นั่นคือ คำตอบของสมการในช่วง $[0, 2\pi]$ คือ $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ และ $\frac{7\pi}{4}$

ดังนั้น ค่าทั่วไปของ x ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{3\pi}{4},$

$2n\pi + \frac{5\pi}{4}$ และ $2n\pi + \frac{7\pi}{4}$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$

ลองทำ

แก้สมการ $4 \cos^2 x - 4 \cos 2x + 2 = 5$

แบบฝึกทักษะ 1.11

ระดับพื้นฐาน ★

1. ให้พิสูจน์เอกลักษณ์ตรีโกณมิติต่อไปนี้

- 1) $\cos \theta (\tan \theta + \cot \theta) = \operatorname{cosec} \theta$
- 2) $\sin 2\theta \cot \theta - 1 = \cos 2\theta$
- 3) $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta$
- 4) $\sec^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta = \sec^2 \theta \operatorname{cosec}^2 \theta$
- 5) $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \sin^2 \theta$
- 6) $\frac{\sin 2\theta + \sin \theta}{\cos 2\theta + \cos \theta + 1} = \tan \theta$

ระดับกลาง ★★

2. ให้พิสูจน์เอกลักษณ์ตรีโกณมิติต่อไปนี้

- 1) $\cos 4x = 4 \cos 2x + 8 \sin^4 x - 3$
- 2) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}$
- 3) $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 4 \cos x \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}$

3. กำหนด $A + B + C = 180^\circ$ ให้พิสูจน์ว่า $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

4. แก้สมการต่อไปนี้ เมื่อ $0 \leq x \leq 2\pi$

- 1) $\cot x + 2 \sin x = \operatorname{cosec} x$
- 2) $4 \tan x \sin^2 x + 3 = 4 \sin^2 x + 3 \tan x$
- 3) $\cot x \cos 2x + \tan x \sin 2x = \cot x$
- 4) $\cot x - 2 \cos x = 2 \operatorname{cosec} x - 4$

5. แก้สมการต่อไปนี้

- 1) $2 \cos^2 \theta + 2 \cos 2\theta = 1$
- 2) $2 \sin \theta (\cos \theta + \sin \theta) = 2 \sin \theta$
- 3) $2 \sec \theta = \tan \theta + \cot \theta$
- 4) $\sin \theta + 8 \cos \theta = 2 \cos^3 \theta + 6 \cos \theta$

ระดับท้าทาย ★★★

6. กำหนด $a = \sin 3x \cos 2x - 2 \sin x \cos x \cos 3x$ เมื่อ $0 \leq x \leq 2\pi$
ให้หาค่าของ x ที่ทำให้ $2a^2 - 3\sqrt{3}a - 6 = 0$

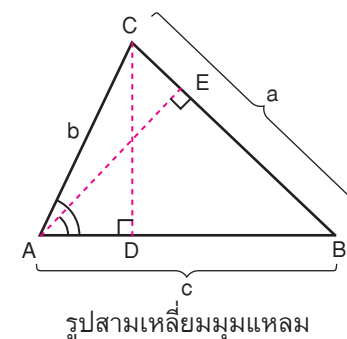
1.12 กฎของไซน์และโคไซน์

(The Laws of Sines and Cosines)

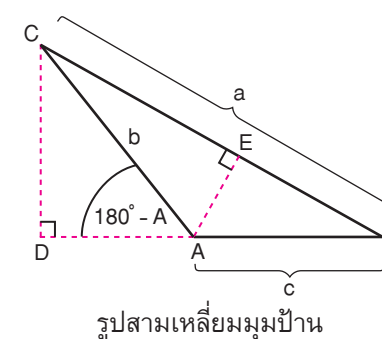
ในหัวข้อนี้ จะเป็นการศึกษากฎของไซน์และโคไซน์ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่างความยาวด้านกับขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมที่ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

1. กฎของไซน์ (The Laws of Sines)

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ที่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมและมุมป้าน จากนั้นลาก $\overline{CD}$ ตั้งฉากกับด้าน AB ที่จุด D และลาก $\overline{AE}$ ตั้งฉากกับด้าน BC ที่จุด E ดังรูป



รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม



รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน

รูปที่ 49

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมแหลม ABC

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ADC จะได้ว่า $\sin A = \frac{CD}{b}$

$$CD = b \sin A$$

จากพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ $\frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$

จะได้ว่า พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ $\frac{1}{2} (AB)(CD)$

$$= \frac{1}{2} (c)(b \sin A)$$

$$= \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$\text{ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A \quad \dots\dots ①$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้ากำหนด BC และ CA เป็นฐาน จะได้ว่า

$$\text{พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC} = \frac{1}{2} ca \sin B \quad \dots\dots ②$$

$$\text{พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C \quad \dots\dots ③$$



Thinking Time

ให้นักเรียนพิสูจน์
กฎของไซน์ โดยใช้
รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน

จาก ①, ② และ ③ จะได้ว่า

$$\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

คูณด้วย $\frac{2}{abc}$ โดยตลอด จะได้ว่า

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

เรียกความสัมพันธ์ดังกล่าวว่า กฎของไซน์

กฎของไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC

ถ้า a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ จะได้ว่า

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ตัวอย่างที่ 65

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B และ C เป็น a, b และ c ตามลำดับ โดย $\hat{B} = 75^\circ$, $\hat{C} = 60^\circ$ และ b = 4 หน่วย ให้หาความยาวของ c

วิธีทำ จากกฎของไซน์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\sin B}{b} &= \frac{\sin C}{c} \\ \frac{\sin 75^\circ}{4} &= \frac{\sin 60^\circ}{c} \\ c &= 4 \left(\frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} \right) \\ &= 4 \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} \right) \\ &= 4 \left[\frac{\sqrt{3}(2\sqrt{2})}{2(\sqrt{3}+1)} \right] \\ &\approx 4 \left(\frac{2\sqrt{6}}{5.46} \right) \\ &\approx 3.59 \end{aligned}$$

ดังนั้น c มีความยาวประมาณ 3.59 หน่วย

ลองทำ

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B และ C เป็น a, b และ c ตามลำดับ โดย $\hat{B} = 45^\circ$, $\hat{C} = 60^\circ$ และ b = $2\sqrt{3}$ หน่วย ให้หาความยาวของ c

ตัวอย่างที่ 66

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B และ C เป็น a, b และ c ตามลำดับ โดย $\hat{C} = 60^\circ$, b = 6 หน่วย และ c = 10 หน่วย ให้หาขนาดของมุม B

วิธีทำ จากกฎของไซน์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\sin B}{b} &= \frac{\sin C}{c} \\ \frac{\sin B}{6} &= \frac{\sin 60^\circ}{10} \\ \sin B &= 6 \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{10} \right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{10} \\ &\approx 0.5196 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\sin B \approx 0.5196$ มีค่าอยู่ระหว่าง $\sin 31^\circ 10'$ กับ $\sin 31^\circ 20'$

จากตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะได้ว่า $\sin 31^\circ 10' = 0.5175$

$$\sin 31^\circ 20' = 0.5200$$

เนื่องจาก ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น 0.0025 ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $10'$

$$\begin{aligned} \text{ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น } 0.0021 \text{ ค่าของมุมเพิ่มขึ้น } &\frac{0.0021 \times 10'}{0.0025} \\ &\approx 8' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } \sin(31^\circ 10' + 8') &= \sin 31^\circ 18' \\ &\approx 0.5196 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } B \approx 31^\circ 18'$$

แต่เนื่องจาก $\sin B > 0$ จะได้ว่า $0 < B < 180^\circ$

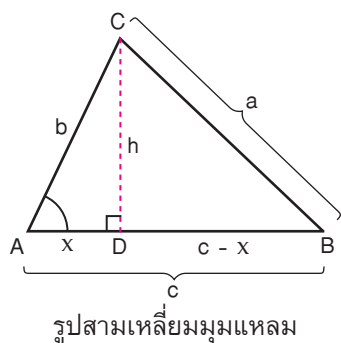
$$\text{ดังนั้น } B \approx 31^\circ 18' \text{ หรือ } B \approx 180^\circ - 31^\circ 18' = 148^\circ 42'$$

ลองทำ

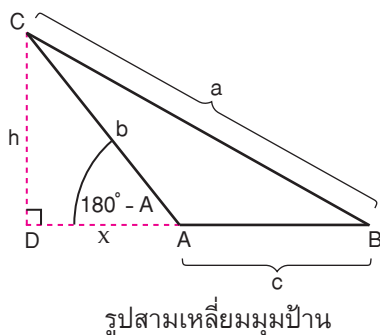
กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B และ C เป็น a, b และ c ตามลำดับ โดย $\hat{A} = 30^\circ$, $a = 11$ หน่วย และ $c = 17$ หน่วย ให้หาขนาดของมุม C

2. กฎของโคไซน์ (The Laws of Cosines)

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ที่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมและมุมป้าน จากนั้นลาก $\overline{CD}$ ตั้งฉากกับด้าน AB ที่จุด D ดังนี้



รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม



รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน

รูปที่ 50

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมแหลม ABC

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ADC จะได้ว่า $\cos A = \frac{x}{b}$
 $x = b \cos A$

และโดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า $b^2 = h^2 + x^2$

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก BDC โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a^2 &= (c - x)^2 + h^2 \\ &= c^2 - 2cx + x^2 + h^2 \\ &= c^2 - 2cx + (x^2 + h^2) \\ &= c^2 - 2cx + b^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

ดังนั้น $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

ในทำนองเดียวกัน นักเรียนสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

เรียกความสัมพันธ์ดังกล่าวว่า กฎของโคไซน์



Thinking Time

ให้นักเรียนพิสูจน์กฎของโคไซน์ โดยใช้รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน

กฎของโคไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC

ถ้า a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ จะได้ว่า

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

ตัวอย่างที่ 67

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B และ C เป็น a, b และ c ตามลำดับ โดย $\hat{A} = 30^\circ$, $b = 6$ หน่วย และ $c = 10$ หน่วย ให้หาความยาวของ a

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= 6^2 + 10^2 - 2(6)(10) \cos 30^\circ \\ &= 36 + 100 - 120 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &\approx 32.08 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$a \approx 5.66$$

ดังนั้น a มีความยาวประมาณ 5.66 หน่วย

ลองทำ

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B และ C เป็น a, b และ c ตามลำดับ โดย $\hat{B} = 45^\circ$, $a = 4$ หน่วย และ $c = 9$ หน่วย ให้หาความยาวของ b

ตัวอย่างที่ 68

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B และ C เป็น a, b และ c ตามลำดับ โดย $a = \sqrt{10}$ หน่วย, $b = 2$ หน่วย และ $c = \sqrt{2}$ หน่วย ให้หาขนาดของมุม A

วิธีทำ จากกฎของโคไซน์

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (\sqrt{10})^2 &= 2^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(2)(\sqrt{2}) \cos A \\ 10 &= 4 + 2 - 4\sqrt{2} \cos A \end{aligned}$$

$$4\sqrt{2} \cos A = 6 - 10$$

$$\cos A = \frac{-4}{4\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$A = 135^\circ$$

ดังนั้น

ลองทำดู

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B และ C เป็น a, b และ c ตามลำดับ โดย a = 6 หน่วย, b = 13 หน่วย และ c = 14 หน่วย ให้หาขนาดของมุม B

แบบฝึกทักษะ 1.12

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B และ C เป็น a, b และ c ตามลำดับ

ระดับพื้นฐาน ★

1. ให้หาค่าต่อไปนี้ โดยใช้กฎของไซน์

- 1) ให้หาความยาวของ a เมื่อ $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$ และ c = 8 หน่วย
- 2) ให้หาความยาวของ b เมื่อ $\hat{A} = 45^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ และ a = 7 หน่วย
- 3) ให้หาขนาดของมุม B เมื่อ $\hat{A} = 60^\circ$, a = $3\sqrt{2}$ หน่วย และ b = $2\sqrt{3}$ หน่วย
- 4) ให้หาขนาดของมุม C เมื่อ $\hat{B} = 45^\circ$, b = $2\sqrt{2}$ หน่วย และ c = $2\sqrt{3}$ หน่วย

2. ให้หาค่าต่อไปนี้ โดยใช้กฎของโคไซน์

- 1) ให้หาความยาวของ b เมื่อ $\hat{B} = 60^\circ$, a = 3 หน่วย และ c = $3\sqrt{3}$ หน่วย
- 2) ให้หาความยาวของ a เมื่อ $\hat{A} = 60^\circ$, b = 20 หน่วย และ c = 30 หน่วย
- 3) ให้หาขนาดของมุม A เมื่อ a = 25 หน่วย, b = 31 หน่วย และ c = $7\sqrt{2}$ หน่วย
- 4) ให้หาขนาดของมุม C เมื่อ a = 15 หน่วย, b = 7 หน่วย และ c = 13 หน่วย

ระดับกลาง ★★

3. ให้หาความยาวด้านหรือมุมภายในที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม ABC จากสิ่งที่กำหนดต่อไปนี้

- 1) a = 2, b = $2\sqrt{3}$, c = 2
- 2) $\hat{A} = 75^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$, b = $\sqrt{8}$
- 3) a = 4, $\hat{B} = 135^\circ$, b = 4
- 4) $\hat{A} = 45^\circ$, $\hat{B} = 105^\circ$, c = $5\sqrt{2}$

4. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มี a = 4 หน่วย, b = $4\sqrt{3}$ หน่วย และ c = 4 หน่วย ให้หาขนาดของมุมที่ใหญ่ที่สุด

5. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีมุม A และ B เป็นมุมแหลม โดย $\cos A = \frac{4}{5}$, $\sin B = \frac{12}{13}$ และ b = 30 หน่วย ให้หาความยาวของ c

6. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มี $\hat{B} = 45^\circ$, $\hat{C} = 120^\circ$ และ a = 20 หน่วย ให้หาความสูงของรูปสามเหลี่ยม ABC ที่วัดจากจุด A

7. กำหนดรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ABCDEF โดยแต่ละด้านยาว 6 นิ้ว ให้หาความยาวของเส้นทแยงมุม AD และ AC

ระดับท้าทาย ★★★

8. กำหนดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีมุมมุมหนึ่งมีขนาด 120 องศา และความยาวของด้านประกอบมุมนี้ยาว 4 และ 8 เซนติเมตร ให้หาความยาวของเส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นของรูปนี้

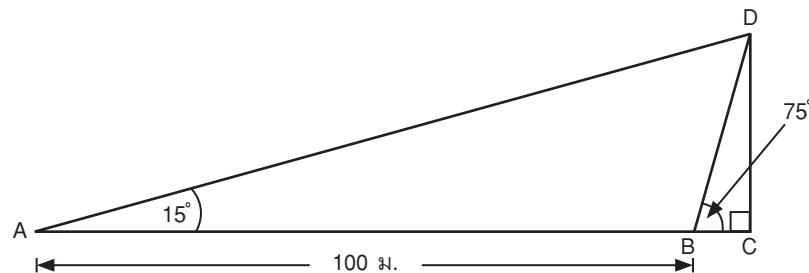
1.13 การหาระยะทางและความสูง

ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 นักเรียนได้ศึกษาการใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30 องศา 45 องศา และ 60 องศา ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับระยะทางและความสูง ซึ่งในหัวข้อนี้ นักเรียนจะได้นำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ มุมก้ม และมุมเงยมาช่วยในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับระยะทางและความสูง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 69

เก่งยืนอยู่บนพื้นราบมองเห็นยอดตึกแห่งหนึ่งเป็นมุมเงย 15 องศา และเมื่อเดินเข้าไปหาตึกอีก 100 เมตร เขามองเห็นยอดตึกเป็นมุมเงย 75 องศา ถ้าเก่งสูง 185 เซนติเมตร แล้วตึกมีความสูงเท่าใด

วิธีทำ



กำหนด CD เป็นความสูงจากระดับสายตาถึงยอดตึก

จุด A เป็นจุดที่เก่งยืนมองยอดตึกในครั้งแรก

จุด B เป็นจุดที่เก่งยืนมองยอดตึกในครั้งหลัง

จาก $\hat{CBD} = 75^\circ$ จะได้ว่า $\hat{ABD} = 105^\circ$

นั่นคือ $\hat{ADB} = 180^\circ - (15^\circ + 105^\circ) = 60^\circ$

พิจารณา $\triangle ABD$ โดยกฎของไซน์

$$\text{จะได้ว่า } \frac{\sin 15^\circ}{BD} = \frac{\sin 60^\circ}{AB}$$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } BD &= \frac{AB \sin 15^\circ}{\sin 60^\circ} \\ &= \frac{100 \sin 15^\circ}{\sin 60^\circ} \end{aligned}$$

พิจารณา $\triangle BCD$

$$\text{จะได้ว่า } \sin 75^\circ = \frac{CD}{BD}$$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } CD &= BD \sin 75^\circ \\ &= \left(\frac{100 \sin 15^\circ}{\sin 60^\circ} \right) \cos 15^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 100 \left(\frac{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) \\ &= \frac{100}{\sqrt{3}} (2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ) \\ &= \frac{100}{\sqrt{3}} (\sin 2(15^\circ)) \\ &= \frac{100}{\sqrt{3}} (\sin 30^\circ) \\ &= \frac{100}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} \right) \\ &\approx 29 \end{aligned}$$

เนื่องจากเก่งสูง 185 เซนติเมตร เท่ากับ 1.85 เมตร

ดังนั้น ยอดตึกสูงประมาณ $29 + 1.85 = 30.85$ เมตร

ลองทำ

วิทยายืนอยู่บนพื้นราบมองเห็นระเบียงของอาคารแห่งหนึ่งเป็นมุมเงย 15 องศา และเมื่อเดินเข้าไปหาอาคารแห่งนั้น 80 เมตร เขามองเห็นระเบียงเป็นมุมเงย 60 องศา ถ้าวิทยาสสูง 170 เซนติเมตร แล้วระเบียงของอาคารสูงเท่าใด

ตัวอย่างที่ 70

เจ้าหน้าที่บนหอคอยแห่งหนึ่งมองเห็นเรือสองลำลอยอยู่กลางทะเลเป็นมุมก้ม 45 องศา และ 75 องศา ตามลำดับ ถ้าหอคอยสูง 15 เมตร แล้วเรือทั้งสองลำอยู่ห่างกันเท่าใด

วิธีทำ กำหนด BC เป็นความสูงของหอคอย

CE เป็นเส้นระดับสายตา

จุด A เป็นตำแหน่งของเรือลำแรก

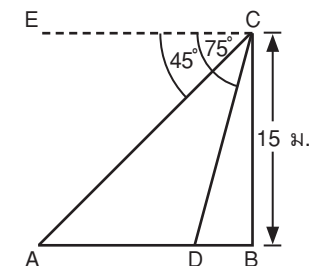
จุด D เป็นตำแหน่งของเรือลำที่สอง

จาก $\hat{ACE} = 45^\circ$ และ $\hat{DCE} = 75^\circ$ จะได้ว่า $\hat{DCA} = 30^\circ$

และจาก $\overline{AB} \parallel \overline{CE}$ จะได้ว่า $\hat{BAC} = 45^\circ$ และ $\hat{BDC} = 75^\circ$

พิจารณา $\triangle DBC$ จะได้ว่า $\sin 75^\circ = \frac{BC}{CD}$

$$\text{นั่นคือ } CD = \frac{15}{\sin 75^\circ}$$



$$= \frac{15}{\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$$

$$\approx 15.53$$

พิจารณา $\triangle ADC$ โดยกฎของไซน์

จะได้ว่า
$$\frac{\sin \hat{DCA}}{AD} = \frac{\sin \hat{DAC}}{CD}$$

นั่นคือ
$$AD \approx \frac{(15.53) \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$\approx \frac{(15.53) \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\approx 10.98$$

ดังนั้น เรือทั้งสองลำอยู่ห่างกันประมาณ 10.98 เมตร

ลองทำ

เจ้าหน้าที่บนหอบังคับการบินมองเห็นเครื่องบินสองลำจอดอยู่บนรันเวย์เป็นมุมก้ม 30° องศา และ 70° องศา ตามลำดับ ถ้าหอบังคับการบินสูง 130 เมตร แล้วเครื่องบินทั้งสองลำอยู่ห่างกันเท่าใด

ตัวอย่างที่ 71

สุชาติขับรถจากจุด A ไปในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันออก โดยทำมุม 30° องศา กับทิศเหนือเป็นระยะทาง 20 กิโลเมตร ไปยังจุด B จากนั้น เขาขับรถต่อไปในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันออก โดยทำมุม 30° องศา กับทิศใต้เป็นระยะทาง 10 กิโลเมตร ไปยังจุด C ให้หาว่าสุชาติอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเป็นระยะทางเท่าใด และอยู่ในทิศใดของจุดเริ่มต้น

วิธีทำ จากรูป $\overline{AN_1}$ ขนานกับ $\overline{BS_2}$ จะได้ว่า $\hat{ABS_2} = \hat{N_1AB} = 30^\circ$ นั่นคือ $\hat{ABC} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$

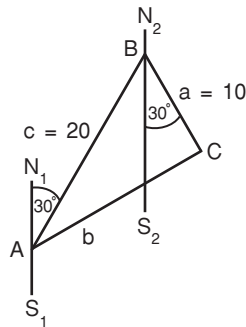
จากกฎของโคไซน์
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$= 10^2 + 20^2 - 2(10)(20) \cos 60^\circ$$

$$= 100 + 400 - 200$$

$$= 300$$

จะได้ว่า
$$b = 10\sqrt{3}$$



จากกฎของไซน์
$$\frac{\sin \hat{BAC}}{a} = \frac{\sin \hat{ABC}}{b}$$

$$\frac{\sin \hat{BAC}}{10} = \frac{\sin 60^\circ}{10\sqrt{3}}$$

$$\sin \hat{BAC} = \frac{10}{10\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

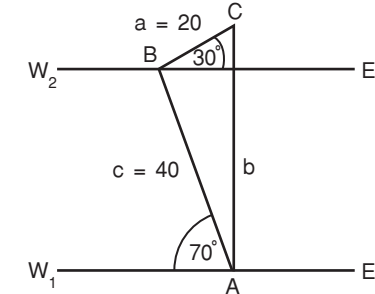
$$= \frac{1}{2}$$

จะได้ว่า $\hat{BAC} = 30^\circ$ และ $\hat{N_1AC} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$

ดังนั้น สุชาติอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเป็นระยะทาง $10\sqrt{3}$ กิโลเมตร ไปในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันออก โดยทำมุม 60° องศา กับทิศเหนือ

ลองทำ

เอกขับรถจากจุด A ไปในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันตก โดยทำมุม 70° องศา กับทิศตะวันตกเป็นระยะทาง 40 กิโลเมตร ไปยังจุด B จากนั้นเขาขับรถต่อไปในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันออก โดยทำมุม 30° องศา กับทิศตะวันออกเป็นระยะทาง 20 กิโลเมตร ไปยังจุด C ให้หาว่าเอกอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเป็นระยะทางเท่าใด และอยู่ในทิศใดของจุดเริ่มต้น



แบบฝึกทักษะ 1.13

ระดับพื้นฐาน

1. ลูกเสือสองคนยืนอยู่ในแนวทิศใต้ของเสาอากาศซึ่งสูง 95 เมตร ลูกเสือทั้งสองคนวัดมุมเงยของยอดเสาได้ 30° และ 45° องศา ตามลำดับ ลูกเสือทั้งสองคนนี้ยืนห่างกันประมาณกี่เมตร
2. นักเรียนคนหนึ่งยืนอยู่บนสนามแห่งหนึ่ง มองเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย 15° องศา แต่เมื่อเดินเข้าไปหาเสาธงอีก 60 เมตร เขามองเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย 60° องศา ถ้าเขาสูง 160 เซนติเมตร เสาธงมีความสูงเท่าใด

ระดับกลาง ★★

3. นักสำรวจคนหนึ่งยืนอยู่ที่ทิศตะวันตกเฉียงใต้ของภูเขาสูงหนึ่ง มองเห็นยอดเขาเป็นมุมเงย 60 องศา เมื่อเขาเดินตรงไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้เป็นระยะทาง 400 เมตร จะมองเห็นยอดเขาเป็นมุมเงย 45 องศา ภูเขาสูงนี้สูงเท่าใด
4. รถยนต์ 3 คัน จอดที่จุด A, B และ C บนพื้นระดับ และอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันกับอนุสาวรีย์แห่งหนึ่ง มุมยกขึ้นของยอดอนุสาวรีย์ เมื่อสังเกตจากจุด A, B และ C เป็น 30, 45 และ 60 องศา ตามลำดับ ถ้า $BC = 20$ เมตร ให้หาความสูงของอนุสาวรีย์และระยะทางระหว่างจุด A กับอนุสาวรีย์
5. จากจุด A ที่อยู่ทางทิศใต้ของเสาไฟฟ้าและทำมุมเงย 60 องศา กับยอดเสา จุด B อยู่ทางทิศตะวันออกของจุด A มองยอดเสาไฟฟ้าเป็นมุมเงย 30 องศา ถ้าระยะห่างจากจุด A และ B เท่ากับ 60 เมตร เสาไฟฟ้าสูงกี่เมตร

ระดับท้าทาย ★★★

6. วีระชัยอยู่บนดาดฟ้าของตึกสูง 30 เมตร มองเห็นบุตรชายของเขาอยู่บนพื้นดินทางทิศใต้ของตึกเป็นมุมก้ม 30 องศา และเห็นบุตรสาวของเขาอยู่บนพื้นดินทางทิศตะวันออกของตึกเป็นมุมก้ม 60 องศา บุตรชายและบุตรสาวอยู่ห่างกันกี่เมตร

ตรวจสอบตนเอง



หลังจากเรียนจบหน่วยแล้ว ให้นักเรียนบอกสัญลักษณ์ที่ตรงกับระดับความสามารถของตนเอง

	ดี 😊	พอใช้ 😊	ควรปรับปรุง 😊
1. สามารถหาจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) เป็นระยะ $ t $ หน่วยได้	😊	😊	😊
2. สามารถหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมได้	😊	😊	😊
3. สามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้	😊	😊	😊
4. เข้าใจและเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้	😊	😊	😊
5. แก่สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้	😊	😊	😊
6. ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหาได้	😊	😊	😊

คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง

พระปรางค์วัดอรุณราชวรารามราชวรมหาวิหาร

พระปรางค์วัดอรุณราชวรารามราชวรมหาวิหาร หรือเรียกสั้น ๆ ว่า พระปรางค์วัดอรุณฯ เป็นหนึ่งในสถาปัตยกรรมที่สวยงามที่สุดแห่งหนึ่งของกรุงรัตนโกสินทร์ และมีความสูง 81.85 เมตร ซึ่งเป็นพระปรางค์ที่มีความสูงที่สุดในโลก



สถานการณ์

สุธีเดินทางไปชมพระปรางค์วัดอรุณฯ เมื่อไปถึงเขาขึ้นอยู่ริมฝั่งแม่น้ำเจ้าพระยาซึ่งอยู่ตรงข้ามกับพระปรางค์วัดอรุณฯ ซึ่งมีความสูง 81.85 เมตร อยากทราบว่า

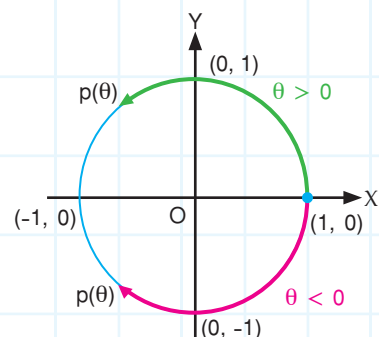
1. สุธีอยู่ห่างจากพระปรางค์เป็นระยะทางเท่าใด เมื่อเขามองไปยังยอดพระปรางค์เป็นมุมเงยเท่ากับ 75°
2. ถ้าสุธีเดินเข้าใกล้พระปรางค์ไปอีก 5 เมตร แล้วมองไปยังยอดพระปรางค์อีกครั้ง นักเรียนคิดว่าเขาจะมองเห็นยอดพระปรางค์ด้วยมุมเงยมากกว่าหรือน้อยกว่าเดิม ให้อธิบายโดยใช้หลักการของตรีโกณมิติ

สรุป แนวคิดหลัก

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

การวัดความยาวส่วนโค้งและพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง

- วงกลมที่เป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ เรียกว่า วงกลมหนึ่งหน่วย (unit circle)
- การวัดความยาวส่วนโค้งและพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วย เป็นดังนี้



$\theta > 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด (1, 0) ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเป็นระยะ θ หน่วย
 $\theta = 0$ จุดปลายส่วนโค้ง คือ จุด (1, 0)
 $\theta < 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด (1, 0) ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาเป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย

ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์

- ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์
 - ฟังก์ชันโคไซน์ คือ $f = \{(\theta, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x = \cos \theta\}$
 - ฟังก์ชันไซน์ คือ $g = \{(\theta, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = \sin \theta\}$

- ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริง

กำหนด θ เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

- $\cos(-\theta) = \cos \theta$
- $\sin(-\theta) = -\sin \theta$

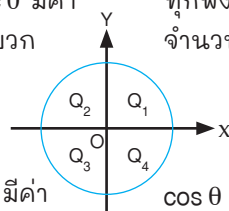
$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin(2n\pi + \alpha) = \sin \alpha$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(2n\pi + \alpha) = \cos \alpha$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ

- กำหนด θ เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

- $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ เมื่อ $\cos \theta \neq 0$
- $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ เมื่อ $\sin \theta \neq 0$
- $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ เมื่อ $\cos \theta \neq 0$
- $\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ เมื่อ $\sin \theta \neq 0$

$\sin \theta$ และ $\operatorname{cosec} \theta$ มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก
 $\tan \theta$ และ $\cot \theta$ มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก
 ทุกฟังก์ชันมีค่าเป็นจำนวนจริงบวก
 $\cos \theta$ และ $\sec \theta$ มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก



ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

- การเปลี่ยนหน่วยองศาเป็นเรเดียนและการเปลี่ยนหน่วยเรเดียนเป็นองศาทำได้ ดังนี้
 - มุมในหน่วยเรเดียน เท่ากับ มุมในหน่วยองศา $\times \frac{\pi}{180}$
 - มุมในหน่วยองศา เท่ากับ มุมในหน่วยเรเดียน $\times \frac{180}{\pi}$

การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- ใช้ค่าฟังก์ชันที่กำหนดในแถวบน โดยอ่านจากบนลงล่าง
 - ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ ใช้ค่าฟังก์ชันที่กำหนดในแถวบน โดยอ่านจากบนลงล่าง
 - ถ้า $45^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ใช้ค่าฟังก์ชันที่กำหนดในแถวล่าง โดยอ่านจากล่างขึ้นบน

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- ลักษณะของกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติแต่ละฟังก์ชันเป็นดังนี้

- กราฟของ $y = \sin x$

กำหนด $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = a \sin(nx)$ เมื่อ $n > 0$

จะได้ว่า เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ $[-|a|, |a|]$

คาบของฟังก์ชัน คือ $\frac{2\pi}{n}$

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ $|a|$

- กราฟของ $y = \cos x$

กำหนด $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = a \cos(nx)$ เมื่อ $n > 0$

จะได้ว่า เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ $[-|a|, |a|]$

คาบของฟังก์ชัน คือ $\frac{2\pi}{n}$

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ $|a|$

- กราฟของ $y = \tan x$

โดเมนของฟังก์ชัน คือ $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$

คาบของฟังก์ชัน คือ π

ไม่มีแอมพลิจูด

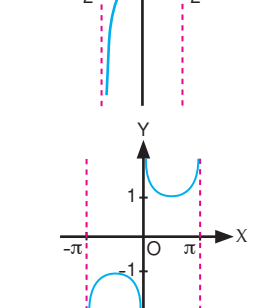
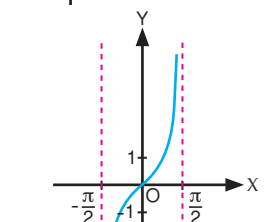
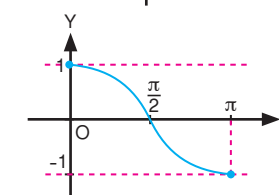
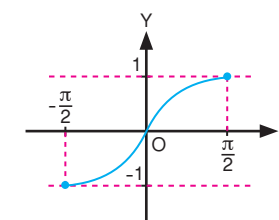
- กราฟของ $y = \operatorname{cosec} x$

โดเมนของฟังก์ชัน คือ $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

คาบของฟังก์ชัน คือ 2π

ไม่มีแอมพลิจูด



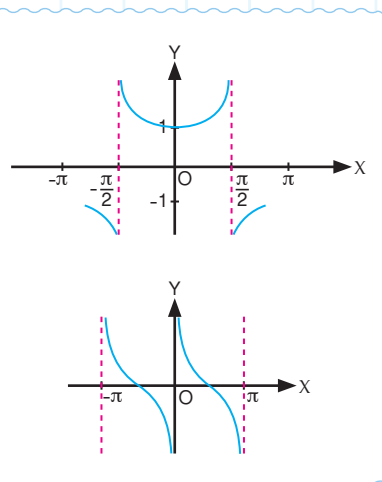
5. กราฟของ $y = \sec x$

โดเมนของฟังก์ชัน คือ $\{x | x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

คาบของฟังก์ชัน คือ 2π

ไม่มีแอมพลิจูด



6. กราฟของ $y = \cot x$

โดเมนของฟังก์ชัน คือ $\{x | x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

คาบของฟังก์ชัน คือ π

ไม่มีแอมพลิจูด

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

• กำหนด α และ β เป็นจำนวนจริงหรือมุม จะได้ว่า

$$1. \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$2. \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$3. \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$4. \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$5. \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \text{ เมื่อ } 1 - \tan \alpha \tan \beta \neq 0$$

$$6. \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \text{ เมื่อ } 1 + \tan \alpha \tan \beta \neq 0$$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่า สามเท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริงหรือมุม

• กำหนด α และ β เป็นจำนวนจริงหรือมุม จะได้ว่า

$$1. \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$2. \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$3. \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \text{ เมื่อ } \tan^2 \alpha \neq 1$$

$$4. \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$5. \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$6. \tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} \text{ เมื่อ } 3 \tan^2 \alpha \neq 1$$

$$7. \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$8. \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$9. \tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

• กำหนด α และ β เป็นจำนวนจริงหรือมุม จะได้ว่า

$$1. 2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \quad 2. 2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

$$3. 2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \quad 4. 2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$5. \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad 6. \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$7. \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad 8. \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

• $y = \arcsin x$ โดยที่ $\sin y = x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

• $y = \arccos x$ โดยที่ $\cos y = x$ เมื่อ $0 \leq y \leq \pi$

• $y = \arctan x$ โดยที่ $\tan y = x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ

• สมการที่มีฟังก์ชันตรีโกณมิติปรากฏอยู่เรียกว่า สมการตรีโกณมิติ

• กำหนด θ เป็นจำนวนจริงหรือมุม

เรียก สมการตรีโกณมิติที่เป็นจริงสำหรับทุก θ ว่า เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\text{เช่น } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

กฎของไซน์และโคไซน์

• กฎของไซน์

ในรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม a, b และ c ตามลำดับ จะได้ว่า

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

• กฎของโคไซน์

ในรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม a, b และ c ตามลำดับ จะได้ว่า

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



แบบฝึกทักษะ

ประจำหน่วยการเรียนรู้ที่

1

คำชี้แจง : ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1) $\tan^2 80^\circ - \cos^2 35^\circ - \operatorname{cosec}^2 57^\circ - \sec^2 80^\circ - \sin^2 35^\circ + \cot^2 57^\circ$

2) $\frac{3 \tan^2 \theta + 3}{\sec^2 \theta} + \sin^2 \theta \cot^2 \theta - \cot^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta + \sin^2 \theta$

3) $\left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) - \cos \theta \right]^2 + \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + \sin \theta \right]^2$

4) $\sin 390^\circ - \cos (-150^\circ) + \tan (-315^\circ)$

5) $\frac{\sin^2 (-325^\circ) + \cos^2 (-145^\circ)}{1 - \sin^2 240^\circ} + \frac{\cot^2 (-225^\circ)}{1 - \operatorname{cosec}^2 405^\circ}$

6) $\frac{\sin \frac{5\pi}{3} + \cos \frac{7\pi}{3} + \tan \left(-\frac{5\pi}{3} \right)}{\sin \frac{11\pi}{6} + \cos \frac{2\pi}{3} + \tan \frac{7\pi}{4}}$

7) $\frac{\sin (4\pi - \theta) \tan (3\pi - \theta) \cot (5\pi - \theta)}{\cot (2\pi + \theta) \tan (\theta - \pi)}$

2. กำหนด $f(\theta) = \sin \left(\frac{\theta + \pi}{4} \right)$ ให้หาค่าของ $\frac{f(-5\pi) + f(0)}{f(\pi)}$

3. กำหนด $3 \sin^2 \theta + 7 \cos \theta - 5 = 0$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ให้หาค่าของ $\sin(-\theta) + \tan(-\theta)$

4. แก้สมการ $\sin^2 2x + 6 \cos 2x - 6 = 0$

5. กำหนด $\sin(A - B) = \frac{2}{5}$, $\cos(A + B) = \frac{1}{5}$ และ $\cos A = \frac{3}{5}$ เมื่อ $A, B \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$
ให้หาค่าของ $\sin B$

6. ให้หาค่าของ

1) $\sin^2 \theta + \sin^2 (60^\circ + \theta) + \sin^2 (60^\circ - \theta)$

2) $\cos^2 \theta + \cos^2 (60^\circ + \theta) + \cos^2 (60^\circ - \theta)$

7. ให้หาค่าของ

1) $\frac{\sin 80^\circ + \cos 50^\circ}{\sin 70^\circ}$

2) $\frac{\tan 182^\circ - \tan 47^\circ}{1 + \tan 182^\circ \tan 47^\circ}$

3) $\frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos \theta}$

8. ให้หาค่าของ $\tan 81^\circ - \tan 63^\circ - \tan 27^\circ + \tan 9^\circ$

9. กำหนด $\sin A - 2 \sin B = 0$ และ $3 \cos 2A - 2 \cos 2B = -3$ เมื่อ $A, B \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$
ให้หาค่าของ $5 \sin(A - B)$

10. กำหนด $\cos A = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$

ให้หาค่าของ $\sin(A + B) + \sin(2A - B) - \sin(A - B) - \sin(2A + B)$

11. กำหนด $\arctan 3x - \arctan x = \frac{\pi}{6}$ ให้หาค่าของ $\sin(\arctan 3x + \arctan x)$

12. แก้สมการ $2 \cos^2 \theta + 1 = -\cos \theta + 2\sqrt{2 \cos^2 \theta + \cos \theta}$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

13. แก้สมการ $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta = 1$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

14. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B และ C เป็น a, b และ c ตามลำดับ โดยมี $(a + b + c)(a - b - c) = -3bc$ และ $2a^2 = 3b^2$ ให้หาค่าของ $\sin^2(3A + 2B) + 1$

15. จากจุด A ซึ่งอยู่ทางทิศใต้ของตึก หากมองขึ้นไปจะเห็นยอดตึกเป็นมุมเงย 60 องศา แต่ถ้ามองจากจุด B ซึ่งอยู่ทางทิศตะวันตกของจุด A อีก 10 เมตร จะเห็นยอดตึกเป็นมุมเงย 45 องศา ให้หาความสูงของตึก

16. กล้ายืนอยู่บนพื้นราบมองเห็นยอดเสาแห่งหนึ่ง เป็นมุมเงย 45 องศา และเมื่อเดินเข้าไปหา ยอดเสาตามเนินเอียงที่ทำมุม 15 องศา กับแนวราบเป็นระยะทาง 400 เมตร เขาได้มองไปที่ยอดเสาอีกครั้งปรากฏว่า เขามองเห็นยอดเสาเป็นมุมเงย 75 องศา อยากทราบว่า ยอดเสาสูงเท่าใด

17. ชายคนหนึ่งอยู่บนหน้าผาที่ติดกับทะเล เขามองเห็นเรือสองลำเป็นมุมก้ม 35 องศา และ 80 องศา ตามลำดับ ถ้าเรือสองลำอยู่ห่างกัน 120 เมตร และชายคนนั้นสูง 185 เซนติเมตร อยากทราบว่าหน้าผาสูงจากระดับน้ำทะเลเท่าใด