

คณิตศาสตร์

เล่ม 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ผู้เรียบเรียง

นางวัชรารัตน์ กรอุษณกุล

นางจินดา อยู่เป็นสุข

นางนพรัตน์ วันแก้ว

รศ. ดร.อำพล ธรรมเจริญ

นายรณชัย มาเจริญทรัพย์

นางสาวสายสุณี สุทธิจักร์

นายไอศุรีย์ สุตประเสริฐ

นายวุฒิชัย ศรีวสุธากุล

ผู้ตรวจ

ผศ.รุจิรา พิพิพัฒน์

นางสาวทองดี กุลแก้วสว่างวงศ์

นางสาวบุรณกมล เจริญ

บรรณาธิการ

นางสาวจันทร์เพ็ญ ชุ่มคช

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ

ปีที่พิมพ์ 2567

พิมพ์ครั้งที่ 1

จำนวนพิมพ์ 10,000 เล่ม

ISBN : 978-616-606-062-1

รหัสสินค้า 3516006

อักษ

www.aksorn.com

จัดพิมพ์และจำหน่ายทั่วประเทศโดย

บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจก. จำกัด

142 ถนนตะนาว เขตพระนคร กรุงเทพมหานคร 10200

โทร. 0 2622 2999 (จัดไปมิต 20 คู่สาย)

แฟกซ์: บริษัท ไทยรับแปล จำกัด โทร. 0 2903 9101-6



หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม
ศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 นี้
ผู้เรียบเรียงได้จัดแบ่งออกเป็น
๔ ดังนี้



สาระการเรียนรู้ เพิ่มเติม

QR Code แบบทดสอบ
พื้นฐานก่อนเรียน

แบบฝึกหัดเพื่อทบทวน
หรือตรวจสอบความรู้พื้นฐาน
ก่อนเรียน

ทบทวนความรู้เดิม
เพื่อเชื่อมโยงเข้าสู่
เนื้อหาใหม่

คำตามประจำ
หน่วยการเรียนรู้

ที่ครอบคลุมผลการเรียนรู้
ในหน่วยการเรียนรู้

เสริมความรู้ทั่วไป
ที่สอดคล้องกับเนื้อหา

แนวข้อสอบ A-Level

แนวข้อสอบเพื่อเข้าศึกษาต่อ
ในระดับอุดมศึกษา

ที่เชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์
ไปใช้ในชีวิตจริง

[illegible]

แบ่งระดับความยากง่ายเหมาะสม
กับระดับการเรียนรู้ของผู้เรียน

[illegible]**ตรวจสอบตนเอง**

แบบประเมินเพื่อให้ผู้เรียน
สามารถตรวจสอบความรู้
ความเข้าใจของตนเอง

เพื่อส่งเสริมการเรียนรู้
แบบ Active Learning

การหาผลคูณของเมทริกซ์

ตัวอย่างที่ 1

จงหาผลคูณของเมทริกซ์ A และ B ดังต่อไปนี้

เมทริกซ์ A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

เมทริกซ์ B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

วิธีทำ ให้พิจารณาว่าเมทริกซ์ทั้งสองสามารถคูณกันได้หรือไม่

เมทริกซ์ A มีขนาด 3×3

เมทริกซ์ B มีขนาด 3×3

เนื่องจากจำนวนคอลัมน์ของเมทริกซ์ A เท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ B ดังนั้นเมทริกซ์ทั้งสองสามารถคูณกันได้

การหาผลคูณของเมทริกซ์ A และ B จะได้เมทริกซ์ C ดังต่อไปนี้

เมทริกซ์ C

$$C = \begin{pmatrix} 14 & 32 & 50 \\ 32 & 70 & 110 \\ 50 & 110 & 170 \end{pmatrix}$$

ข้อควรระวัง ในการหาผลคูณของเมทริกซ์ ต้องพิจารณาว่าเมทริกซ์ทั้งสองสามารถคูณกันได้หรือไม่

การหาผลคูณของเมทริกซ์ A และ B จะได้เมทริกซ์ C ดังต่อไปนี้

เมทริกซ์ A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

เมทริกซ์ B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

วิธีทำ ให้พิจารณาว่าเมทริกซ์ทั้งสองสามารถคูณกันได้หรือไม่

เมทริกซ์ A มีขนาด 3×3

เมทริกซ์ B มีขนาด 3×3

เนื่องจากจำนวนคอลัมน์ของเมทริกซ์ A เท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ B ดังนั้นเมทริกซ์ทั้งสองสามารถคูณกันได้

การหาผลคูณของเมทริกซ์ A และ B จะได้เมทริกซ์ C ดังต่อไปนี้

เมทริกซ์ C

$$C = \begin{pmatrix} 14 & 32 & 50 \\ 32 & 70 & 110 \\ 50 & 110 & 170 \end{pmatrix}$$

QR Code

ใช้สมาร์ทโฟนเพื่อสแกน
เข้าดูสื่อดิจิทัลเพิ่มเติม

ความน่าจะเป็น

[illegible]

แนวคิดหลัก

โดยรวมของหน่วย
การเรียนรู้เพื่อทบทวน
ความรู้ให้แก่ผู้เรียน

เทคนิคต่างๆ ที่ชี้แนะวิธีการ
แก้โจทย์ทางคณิตศาสตร์

[illegible]

เพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกทำงานเกิดความชำนาญ

พหุนามกำลังสองในรูป $X^2 + aX + b = \frac{1}{4}(X + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2 - 4b}{4}$

กล่าวคือ $\frac{1}{4}(X + \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2 - 4b}{4}$

นั่นคือ $w = \frac{1}{4}(a^2 - 4b) = \frac{a^2}{4} - b$

หรือ $w = \frac{a^2}{4} - b$

ข้อสังเกต

พหุนามกำลังสองในรูป $\frac{1}{4}(X + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2 - 4b}{4}$ จะใช้กับ a ใดๆ ก็ได้

ตัวอย่าง ๑ $f(x) = x^2 + 10x + 16$ $\Rightarrow$ $w = \frac{10^2}{4} - 16 = 9$

ดังนั้น $x^2 + 10x + 16 = \frac{1}{4}(x + 5)^2 - 9$ และ $\frac{1}{4}(x + 5)^2 - 9 = 0$

ดังนั้น $\frac{1}{4}(x + 5)^2 = 9$ $\Rightarrow$ $(x + 5)^2 = 36$ $\Rightarrow$ $x + 5 = \pm \sqrt{36}$

ดังนั้น $x + 5 = 6$ หรือ $x + 5 = -6$

ดังนั้น $x = 1$ หรือ $x = -11$

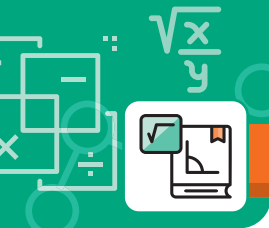
คำถามกระตุ้น
ให้ผู้เรียนได้คิด
ต่อยอดจาก
เนื้อหาที่เรียน

เสริมความรู้
หรือข้อสังเกต
ที่ได้จากเนื้อหา
ที่เรียน

กิจกรรมการเรียนรู้เชิงรุก (Active Learning)

กิจกรรมที่เน้นให้ผู้เรียน
ได้ลงมือปฏิบัติจริง เพื่อให้
เกิดการเรียนรู้ และสร้าง
องค์ความรู้ด้วยตัวเอง

[illegible]



สารบัญ คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2

หน่วยการเรียนรู้ที่

1

จำนวนเชิงซ้อน

2

1.1	จำนวนเชิงซ้อน	4
1.2	สมบัติเชิงพีชคณิต ของจำนวนเชิงซ้อน	10
1.3	กราฟและค่าสัมบูรณ์ ของจำนวนเชิงซ้อน	21
1.4	รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน	31
1.5	จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว	37
1.6	รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน	43
1.7	สมการพหุนาม	49
	คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง	61
	สรุปแนวคิดหลัก	62
	แบบฝึกทักษะประจำ หน่วยการเรียนรู้ที่ 1	66

หน่วยการเรียนรู้ที่

2

หลักการนับเบื้องต้น

68

2.1	หลักการนับเบื้องต้น	70
2.2	การเรียงสับเปลี่ยน	85
2.3	การจัดหมู่	106
2.4	ทฤษฎีบททวินาม	123
	คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง	130
	สรุปแนวคิดหลัก	131
	แบบฝึกทักษะประจำ หน่วยการเรียนรู้ที่ 2	133

หน่วยการเรียนรู้ที่

3

ความน่าจะเป็น

134

3.1	การทดลองสุ่มและเหตุการณ์	136
3.2	ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์	144
	คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง	167
	สรุปแนวคิดหลัก	168
	แบบฝึกทักษะประจำ หน่วยการเรียนรู้ที่ 3	169
	กิจกรรมการเรียนรู้เชิงรุก (Active Learning)	170
	บรรณานุกรม	172



คำอธิบายรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์ เล่ม 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

เวลา 80 ชั่วโมง

ศึกษาเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน และสมการพหุนาม กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม กรณีที่สิ่งของแตกต่างกันทั้งหมด การจัดหมู่กรณีที่สิ่งของแตกต่างกันทั้งหมด ทฤษฎีบททวินาม การทดลองสุ่มและเหตุการณ์ และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

โดยการจัดประสบการณ์หรือสร้างสถานการณ์ในชีวิตประจำวันที่เกี่ยวข้องให้ผู้เรียนได้ศึกษา ค้นคว้า ฝึกทักษะ โดยการปฏิบัติจริง ทดลอง สรุป รายงาน เพื่อพัฒนาทักษะ กระบวนการในการคิดคำนวณ การแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และนำประสบการณ์ด้านความรู้ ความคิด ทักษะและกระบวนการที่ได้ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์

เพื่อให้เห็นคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานได้อย่างเป็นระบบ มีระเบียบ รอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ และมีความเชื่อมั่นในตนเอง

ผลการเรียนรู้

- เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนและใช้สมบัติของจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา
- หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1
- แก้สมการพหุนามตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสี่ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- เข้าใจและใช้หลักการบวกและการคูณ การเรียงสับเปลี่ยน และการจัดหมู่ในการแก้ปัญหา
- หาความน่าจะเป็นและนำความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นไปใช้

รวม 5 ผลการเรียนรู้

จำนวนเชิงซ้อน

“พลังงานไฟฟ้าที่เปลี่ยนไปในหนึ่งหน่วยเวลา เรียกว่า กำลังไฟฟ้า ซึ่งหาได้จากสูตร $P = IV$ เมื่อ P แทนกำลังไฟฟ้า I แทนกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านเครื่องใช้ไฟฟ้า และ V แทนความต่างศักย์ที่ต่อกับเครื่องใช้ไฟฟ้า แต่ในกรณีที่กระแสไฟฟ้าและความต่างศักย์มีค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อน กำลังไฟฟ้าจะหาได้จากสูตร $P = \text{Re}(IV)$ ”

นักเรียนจะนำความรู้เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนมาหาค่าของกำลังไฟฟ้าได้อย่างไร



ผลการเรียนรู้

- เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนและใช้สมบัติของจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา
- หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1
- แก้สมการพหุนามตัวแปรเดียวที่มิใช่กำลังที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

- จำนวนเชิงซ้อน และสมบัติของจำนวนเชิงซ้อน
- จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว
- รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1
- สมการพหุนามตัวแปรเดียว



การแยกตัวประกอบของพหุนาม

สูตรพื้นฐานในการแยกตัวประกอบ

$$\text{สูตรผลต่างของกำลังสอง} : a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$\text{สูตรกำลังสองสมบูรณ์} : (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

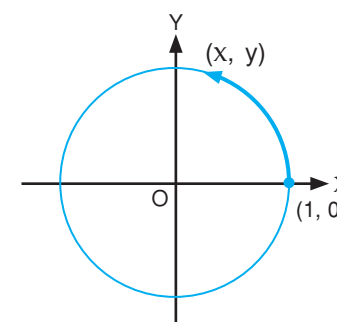
$$\text{สูตรผลต่างของกำลังสาม} : a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\text{สูตรกำลังสามสมบูรณ์} : (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\text{สูตรผลบวกของกำลังสาม} : a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์



จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วยและความสัมพันธ์ $x = \cos \theta$ และ $y = \sin \theta$ จะเห็นว่า ถ้าจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ มีพิกัด (x, y) แล้วพิกัด (x, y) จะเขียนแทนด้วย $(\cos \theta, \sin \theta)$

ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$1) y = \arcsin x \text{ โดยที่ } x = \sin y \text{ เมื่อ } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$2) y = \arccos x \text{ โดยที่ } x = \cos y \text{ เมื่อ } 0 \leq y \leq \pi$$

$$3) y = \arctan x \text{ โดยที่ } x = \tan y \text{ เมื่อ } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

ขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ

กำหนด u เป็นเวกเตอร์ที่มีจุด (x_1, y_1) เป็นจุดเริ่มต้น และจุด (x_2, y_2) เป็นจุดสิ้นสุด ให้ $x_2 - x_1 = a$ และ $y_2 - y_1 = b$ จะได้ว่า $|u| = \sqrt{a^2 + b^2}$

แบบทดสอบ
พื้นฐานก่อนเรียน



1.1 จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)

เมื่อพิจารณาสมการพหุนามบางสมการในระบบจำนวนจริง เช่น $x^2 + 1 = 0$ จะเห็นได้ชัดว่าไม่มีจำนวนจริง x ใด ๆ ที่ทำให้สมการเป็นจริง จึงกล่าวได้ว่า สมการพหุนาม $x^2 + 1 = 0$ ไม่มีคำตอบของสมการเป็นจำนวนจริง เพื่อให้สมการพหุนามนี้สามารถหาคำตอบได้ จึงมีการสร้างระบบจำนวนเชิงซ้อนเพื่อให้สมการพหุนามทั้งหมดมีคำตอบ ซึ่งจำนวนเชิงซ้อนมีบทนิยาม ดังนี้

บทนิยาม

จำนวนเชิงซ้อน z คือ จำนวนที่เขียนอยู่ในรูป

$$z = a + bi$$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และ $i^2 = -1$

เรียก a ว่า ส่วนจริง (real part) ของ z และเขียนแทนด้วย $\text{Re}(z)$

เรียก b ว่า ส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ z และเขียนแทนด้วย $\text{Im}(z)$

จากบทนิยามสามารถเขียนแทน $z = a + bi$ ด้วย $z = (a, b)$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และเมื่อพิจารณาค่า a และ b จะพบว่า

ถ้า $a = 0$ จะได้ว่า $z = 0 + bi$ หรือ $z = (0, b)$ ดังนั้น $z = bi$

ถ้า $b = 0$ จะได้ว่า $z = a + 0i$ หรือ $z = (a, 0)$ ดังนั้น $z = a$

ถ้า $a = 0$ และ $b = 0$ จะได้ว่า $z = 0 + 0i$ หรือ $z = (0, 0)$ ดังนั้น $z = 0$

จากการพิจารณาค่า a และ b ข้างต้น จะกล่าวได้ว่า ระบบจำนวนจริงเป็นสับเซตของระบบจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้น สมบัติต่าง ๆ ในระบบจำนวนจริงจึงสามารถนำมาใช้ในระบบจำนวนเชิงซ้อนได้

กำหนด $z = (a, b)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

1. ถ้า $b = 0$ จะได้ว่า z เป็นจำนวนจริง

2. ถ้า $a = 0$ แต่ $b \neq 0$ จะได้ว่า z เป็นจำนวนจินตภาพแท้ (purely imaginary number)

ตัวอย่างที่ 1

ให้เขียนจำนวนหรือคู่อันดับต่อไปนี้ในรูป $a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

1) $(-4, 3)$

2) $1 + \sqrt{-3}$

3) $-5 - \sqrt{-100}$

4) $\sqrt{-27}$

วิธีทำ 1) $(-4, 3) = -4 + 3i$

2) $1 + \sqrt{-3} = 1 + \sqrt{3}i$

3) $-5 - \sqrt{-100} = -5 - \sqrt{100}i = -5 - 10i$

4) $\sqrt{-27} = \sqrt{27}i = 3\sqrt{3}i$

ลองทำ

ให้เขียนจำนวนหรือคู่อันดับต่อไปนี้ในรูป $a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

1) $(\frac{1}{3}, 4)$

2) $1 - \sqrt{-8}$

3) $\sqrt{4} + \sqrt{-4}$

4) $\sqrt{-5}$

ตัวอย่างที่ 2

ให้บอกค่าของ $\text{Re}(z)$ และ $\text{Im}(z)$ ของจำนวนเชิงซ้อน z ต่อไปนี้

1) $(-5, 2)$

2) -7

3) $\frac{\sqrt{3} - 2i}{5}$

4) $2 + \sqrt{-16}$

5) $\sqrt{-2}$

6) $\sqrt{3} - \sqrt{-7}$

วิธีทำ 1) จาก $(-5, 2)$

จะได้ว่า $\text{Re}(z) = -5$ และ $\text{Im}(z) = 2$

2) จาก -7

จะได้ว่า $\text{Re}(z) = -7$ และ $\text{Im}(z) = 0$

3) จาก $\frac{\sqrt{3} - 2i}{5} = \frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{2}{5}i$

จะได้ว่า $\text{Re}(z) = \frac{\sqrt{3}}{5}$ และ $\text{Im}(z) = -\frac{2}{5}$

4) จาก $2 + \sqrt{-16} = 2 + 4i$

จะได้ว่า $\text{Re}(z) = 2$ และ $\text{Im}(z) = 4$

5) จาก $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$

จะได้ว่า $\text{Re}(z) = 0$ และ $\text{Im}(z) = \sqrt{2}$

6) จาก $\sqrt{3} - \sqrt{-7} = \sqrt{3} - \sqrt{7}i$

จะได้ว่า $\text{Re}(z) = \sqrt{3}$ และ $\text{Im}(z) = -\sqrt{7}$

ลองทำ

ให้หาค่าของ $\text{Re}(z)$ และ $\text{Im}(z)$ ของจำนวนเชิงซ้อน z ต่อไปนี้

1) $\left(1, -\frac{4}{5}\right)$

2) 10

3) $\frac{3 - 2i}{2}$

4) $-8 - \sqrt{-25}$

5) $\sqrt{-7}$

6) $\sqrt{3} - \sqrt{-3}$

พิจารณาค่าของ i ยกกำลังที่ n ต่อไปนี้

$i^0 = 1$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$

$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$

$i^1 = i$

$i^5 = i^4 \cdot i = i$

$i^9 = i^8 \cdot i = i$

$i^2 = -1$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$

$i^{10} = i^8 \cdot i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$

$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$

$i^{11} = i^8 \cdot i^3 = -i$

จะเห็นว่า ค่าของ i^n มีความสัมพันธ์ระหว่างผลหารและเศษของการหาร n ด้วย 4 จึงสรุปค่าของ i^n ดังนี้

$i^n = 1$ เมื่อ $n \div 4$ แล้วเหลือเศษ 0 (หารลงตัว)

$i^n = i$ เมื่อ $n \div 4$ แล้วเหลือเศษ 1

$i^n = -1$ เมื่อ $n \div 4$ แล้วเหลือเศษ 2

$i^n = -i$ เมื่อ $n \div 4$ แล้วเหลือเศษ 3

ตัวอย่างที่ 3

ให้หาค่าของ

1) $i^{347} + i^{2017} - 3i^{2560}$

2) $i^{1994} - i^{2537}$

วิธีทำ 1) $i^{347} + i^{2017} - 3i^{2560} = i^{4 \times 86 + 3} + i^{4 \times 504 + 1} - 3i^{4 \times 640}$

$= 1 \cdot i^3 + 1 \cdot i - 3(1)$

$= i^3 + i - 3$

$= (-i) + i - 3$

$= -3$

2) $i^{1994} - i^{2537} = i^{4 \times 498 + 2} - i^{4 \times 634 + 1}$

$= 1 \cdot i^2 - 1 \cdot i$

$= i^2 - i$

$= -1 - i$

ลองทำ

ให้หาค่าของ

1) $i^{1410} - i^{2512} + i^{3101}$

2) $i^{2018} + i^{2516}$

ตัวอย่างที่ 4

ให้หาค่าของ $i^3 \cdot i^6 \cdot i^9 \cdot i^{12}$

วิธีทำ $i^3 \cdot i^6 \cdot i^9 \cdot i^{12} = i^{3+6+9+12}$

$= i^{30}$

$= i^{4 \times 7 + 2}$

$= i^2$

$= -1$

แนะแนวคิด

$i^m \cdot i^n = i^{m+n}$
สำหรับทุก $m, n \in \mathbb{Z}$

ลองทำ

ให้หาค่าของ $i^{10} \cdot i^{20} \cdot i^{30} \cdot i^{40}$

แบบฝึกทักษะ 1.1

ระดับพื้นฐาน ★

1. ให้เขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในตารางเพื่อจำแนกจำนวนที่กำหนดว่าเป็นจำนวนชนิดใด

ข้อ	จำนวน	จำนวนเชิงซ้อน	จำนวนจินตภาพแท้	จำนวนจริง	จำนวนตรรกยะ	จำนวนอตรรกยะ	จำนวนเต็ม
1)	-4						
2)	3i						
3)	2 + i						
4)	i^8						
5)	$\sqrt{-3}$						
6)	(0, -3)						
7)	(-3, 0)						
8)	$\sqrt{2} + \sqrt{-4}$						
9)	$\frac{4 + 3i}{2}$						
10)	$i \cdot 3i^3$						

2. ให้เขียนจำนวนหรือคู่อันดับต่อไปนี้ในรูป $a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------|
| 1) (0, 5) | 2) (-4, 0) |
| 3) -1 | 4) 0 |
| 5) $1 + \sqrt{-15}$ | 6) $-\sqrt{2} - \sqrt{-2}$ |
| 7) $\sqrt{3} - 3\sqrt{-6}$ | 8) $\sqrt{-7} - 3$ |
| 9) $\frac{2 + \sqrt{-4}}{\sqrt{2}}$ | 10) $\frac{3 - \sqrt{-25}}{15}$ |

3. ให้ออกค่าของ $\text{Re}(z)$ และ $\text{Im}(z)$ ของจำนวนเชิงซ้อน z ต่อไปนี้

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------|
| 1) (0, 6) | 2) (3, 1) |
| 3) -3 | 4) $\sqrt{-9}$ |
| 5) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{5}$ | 6) $\frac{7 + \sqrt{-6}}{7}$ |
| 7) $1 + \sqrt{3}i$ | 8) $\sqrt{5} - \sqrt{-5}$ |
| 9) $i^2 - 2i^3$ | 10) $7i - 2\sqrt{-2}$ |

4. ให้ออกค่าของ

- $i^{25} + i^{60}$
- $i^{405} + 2i^{807} + 3i^{1023}$
- $i^{195} + i^{77} - i^{58}$
- $2i^{13} - 5i^{47} - i^{60}$
- $i^5 \cdot i^7 \cdot i^{11} \cdot i^{13} \cdot i^{15}$
- $3i^{753} \cdot 4i^{488}$

ระดับกลาง ★★

5. กำหนด $n \in \mathbb{Z}^+$ ให้ออกค่าของ

- $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3}$
- $i^n - i^{n+1} - i^{n+2} - i^{n+3}$
- $i^n \cdot i^{n+1} \cdot i^{n+2} \cdot i^{n+3}$

ระดับท้าทาย ★★★

6. ให้ออกค่าของ $i^3 + i^4 + i^5 + \dots + i^{2019}$

1.2 สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

(Algebraic Properties of Complex Number)

ในหัวข้อนี้นักเรียนจะได้ศึกษาถึงสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนกับตัวดำเนินการการบวกและการคูณ ซึ่งเรียกว่า สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

1. สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

สมบัติ

กำหนด $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$ เมื่อ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง จะกล่าวได้ว่า

1. $z_1 = z_2$ หรือ $a + bi = c + di$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

2. $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

หรือเขียนผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนในรูปคู่อันดับได้เป็น $(a + c, b + d)$

3. การคูณจำนวนเชิงซ้อนกับค่าคงตัว

$kz_1 = k(a + bi) = ka + kbi$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

หรือเขียนผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนในรูปคู่อันดับได้เป็น (ka, kb)

4. การคูณจำนวนเชิงซ้อนกับจำนวนเชิงซ้อน

$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di)$

$= ac + adi + bci + bdi^2$

$= (ac - bd) + (ad + bc)i$

หรือเขียนผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนในรูปคู่อันดับได้เป็น $(ac - bd, ad + bc)$

ให้นักเรียนศึกษาการใช้สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5

ให้หาจำนวนจริง a และ b ที่ทำให้ $(5 + bi) + (-a + 4i) = 2 + i$

วิธีทำ เนื่องจาก $(5 + bi) + (-a + 4i) = 2 + i$

จะได้ว่า $(5 - a) + (b + 4)i = 2 + i$

ดังนั้น $5 - a = 2$ และ $b + 4 = 1$

$a = 3$ และ $b = -3$

ลองทำ

ให้หาจำนวนจริง a และ b ที่ทำให้ $(a - 3i) + (-2 + bi) = 4i$

ตัวอย่างที่ 6

ให้หาผลบวกและผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน $2 + 5i$ และ $3 - 4i$

วิธีทำ $(2 + 5i) + (3 - 4i) = (2 + 3) + (5 - 4)i$

$= 5 + i$

$(2 + 5i)(3 - 4i) = [2(3) - 5(-4)] + [2(-4) + 5(3)]i$

$= (6 + 20) + (-8 + 15)i$

$= 26 + 7i$

ลองทำ

ให้หาผลบวกและผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน $2 - i$ และ $1 + 2i$

นอกจากสมบัติการเท่ากัน การบวก และการคูณของจำนวนเชิงซ้อน ยังมีสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

2. สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการบวกของจำนวนเชิงซ้อน

สมบัติ

สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการบวกของจำนวนเชิงซ้อน

1. สมบัติปิดของการบวก

ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $z_1 + z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

2. สมบัติการสลับที่ของการบวก

ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

3. สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการบวก

ถ้า z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

4. สมบัติการมีเอกลักษณ์ของการบวก

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

จะมีจำนวนเชิงซ้อน $0 + 0i$ ซึ่ง

$(a + bi) + (0 + 0i) = a + bi$

และ $(0 + 0i) + (a + bi) = a + bi$

เรียกจำนวนเชิงซ้อน $0 + 0i$ ว่า เอกลักษณ์การบวกของ $a + bi$

หรือเขียนเอกลักษณ์การบวกของ $a + bi$ ในรูปคู่อันดับได้เป็น $(0, 0)$

5. สมบัติการมีตัวผกผันของการบวก

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง
จะมีจำนวนเชิงซ้อน $-a - bi$ ซึ่ง

$$(a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0i$$

$$\text{และ } (-a - bi) + (a + bi) = 0 + 0i$$

เรียกจำนวนเชิงซ้อน $-a - bi$ ว่า ตัวผกผันการบวกของ $a + bi$

หรือเขียนตัวผกผันการบวกของ $a + bi$ ในรูปคู่อันดับได้เป็น $(-a, -b)$

ตัวอย่างที่ 7

ให้หาตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

- 1) $(3, -2)$ 2) $-4 + 2i$ 3) $8 - 5i$

- วิธีทำ 1) ตัวผกผันการบวกของ $(3, -2)$ คือ $(-3, 2)$
2) ตัวผกผันการบวกของ $-4 + 2i$ คือ $4 - 2i$
3) ตัวผกผันการบวกของ $8 - 5i$ คือ $-8 + 5i$

ลองทำ

ให้หาตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

- 1) $(\sqrt{11}, -6)$ 2) $-3 - 11i$ 3) $5 - \sqrt{7}i$

3. การลบจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม กำหนด z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

จากบทนิยาม ถ้า $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$ เมื่อ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า
 $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a + bi) + [-(c + di)] = (a - c) + (b - d)i$

ตัวอย่างที่ 8

ให้หา $z_1 - z_2$ เมื่อ $z_1 = 7 + 5i$ และ $z_2 = 4 - 3i$

- วิธีทำ จาก $z_1 = 7 + 5i$ และ $z_2 = 4 - 3i$
จะได้ว่า $z_1 - z_2 = (7 + 5i) - (4 - 3i)$
 $= (7 - 4) + (5 + 3)i$
 $= 3 + 8i$

ลองทำ

ให้หา $z_1 - z_2$ เมื่อ $z_1 = 2 - 3i$ และ $z_2 = 3 - 2i$

4. สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

สมบัติ

สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

1. สมบัติปิดของการคูณ

ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $z_1 z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

2. สมบัติการสลับที่ของการคูณ

ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $z_1 z_2 = z_2 z_1$

3. สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการคูณ

ถ้า z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

4. สมบัติการมีเอกลักษณ์ของการคูณ

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง
จะมีจำนวนเชิงซ้อน $1 + 0i$ ซึ่ง

$$(a + bi)(1 + 0i) = a + bi$$

$$\text{และ } (1 + 0i)(a + bi) = a + bi$$

เรียกจำนวนเชิงซ้อน $1 + 0i$ ว่า เอกลักษณ์การคูณของ $a + bi$

หรือเขียนเอกลักษณ์การคูณของ $a + bi$ ในรูปคู่อันดับได้เป็น $(1, 0)$

5. สมบัติการมีตัวผกผันของการคูณ

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ที่ไม่ใช่ศูนย์พร้อมกัน

จะมีจำนวนเชิงซ้อน $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$ ซึ่ง

$$(a + bi)\left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i\right) = 1 + 0i$$

$$\text{และ } \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i\right)(a + bi) = 1 + 0i$$

เรียกจำนวนเชิงซ้อน $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$ ว่า ตัวผกผันการคูณของ $a + bi$

หรือเขียนตัวผกผันการคูณของ $a + bi$ ในรูปคู่อันดับได้เป็น $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$

6. สมบัติการแจกแจง

ถ้า z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

และ $(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

💡 คณิตน่ารู้

ตัวผกผันการคูณของ z
เขียนแทนด้วย z^{-1}

ตัวอย่างที่ 9

ให้หาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

- 1) $(-3, 1)$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}i$ 3) $2i$

วิธีทำ 1) ตัวผกผันการคูณของ $(-3, 1)$ คือ $\left(-\frac{3}{10}, -\frac{1}{10}\right)$

2) ตัวผกผันการคูณของ $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}i$ คือ $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}i$

3) ตัวผกผันการคูณของ $2i$ คือ $-\frac{1}{2}i$

ลองทำดู

ให้หาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

- 1) $(1, -3)$ 2) $-1 + i$ 3) $-\frac{\sqrt{5}}{11}i$

5. การหารจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม กำหนด z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

$$z_1 \div z_2 = z_1 z_2^{-1}$$

เมื่อ $z_2 \neq 0$ และเขียนแทน $z_1 \div z_2$ ด้วย $\frac{z_1}{z_2}$

จากบทนิยาม ถ้า $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$ เมื่อ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = (a + bi) \left(\frac{c - di}{c^2 + d^2} \right) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) i$$

ตัวอย่างที่ 10

ให้หาค่าของ $\frac{6 + 4i}{2 - 3i}$

วิธีทำ จาก $z_1 z_2^{-1} = (a + bi) \left(\frac{c - di}{c^2 + d^2} \right)$

จะได้ว่า $= (6 + 4i) \left(\frac{2 + 3i}{2^2 + 3^2} \right)$

$= 2i$

ลองทำดู

ให้หาค่าของ $\frac{3 - 4i}{1 + 2i}$

6. สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน (Conjugate of a Complex Number)

พิจารณาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 1) (2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i) &= 2^2 - (\sqrt{3}i)^2 \\ &= 4 + 3 \\ &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) (\sqrt{3} + \sqrt{5}i)(\sqrt{3} - \sqrt{5}i) &= (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5}i)^2 \\ &= 3 + 5 \\ &= 8 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนในข้อ 1) และ 2) เป็นการคูณจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูป $(a + bi)(a - bi)$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนทั้งสองข้อเป็นจำนวนจริง เรียกจำนวนเชิงซ้อน $2 - \sqrt{3}i$ และ $\sqrt{3} - \sqrt{5}i$ ว่าเป็นสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน $2 + \sqrt{3}i$ และ $\sqrt{3} + \sqrt{5}i$ ตามลำดับ ซึ่งมีบทนิยาม ดังนี้

บทนิยาม กำหนด $z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง จะเรียกจำนวนเชิงซ้อน $a - bi$ ว่าเป็นสังยุคของ z เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{z}$ นั่นคือ $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

จากบทนิยามของจำนวนเชิงซ้อน ทำให้ได้สมบัติของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

สมบัติของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

กำหนด z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z = a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z\bar{z} = a^2 + b^2$
- $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
- $\text{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ เมื่อ $z_2 \neq 0$
- $\frac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$ เมื่อ $z \neq 0$

ต่อไปนี้จะเป็นการพิสูจน์สมบัติของสัญคของจำนวนเชิงซ้อน จากข้อ 1.-8. ดังนี้

กำหนด z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z = a + bi, z_1 = a_1 + b_1i$ และ $z_2 = a_2 + b_2i$
เมื่อ a, b, a_1, b_1, a_2, b_2 เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 1. \text{ จะได้ว่า } \bar{\bar{z}} &= \overline{(a + bi)} \\ &= \overline{(a - bi)} \\ &= a + bi \\ &= z \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \bar{\bar{z}} = z$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ จะได้ว่า } z\bar{z} &= (a + bi)(\overline{a + bi}) \\ &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 - (bi)^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } z\bar{z} = a^2 + b^2$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ จะได้ว่า } \frac{1}{2}(z + \bar{z}) &= \frac{1}{2}[(a + bi) + \overline{(a + bi)}] \\ &= \frac{1}{2}[(a + bi) + (a - bi)] \\ &= \frac{1}{2}(2a) \\ &= a \\ &= \text{Re}(z) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \text{Re}(z)$$

$$\begin{aligned} 4. \text{ จะได้ว่า } \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) &= \frac{1}{2i}[(a + bi) - \overline{(a + bi)}] \\ &= \frac{1}{2i}[(a + bi) - (a - bi)] \\ &= \frac{1}{2i}(2bi) \\ &= b \\ &= \text{Im}(z) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \text{Im}(z)$$

$$\begin{aligned} 5. \text{ จะได้ว่า } \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i)} \\ &= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} \\ &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i \\ &= (a_1 - b_1i) + (a_2 - b_2i) \\ &= \overline{(a_1 + b_1i)} + \overline{(a_2 + b_2i)} \\ &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \end{aligned}$$

$$\text{และ } \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$\text{ดังนั้น } \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

$$\begin{aligned} 6. \text{ จะได้ว่า } \overline{z_1 z_2} &= \overline{(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i)} \\ &= \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2)i} \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (b_1 a_2 + a_1 b_2)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } \overline{\bar{z}_1 \bar{z}_2} &= \overline{(a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i)} \\ &= (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (b_1 a_2 + a_1 b_2)i \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \overline{z_1 z_2} = \overline{\bar{z}_1 \bar{z}_2}$$

$$\begin{aligned} 7. \text{ จะได้ว่า } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i}\right)} \\ &= \overline{\left(\frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} \cdot \frac{a_2 - b_2i}{a_2 - b_2i}\right)} \\ &= \overline{\left[\frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}\right]} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) - (b_1 a_2 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} &= \frac{\overline{(a_1 + b_1i)}}{\overline{(a_2 + b_2i)}} \\ &= \frac{a_1 - b_1i}{a_2 - b_2i} \\ &= \frac{a_1 - b_1i}{a_2 - b_2i} \cdot \frac{a_2 + b_2i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) - (b_1 a_2 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

8. สมมติ $z \neq 0$

$$\text{จะได้ว่า } \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} \quad (\text{จากข้อ 7.})$$

$$= \frac{1}{\overline{z}}$$

$$\text{ดังนั้น } \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$\text{หรือ } \frac{1}{\overline{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$$

ตัวอย่างที่ 11

ให้หา $(5 + 4i) \div (2 - i)$ โดยใช้สังยุค

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \frac{5 + 4i}{2 - i} &= \frac{5 + 4i}{2 - i} \cdot \frac{2 + i}{2 + i} \\ &= \frac{10 + 5i + 8i + 4i^2}{2^2 + 1^2} \\ &= \frac{6 + 13i}{5} \\ &= \frac{1}{5}(6 + 13i) \end{aligned}$$

แนวคิด

$2 + i$ เป็นสังยุคของ
 $2 - i$

ลองทำ

ให้หา $(3 + 2i) \div (1 + i)$ โดยใช้สังยุค

ตัวอย่างที่ 12

ให้หาจำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องกับสมการ $(4 + 3i)z = -7 + 5i$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } (4 + 3i)z &= -7 + 5i \\ \text{จะได้ } z &= \frac{-7 + 5i}{4 + 3i} \\ &= \frac{-7 + 5i}{4 + 3i} \cdot \frac{4 - 3i}{4 - 3i} \\ &= \frac{-28 + 21i + 20i - 15i^2}{4^2 + 3^2} \\ &= \frac{-13 + 41i}{25} \\ &= -\frac{1}{25}(13 - 41i) \end{aligned}$$

ลองทำ

ให้หาจำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องกับสมการ $(2 - i)z = -3 + 5i$

แบบฝึกทักษะ 1.2

ระดับพื้นฐาน ★

1. ให้หาจำนวนจริง a และ b ต่อไปนี้

$$1) (4a, -5b) = (20, 30)$$

$$2) (7a, -5) = (-21, b)$$

$$3) (1 - 2a + bi) + 3i = 9 + ai$$

$$4) a + b - 2abi = 5 - 12i$$

2. ให้หาผลลัพธ์ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

$$1) (3, -7) + (-6, 11)$$

$$2) (8, -8)(5, 4)$$

$$3) 2(4 + i) + (12 - 15i)$$

$$4) (4 - 3i) - (-2 + i)$$

3. ให้หาตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

$$1) 4 - 4i$$

$$2) -\sqrt{3} + \sqrt{3}i$$

$$3) (1 - i)^2$$

$$4) (1 + i)^2$$

4. ให้หาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

$$1) -\sqrt{2} + i$$

$$2) 2(1 - 3i)$$

$$3) -\sqrt{2}i(\sqrt{2} + \sqrt{3}i)$$

$$4) \sqrt{6} - \sqrt{8}i$$

5. กำหนด $z_1 = 7 + 3i$ และ $z_2 = 5 - 2i$ ให้หาค่าของ

$$1) \overline{z_1}$$

$$2) \overline{z_2}$$

$$3) \overline{z_1 + z_2}$$

$$4) \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$5) \overline{z_1 z_2}$$

$$6) \overline{z_1} \overline{z_2}$$

ระดับกลาง ★★

6. ให้หา $(5 - 4i)(2 - i)(6 + 13i)$
7. ให้หาตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน $3(1 + 2i) - 2(2 - i)$
8. ให้หาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้
 - 1) $(3 + 5i)^2 - (3 - 5i)^2$
 - 2) $3(1 + i)^4$
 - 3) $(2 + 3i)^2 - (1 - 4i)^2$
 - 4) $4(3 - 2i)^3$
9. ให้เขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูป $a + bi$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$
 - 1) $\frac{1}{4 + 3i}$
 - 2) $\frac{2 + 3i}{8i}$
 - 3) $\frac{3 + i}{5 - i}$
 - 4) $\frac{1 + 7i}{1 - 8i}$
 - 5) $\frac{i}{\sqrt{3} + \sqrt{3}i}$
 - 6) $2i - \frac{1}{1 + i}$
10. ให้หาจำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้
 - 1) $(4 + i)z = 4 - 2i$
 - 2) $(3 - i)z - i = 2 + i$
 - 3) $z(9 - i) = (1 - i)^2$
 - 4) $\bar{z}(3 + 4i) = 3(1 + i)$
11. กำหนด $z_1 = 2 + 7i$ และ $z_2 = 4 - 5i$ ให้หาค่าของ
 - 1) $\operatorname{Re}(\bar{z}_1 + z_2)$
 - 2) $\operatorname{Re}(z_1 - 2\bar{z}_2)$
 - 3) $\operatorname{Im}(3\bar{z}_1 + 4\bar{z}_2)$
 - 4) $\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\right)$

ระดับท้าทาย ★★★

12. ให้หาจำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้
 - 1) $z(1 + i) = \bar{z}(2 - i) + 3 + 2i$
 - 2) $z\bar{z} + 2z = 4 - 2i$
 - 3) $(3 + 2i)(-4 - 3i)z = -1 + i$
 - 4) $(2 - i)^2(-3 + 5i)^2z = 2 + 3i$
 - 5) $\bar{z} - (1 - i)(2 - i) = 2 + 6i$

1.3 กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

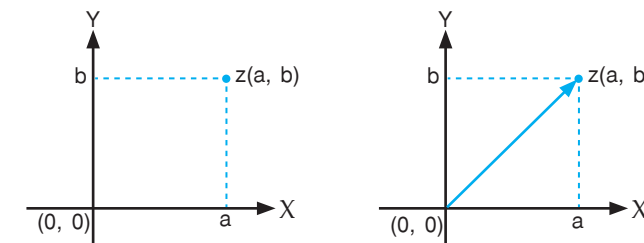
(Graph and Absolute Value of Complex Number)

เนื่องจากจำนวนเชิงซ้อน คือ จำนวนที่เขียนอยู่ในรูปคู่อันดับ (a, b) หรือในรูป $a + bi$ โดยที่ a เป็นส่วนจริง และ b เป็นส่วนจินตภาพ ดังนั้น สามารถแทนจำนวนเชิงซ้อน (a, b) ได้ ด้วยจุดบนระนาบในระบบพิกัดฉาก

1. ระนาบเชิงซ้อน (Complex Plane)

นักเรียนสามารถกำหนดจุดหรือเวกเตอร์บนระนาบในระบบพิกัดฉากแทนจำนวนเชิงซ้อน โดยเรียกแกน X หรือแกนนอนว่า แกนจริง (real axis) เรียกแกน Y หรือแกนตั้งว่า แกนจินตภาพ (imaginary axis) และเรียกระนาบที่ประกอบด้วยแกนทั้งสองว่า ระนาบเชิงซ้อน

กำหนด $z = a + bi$ จะได้จุด (a, b) หรือเวกเตอร์ที่มีจุด $(0, 0)$ เป็นจุดเริ่มต้น และจุด (a, b) เป็นจุดสิ้นสุด ดังรูป

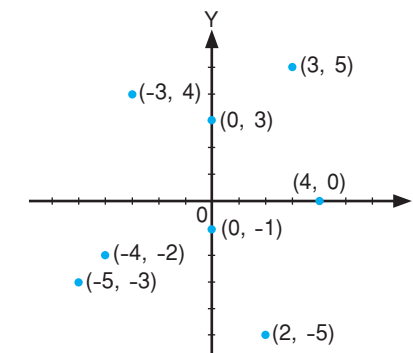


ตัวอย่างที่ 13

ให้เขียนจุดในระนาบเชิงซ้อน ซึ่งแทนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

$(4, 0), (3, 5), (0, 3), (-4, -2), (-5, -3), (0, -1), (2, -5), (-3, 4)$

วิธีทำ



ลองทำ

ให้เขียนจุดในระนาบเชิงซ้อน ซึ่งแทนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

(1, 2), (-1, 3), (-2, 0), (0, -2), (-2, 5), (1, 0), (4, -4), (-3, -4)

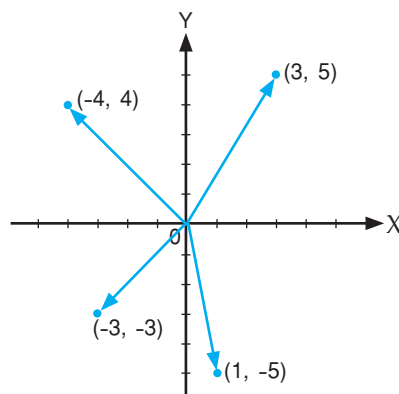
ตัวอย่างที่ 14

ให้เขียนเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อน ซึ่งแทนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

$3 + 5i$, $-4 + 4i$, $i(-5 - i)$, $i^2(3 + 3i)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } i(-5 - i) &= -5i - i^2 \\ &= -5i - (-1) \\ &= -5i + 1 \\ &= 1 - 5i \\ i^2(3 + 3i) &= 3i^2 + 3i^3 \\ &= 3(-1) + 3(-i) \\ &= -3 - 3i \end{aligned}$$

กราฟของ $3 + 5i$, $-4 + 4i$, $1 - 5i$ และ $-3 - 3i$ แทนด้วยเวกเตอร์ที่มีจุด (0, 0) เป็นจุดเริ่มต้นและจุด (3, 5), (-4, 4), (1, -5) และ (-3, -3) เป็นจุดสิ้นสุด ตามลำดับ



ลองทำ

ให้เขียนเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อน ซึ่งแทนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

$3 - i$, $-1 - i$, $i(2 + i)$, $i^2(4 - 2i)$

2. ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน (Absolute Value of Complex Number)

เนื่องจากจำนวนเชิงซ้อนสามารถเขียนแทนด้วยเวกเตอร์ซึ่งมีทิศทางและขนาด ดังนั้น ขนาดของเวกเตอร์ คือ ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน ดังบทนิยาม

บทนิยาม

กำหนด $z = a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง
ค่าสัมบูรณ์ (absolute value หรือ modulus) ของจำนวนเชิงซ้อน z
เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|z|$ โดยที่
$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



คุณรู้อะไร

จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ เมื่อนำมาเขียนแทนด้วยเวกเตอร์บนระนาบ จะมีความหมายทางเรขาคณิต ดังนี้

1. $z = a + bi$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด (0, 0) และมีจุดสิ้นสุดที่จุด (a, b)
2. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ เป็นระยะห่างระหว่างจุดกำเนิด (0, 0) กับจุด (a, b)
3. ถ้าจุด $z = a + bi$ และจุด $w = c + di$ แล้ว $|z - w| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$ เป็นระยะห่างระหว่างจุดทั้งสอง

สมบัติ

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

กำหนด z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

1. $|z|^2 = z\bar{z}$
2. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
3. $|zw| = |z||w|$
4. $|z + w| \leq |z| + |w|$
5. $|z - w| \geq ||z| - |w||$
6. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ เมื่อ $w \neq 0$
7. $|z|^{-1} = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ เมื่อ $z \neq 0$
8. $|z^n| = |z|^n$ เมื่อ $z \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็ม
9. $|z| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $z = 0$

ต่อไปนี้จะพิสูจน์สมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน จากข้อ 1.-3. ดังนี้

กำหนด z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z = a + bi$ และ $w = c + di$ เมื่อ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. จะได้ว่า $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi)$

$$\begin{aligned} &= a^2 + b^2 \\ &= (\sqrt{a^2 + b^2})^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|z|^2 = z\bar{z}$

2. จะได้ว่า $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$|-z| = |-a - bi| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

และ $|\bar{z}| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

ดังนั้น $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

3. จะได้ว่า $|zw| = |(a + bi)(c + di)|$

$$= |(ac - bd) + (bc + ad)i|$$

$$= \sqrt{(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2}$$

$$= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd + a^2d^2}$$

$$= \sqrt{(a^2c^2 + a^2d^2) + (b^2c^2 + b^2d^2)}$$

$$= \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)}$$

$$= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$$

$$= |z||w|$$

ดังนั้น $|zw| = |z||w|$



Thinking Time

นักเรียนจะพิสูจน์สมบัติของ
ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน
ข้อ 8. ได้อย่างไร

ตัวอย่างที่ 15

ให้หาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1) $-6i$

2) $-6 + 5i$

3) $(7 + i)(2 - i)$

4) $\frac{3 + 4i}{1 - \sqrt{3}i}$

วิธีทำ กำหนด z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ $z = a + bi$

1) จาก $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
จะได้ว่า $|-6i| = \sqrt{0^2 + (-6)^2}$
 $= \sqrt{36}$
 $= 6$

ดังนั้น ค่าสัมบูรณ์ของ $-6i$ คือ 6

2) จาก $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
จะได้ว่า $|-6 + 5i| = \sqrt{(-6)^2 + 5^2}$
 $= \sqrt{61}$

ดังนั้น ค่าสัมบูรณ์ของ $-6 + 5i$ คือ $\sqrt{61}$

3) จาก $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ และ $|zw| = |z||w|$
จะได้ว่า $|(7 + i)(2 - i)| = |7 + i||2 - i|$
 $= \sqrt{7^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2}$
 $= \sqrt{50} \cdot \sqrt{5}$
 $= 5\sqrt{10}$

ดังนั้น ค่าสัมบูรณ์ของ $(7 + i)(2 - i)$ คือ $5\sqrt{10}$

4) จาก $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ และ $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ เมื่อ $w \neq 0$
จะได้ว่า $\left|\frac{3 + 4i}{1 - \sqrt{3}i}\right| = \frac{|3 + 4i|}{|1 - \sqrt{3}i|}$
 $= \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}}$
 $= \frac{5}{2}$

ดังนั้น ค่าสัมบูรณ์ของ $\frac{3 + 4i}{1 - \sqrt{3}i}$ คือ $\frac{5}{2}$

ลองทำ

ให้หาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

- 1) $5i$ 2) $4 - 3i$ 3) $(1 + \sqrt{3}i)(3 - 2i)$ 4) $\frac{4 - 2i}{3 + i}$

3. การใช้กราฟแสดงคำตอบของสมการหรืออสมการค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

จากหัวข้อค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน นักเรียนจะได้นำความรู้มาใช้ในการเขียนกราฟของสมการและอสมการค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน เพื่อให้สอดคล้องกับแกนจริง (X) และแกนจินตภาพ (Y) โดยมีหลักการเขียนกราฟ ดังนี้

1. เปลี่ยน z ให้อยู่ในรูป $x + yi$
2. จัดรูปสมการใหม่ เพื่อพิจารณาว่า กราฟค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนเป็นกราฟชนิดใด

ตัวอย่างที่ 16

ให้เขียนกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อน ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$|z - 1 - 2i| = |z - i|$$

วิธีทำ กำหนด $z = x + yi$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริง

$$\text{จาก } |z - 1 - 2i| = |z - i|$$

$$\text{จะได้ว่า } |x + yi - 1 - 2i| = |x + yi - i|$$

$$|(x - 1) + (y - 2)i| = |x + (y - 1)i|$$

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

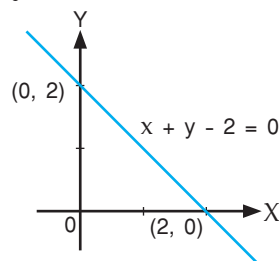
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 - 2y + 1$$

$$x + y - 2 = 0$$

ดังนั้น เซตของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับสมการ $|z - 1 - 2i| = |z - i|$

คือ เซตของจุดที่อยู่บนเส้นตรงซึ่งตัดแกนจริงที่จุด $(2, 0)$ และตัดแกนจินตภาพ

ที่จุด $(0, 2)$ ดังรูป



กราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $|z - 1 - 2i| = |z - i|$

ลองทำ

ให้เขียนกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อน ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$|z + 3| = |z + 2i|$$

ตัวอย่างที่ 17

ให้เขียนกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อน ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$|z - 3| < 2$$

วิธีทำ กำหนด $z = x + yi$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริง

$$\text{จาก } |z - 3| < 2$$

$$\text{จะได้ว่า } |x + yi - 3| < 2$$

$$|(x - 3) + yi| < 2$$

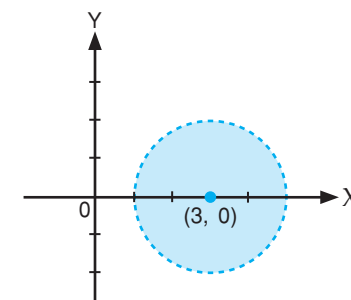
$$\sqrt{(x - 3)^2 + y^2} < 2$$

$$(x - 3)^2 + y^2 < 2^2$$

ดังนั้น เซตของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับสมการ $|z - 3| < 2$ คือ

เซตของจุดทั้งหมดที่อยู่ภายในวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(3, 0)$ และรัศมี

ยาว 2 หน่วย ดังรูป



กราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $|z - 3| < 2$

ลองทำ

ให้เขียนกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อน ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

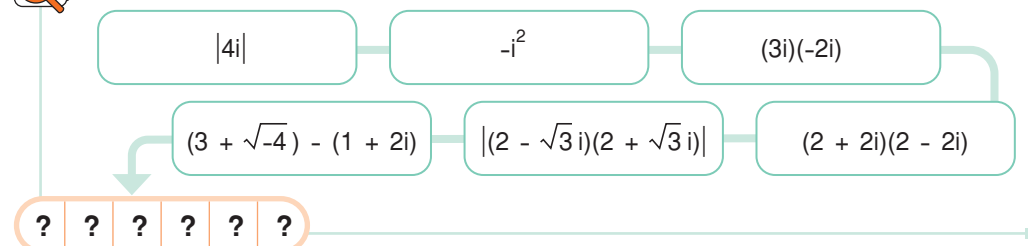
$$|z - 2i| < 2$$

กิจกรรม คณิตศาสตร์

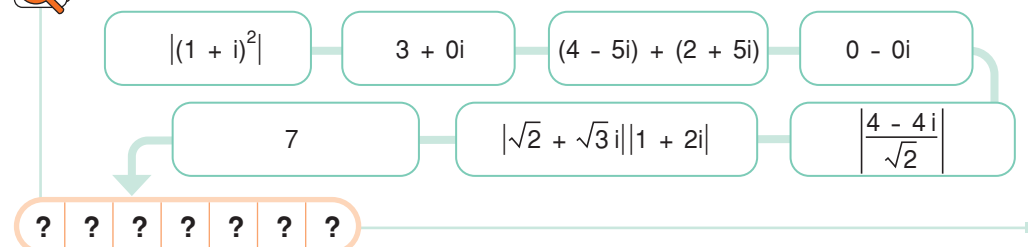
ให้นักเรียนถอดรหัสของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ โดยกำหนดตารางการถอดรหัส ดังนี้

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	U	R	O	N	C	M	E	B	P

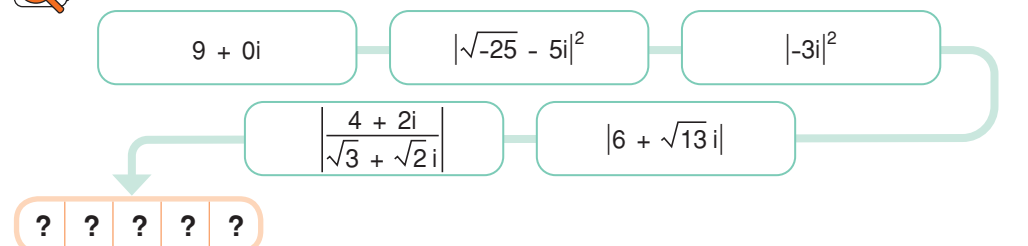
รหัสลับที่ 1



รหัสลับที่ 2



รหัสลับที่ 3



แบบฝึกทักษะ 1.3

ระดับพื้นฐาน ★

1. ให้เขียนจุดในระนาบเชิงซ้อน ซึ่งแทนด้วยจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

- 1) $(2, -4)$, $(0, -5)$, $(-5, 1)$, $(-3, 2)$
- 2) $(-1, -3)$, $(4, -5)$, $(3, 3)$, $(-4, 0)$
- 3) $-5 + i$, $3 - 2i$, $-4 - i$, -3
- 4) $-1 + 2i$, $3 + 2i$, $2 + 4i$, $3i$

2. กำหนด $z = 3 - i$ ให้เขียนเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อน ซึ่งแทนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

- 1) $z - 1 + i$, zi , $2z + i$
- 2) $z(3 - i)$, $i(z + i)$, $z - i$
- 3) $z^2(2 + 3i)$, $2i(z - 3i)^2$, $3i(z^2 + 2i)$

3. ให้หาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

- 1) $-8 - 15i$
- 2) $(4 + 3i) - (7 - 2i)$
- 3) $(2 - i)(3 + 3i)$
- 4) $5i(8 + i)(1 - 2i)$
- 5) $\frac{(4 - 5i)(2 - 3i)}{(1 + 5i)}$
- 6) $\frac{(1 - 4i)(3 + 5i)}{(4 - i)(5 + 3i)}$
- 7) $\frac{(1 + i)^{25}}{(1 - i)^{30}}$
- 8) $\frac{(13i)^4}{(5 - 12i)^7}$
- 9) $\frac{(1 + 2i)^{15}(3 - 4i)^{18}}{(3 + 4i)^9(1 - 2i)^{12}}$
- 10) $\frac{(7i)^6(7 - 4i)^5}{(5i)^3(3 + 2i)^4}$

4. กำหนด $z = 2 - 3i$ ให้หาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

- 1) $|z|$
- 2) $|\bar{z}|$
- 3) $|z^2|$
- 4) $|z\bar{z}|$
- 5) $|z - i|^2$
- 6) $|z + \bar{z}|$
- 7) $|z - \bar{z}|$
- 8) $|z^{-1}|$

ระดับกลาง ★★

5. ให้เขียนกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับสมการและสมการต่อไปนี้

- 1) $|z - i| = 3$
- 2) $|z + 2 - i| = |z - 1|$
- 3) $|z + 4 - i| \leq 1$
- 4) $|z - 1 + 3i| > 2$
- 5) $|z - 2 - 3i| < 2$
- 6) $|z + 2 - 4i| \geq 2$
- 7) $\text{Im}(z) \geq -1$
- 8) $\text{Re}(z) \leq -4$
- 9) $\text{Im}(z + i) = 4$
- 10) $\text{Re}(z - i) > -5$

6. กำหนดจำนวนเชิงซ้อน z ให้แสดงว่า $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

7. กำหนดจำนวนเชิงซ้อน z และ w ให้แสดงว่า $|z - w|^2 = (z - w)(\bar{z} - \bar{w})$

ระดับท้าทาย ★★★

8. ให้หาจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเท่ากับส่วนจินตภาพ และ $z\bar{z} = 2$

9. ให้หาจำนวนเชิงซ้อน z ต่อไปนี้ที่ทำให้

- 1) $|z - 3 + i| = |z + i|$ และ $|z| = \frac{3}{2}$
- 2) $\left|\frac{z+1}{z-2}\right| = 2$ และ $z\bar{z} = 9$
- 3) $\left|\frac{z-3}{z-6}\right| = 1$ และ $|z^2| = \frac{85}{4}$
- 4) $|z(-1 - i)| = \sqrt{26}$ และ $|z + 1 - i| = 5$
- 5) $|z^2 - 2z + 1| = |z^2 + 2z - 3|$ และ $|z|^{-1} = \frac{\sqrt{26}}{10}$

10. ให้หาจำนวนเชิงซ้อน z ที่มี $|z|$ มากที่สุด จากกราฟของ $|z + i| = 3$

1.4 รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน

(Square Root of Complex Number)

ในหัวข้อนี้ นักเรียนจะได้ศึกษารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ และการหาคำตอบของสมการกำลังสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

กำหนด z เป็นจำนวนเชิงซ้อน รากที่สองของ z คือ จำนวนเชิงซ้อน w ซึ่ง $w^2 = z$ และ $(-w)^2 = z$ ถ้า w เป็นรากที่สองของ z แล้ว $-w$ จะเป็นรากที่สองของ z ด้วย ซึ่งรากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่ศูนย์จะมีเพียงสองจำนวนเท่านั้น

ในการพิสูจน์สูตรเพื่อใช้ในการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

กำหนด $z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์พร้อมกัน และกำหนด $w = x + yi$ เป็นรากที่สองของ z โดยที่ x และ y เป็นจำนวนจริง

$$\text{ดังนั้น} \quad w^2 = z$$

$$(x + yi)^2 = a + bi$$

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = a + bi$$

$$\text{จะได้ว่า} \quad x^2 - y^2 = a \quad \dots\dots ①$$

$$\text{และ} \quad 2xy = b \quad \dots\dots ②$$

$$\text{จะได้ว่า} \quad |(x + yi)^2| = |a + bi|$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \dots\dots ③$$

$$\text{นำสมการ ③} + ① \text{ จะได้ว่า} \quad x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a) \text{ และ}$$

$$\text{นำสมการ ③} - ① \text{ จะได้ว่า} \quad y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)$$

$$\text{นั่นคือ} \quad x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \quad \text{และ} \quad y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

จาก $2xy = b$ และ $b \geq 0$ จะได้ว่า $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ หรือ $x \leq 0$ และ $y \leq 0$

ดังนั้น รากที่สองของ $z = a + bi$ คือ

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}i \quad \text{และ} \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}i$$

จาก $2xy = b$ และ $b < 0$ จะได้ว่า $x > 0$ และ $y < 0$ หรือ $x < 0$ และ $y > 0$

ดังนั้น รากที่สองของ $z = a + bi$ คือ

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}i \quad \text{และ} \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}i$$

ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท

กำหนดจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และให้ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ จะได้ว่า รากที่สองของ z คือ

$$\pm \left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} + \sqrt{\frac{r-a}{2}}i \right) \text{ เมื่อ } b \geq 0$$

$$\pm \left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} - \sqrt{\frac{r-a}{2}}i \right) \text{ เมื่อ } b < 0$$

ตัวอย่างที่ 18

ให้หารากที่สองของ $8 + 6i$

วิธีทำ กำหนด $z = 8 + 6i$ เมื่อเทียบกับ $z = a + bi$ จะได้ว่า $a = 8, b = 6$

$$\text{และ } r = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

เนื่องจาก $b \geq 0$ จะได้ว่า รากที่สองของ $8 + 6i$ คือ $\pm \left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} + \sqrt{\frac{r-a}{2}}i \right)$

$$\pm \left(\sqrt{\frac{10+8}{2}} + \sqrt{\frac{10-8}{2}}i \right) = \pm(3 + i)$$

$$= 3 + i \text{ และ } -3 - i$$

ดังนั้น รากที่สองของ $8 + 6i$ คือ $3 + i$ และ $-3 - i$

ลองทำ

ให้หารากที่สองของ $3 - 4i$

ตัวอย่างที่ 19

ให้หารากที่สองของจำนวนต่อไปนี้

1) -25

2) -8i

วิธีทำ 1) กำหนด $z = -25$ เมื่อเทียบกับ $z = a + bi$ จะได้ว่า $a = -25, b = 0$

$$\text{และ } r = \sqrt{(-25)^2 + 0^2} = 25$$

$$\text{รากที่สองของ } -25 \text{ คือ } \pm \left(\sqrt{\frac{25-25}{2}} + \sqrt{\frac{25+25}{2}}i \right) = \pm 5i$$

2) กำหนด $z = -8i$ เมื่อเทียบกับ $z = a + bi$ จะได้ว่า $a = 0, b = -8$

$$\text{และ } r = \sqrt{0^2 + (-8)^2} = 8$$

$$\text{รากที่สองของ } -8i \text{ คือ } \pm \left(\sqrt{\frac{8+0}{2}} - \sqrt{\frac{8-0}{2}}i \right) = \pm(2 - 2i)$$

ลองทำ

ให้หารากที่สองของจำนวนต่อไปนี้

1) -9

2) -2i

จากความรู้ เรื่อง รากที่สองของจำนวนจริงลบ นักเรียนสามารถนำไปใช้หาคำตอบของสมการพหุนามกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง โดยพิสูจน์ ดังนี้

$$\text{จาก } ax^2 + bx + c = 0 \text{ โดยที่ } a \neq 0$$

$$\text{จะได้ว่า } x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = 0$$

$$\text{ถ้า } b^2 - 4ac \geq 0 \text{ จะได้ว่า } \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = 0$$

$$\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = 0$$

$$\text{ดังนั้น } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ หรือ } x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{แต่ถ้า } b^2 - 4ac < 0 \text{ จะได้ว่า } \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(4ac - b^2)(-1)}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}i \right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}i \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}i \right) = 0$$

$$\text{ดังนั้น } x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}i}{2a} \text{ หรือ } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}i}{2a}$$

คำตอบของสมการพหุนามกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ $a, b, c \in \mathbb{R}$ และ $a \neq 0$ คือ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ เมื่อ } b^2 - 4ac \geq 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}i}{2a} \text{ เมื่อ } b^2 - 4ac < 0$$

ตัวอย่างที่ 20

ให้หาเซตคำตอบของสมการ $x^2 + 4x + 15 = 0$

วิธีทำ จาก $x^2 + 4x + 15 = 0$ เมื่อเทียบกับสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ จะได้ว่า $a = 1$
 $b = 4$ และ $c = 15$

พิจารณา $b^2 - 4ac = 4^2 - 4(1)(15) = -44$ ซึ่ง $-44 < 0$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ว่า } x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(15)}i}{2(1)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{44}i}{2} \\ &= -2 \pm \sqrt{11}i\end{aligned}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{-2 + \sqrt{11}i, -2 - \sqrt{11}i\}$

ลองทำ

ให้หาเซตคำตอบของสมการ $x^2 + 4x + 11 = 0$

ตัวอย่างที่ 21

ให้หาเซตคำตอบของสมการ $x^3 + 27 = 0$

วิธีทำ จาก $x^3 + 27 = 0$

จะได้ว่า $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = 0$

$$x + 3 = 0 \quad \text{หรือ} \quad x^2 - 3x + 9 = 0$$

ดังนั้น $x = -3$ หรือ $x^2 - 3x + 9 = 0$

และจาก $x^2 - 3x + 9 = 0$ เมื่อเทียบกับสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ จะได้ว่า $a = 1$,
 $b = -3$ และ $c = 9$

พิจารณา $b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(9) = -27$ ซึ่ง $-27 < 0$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ว่า } x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(9)}i}{2(1)} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{27}i}{2} \\ &= \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{-3, \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i, \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\}$

ลองทำ

ให้หาเซตคำตอบของสมการ $x^3 - 1 = 0$

สมการกำลังสองบางสมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน นักเรียนอาจต้องใช้ทฤษฎีบทการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 22

ให้หาเซตคำตอบของสมการ $(1 + i)x^2 + 1 - 7i = 0$

วิธีทำ จาก $(1 + i)x^2 + 1 - 7i = 0$

$$\text{จะได้ว่า } x^2 = \frac{-1 + 7i}{1 + i}$$

$$x^2 = \frac{-1 + 7i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i}$$

$$x^2 = \frac{6 + 8i}{2}$$

$$x^2 = 3 + 4i$$

หารากที่สองของ $3 + 4i$ ได้ ดังนี้

กำหนด $z = 3 + 4i$ เมื่อเทียบกับ $z = a + bi$ จะได้ว่า $a = 3$ และ $b = 4$

$$\begin{aligned}\text{และ } r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= 5\end{aligned}$$

เนื่องจาก $b \geq 0$ จะได้ว่า รากที่สองของ $3 + 4i$ คือ

$$\pm \left(\sqrt{\frac{5+3}{2}} + \sqrt{\frac{5-3}{2}}i \right) = \pm(2 + i)$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{2 + i, -2 - i\}$

ลองทำ

ให้หาเซตคำตอบของสมการ $(1 + i)x^2 = 2 - 14i$

แบบฝึกทักษะ 1.4

ระดับพื้นฐาน ★

1. ให้หารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

- | | |
|--------------------|--------------|
| 1) -7 | 2) $-25i$ |
| 3) $16i$ | 4) $-3 - 4i$ |
| 5) $7 + 24i$ | 6) $6 - 8i$ |
| 7) $1 + \sqrt{3}i$ | 8) $5 - 12i$ |

2. ให้หาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $x^2 + 25 = 0$ | 2) $x^2 + 32 = 0$ |
| 3) $x^2 + 75 = 0$ | 4) $x^2 + 243 = 0$ |
| 5) $(2 - 3i)x^2 - (46 + 9i) = 0$ | 6) $(1 - i)x^2 - (7 - 7i) = 0$ |
| 7) $(1 + i)x^2 - (7 + 23i) = 0$ | 8) $(3 + 4i)x^2 - (21 - 72i) = 0$ |

ระดับกลาง ★★

3. ให้หาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| 1) $x^2 + x + 1 = 0$ | 2) $x^2 + 4x + 5 = 0$ |
| 3) $2x^2 + 4x + 15 = 0$ | 4) $3x^2 - 2x + 1 = 0$ |
| 5) $x^3 - 64 = 0$ | 6) $x^3 + 125 = 0$ |
| 7) $4x^2 + 2x + 1 = 0$ | 8) $x^2 + 2x + 4 = 0$ |

ระดับท้าทาย ★★★

4. ให้หาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

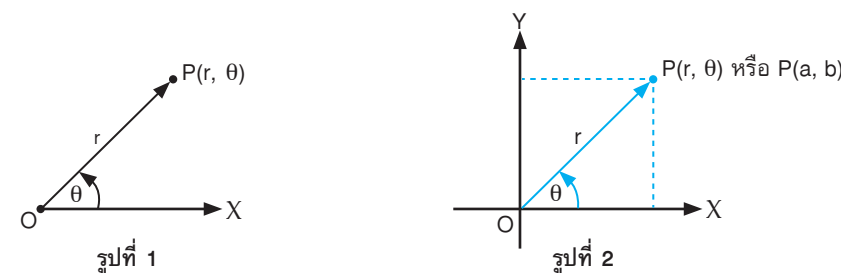
- $x^2 + (1 + 2i)x - 7 + i = 0$
- $x^2 + (1 + 2i)x - (1 - i) = 0$
- $x^2 - 3ix - (3 + i) = 0$
- $x^2 + (3 - 2i)x + 2 - 3i = 0$

1.5 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

(Polar Form of Complex Number)

นอกจากจะเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป $a + bi$ หรือ (a, b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ยังสามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อนได้อีกในรูปแบบหนึ่งโดยใช้ระบบพิกัดเชิงขั้ว เรียกจำนวนเชิงซ้อนดังกล่าวว่า รูปเชิงขั้ว การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วจะช่วยให้การคำนวณเกี่ยวกับการคูณ การหาร การยกกำลัง n และการหารากที่ n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก ได้สะดวกและรวดเร็วขึ้น

ระบบพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate system) เป็นระบบที่ใช้บอกตำแหน่งของจุด P บนระนาบอีกแบบหนึ่ง ประกอบไปด้วยจุดขั้ว (pole) มีแกนนอนเป็นแกนเชิงขั้ว (polar axis) ที่จุด P ใด ๆ บนระนาบจะมีรังสีจากขั้วไปยังจุด P นั้น ให้ O เป็นจุดขั้ว เส้นรังสี OX เป็นแกนเชิงขั้ว สามารถบอกตำแหน่งของจุด P บนระนาบโดยคู่อันดับ (r, θ) โดยที่ r เป็นระยะที่จุดห่างจากจุดขั้ว และ θ เป็นขนาดของมุมที่จุดขั้วของ OP กับแกนเชิงขั้ว ดังรูปที่ 1



ให้มุมที่วัดจากแกนเชิงขั้วไปยังรังสี OP วัดทวนเข็มนาฬิกามีขนาดของมุมเป็นจำนวนบวก เมื่อนำแกนเชิงขั้ววางบนแกน X ของระบบพิกัดฉาก โดยให้จุดขั้วอยู่ที่จุดกำเนิด O ดังรูปที่ 2 จะมีความสัมพันธ์ของระบบสองระบบ ดังนี้

กำหนด (a, b) เป็นพิกัดฉากของจุด P และ (r, θ) เป็นพิกัดเชิงขั้วของจุด P

จะได้ว่า $a = r \cos \theta$ และ $b = r \sin \theta$

และ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ และ $\tan \theta = \frac{b}{a}$ เมื่อ $a \neq 0$

จาก $z = a + bi$

จะได้ว่า $z = r \cos \theta + i(r \sin \theta)$

นั่นคือ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เรียกว่า รูปเชิงขั้ว (polar form) ของ z

และเรียกมุม θ ว่า อาร์กิวเมนต์ (argument) ของ z ใช้สัญลักษณ์ $\text{Arg}(z)$



จดจำ

$\cos \theta + i \sin \theta$ สามารถเขียนแทนด้วย $\text{cis } \theta$

จากฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

จะได้ว่า $\cos(\theta + 2n\pi) = \cos \theta$

และ $\sin(\theta + 2n\pi) = \sin \theta$

จาก $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

ดังนั้น $r(\cos \theta + i \sin \theta) = r[\cos(\theta + 2n\pi) + i \sin(\theta + 2n\pi)]$

แสดงว่า ถ้า θ เป็นอาร์กิวเมนต์ของ z แล้ว $\theta + 2n\pi$ เป็นอาร์กิวเมนต์ของ z ด้วย

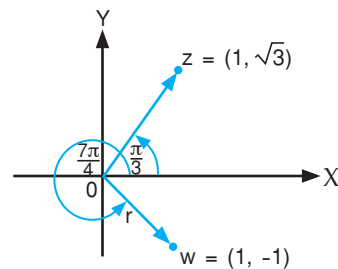
นั่นคือ $\text{Arg}(z)$ มีค่าได้หลายค่า สำหรับทุกจำนวนเต็ม n

จุด P ใดๆ ในระบบพิกัดฉาก แทนด้วยคู่อันดับ (a, b) เพียง 1 จุดเท่านั้น แต่จุด P ใดๆ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว แทนด้วยคู่อันดับ (r, θ) มากกว่า 1 จุด โดย θ มีค่าได้หลายค่า

ตัวอย่างที่ 23

กำหนด $z = 1 + \sqrt{3}i$ และ $w = 1 - i$ บนระนาบเชิงซ้อน ให้เขียนอยู่ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ จากจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนด เขียนจุดบนระนาบได้ ดังรูป



จาก $z = 1 + \sqrt{3}i$ ซึ่งมี $a = 1$ และ $b = \sqrt{3}$ เป็นจุดที่อยู่ในควอดรนต์ที่ 1

จะได้ว่า $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

หามุมที่รังสีทำกับแกน X จาก $\tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

จะได้ว่า $\theta = \frac{\pi}{3}$

นั่นคือ $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ หรือ $z = 2 \text{ cis } \frac{\pi}{3}$

จาก $w = 1 - i$ ซึ่งมี $a = 1$ และ $b = -1$ เป็นจุดที่อยู่ในควอดรนต์ที่ 4

จะได้ว่า $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

หามุมที่รังสีทำกับแกน X จาก $\tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{-1}{1} = -1$

จะได้ว่า $\theta = \frac{7\pi}{4}$

นั่นคือ $w = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$

หรือ $w = \sqrt{2} \text{ cis } \frac{7\pi}{4}$

จดจำ

จำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูปเชิงขั้ว จะใช้ θ เป็นมุมทวนเข็มนาฬิกา นั่นคือ $\theta > 0$

ลองทำ

กำหนด $z = \sqrt{3} - i$ และ $w = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ บนระนาบเชิงซ้อน ให้เขียนอยู่ในรูปเชิงขั้ว

การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว ทำให้การหาผลคูณหรือผลหารของจำนวนเชิงซ้อนทำได้ง่ายขึ้น ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท

กำหนด $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ โดยที่ $z_1 \neq 0$ และ $z_2 \neq 0$ จะได้ว่า

- $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$
- $\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2} (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2) = r_2^{-1} (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$
- $\overline{z_1} = r_1 [\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1)]$

พิสูจน์

- $$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \frac{1}{z_2} &= \frac{1}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \\ &= \frac{1}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \cdot \frac{(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)} \\ &= \frac{\cos \theta_2 - i \sin \theta_2}{r_2(\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2)} \\ &= \frac{1}{r_2} (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2) \\ &= r_2^{-1} (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2) \end{aligned}$$



3. สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง θ จะได้ว่า $\cos(-\theta) = \cos \theta$ และ $\sin(-\theta) = -\sin \theta$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } \frac{1}{z_2} &= \frac{1}{r_2}(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2) = \frac{1}{r_2}[\cos(-\theta_2) + i \sin(-\theta_2)] \\ \frac{z_1}{z_2} &= z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot \frac{1}{r_2}[\cos(-\theta_2) + i \sin(-\theta_2)] \\ &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]\end{aligned}$$

4. สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง θ จะได้ว่า $\cos(-\theta) = \cos \theta$ และ $\sin(-\theta) = -\sin \theta$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } \bar{z}_1 &= r_1(\cos \theta_1 - i \sin \theta_1) \\ &= r_1[\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1)]\end{aligned}$$

💡 คณิตน่ารู้

$$\begin{aligned}\text{จาก } z_1 z_2 &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \text{ และ } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \\ \text{จะได้ } \text{Arg}(z_1 z_2) &= \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) \text{ และ } \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 24

กำหนด $z_1 = 3 + \sqrt{3}i$ และ $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ ให้หา $z_1 z_2$ และ $\frac{z_1}{z_2}$ ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ จาก $z_1 = 3 + \sqrt{3}i$ จะได้ว่า $a = 3$ และ $b = \sqrt{3}$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 1

$$r_1 = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3} \text{ และ } \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ จะได้ว่า } \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{จะได้ว่า } z_1 = 3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

จาก $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ จะได้ว่า $a = \sqrt{2}$ และ $b = -\sqrt{2}$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4

$$r_2 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2 \text{ และ } \tan \theta = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1 \text{ จะได้ว่า } \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$\text{จะได้ว่า } z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$\text{จาก } z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ว่า } z_1 z_2 &= (2\sqrt{3})(2) \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{4} \right) \right] \\ &= 4\sqrt{3} \left(\cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12} \right)\end{aligned}$$

$$\text{จาก } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ว่า } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2\sqrt{3}}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4} \right) \right] \\ &= \sqrt{3} \left(\cos \frac{19\pi}{12} - i \sin \frac{19\pi}{12} \right)\end{aligned}$$

📐 ลองทำดู

กำหนด $z_1 = \sqrt{3} - 3i$ และ $z_2 = -2 + 2i$ ให้หา $z_1 z_2$ และ $\frac{z_1}{z_2}$ ในรูปเชิงขั้ว

จากการคูณของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว ให้นักเรียนพิจารณาค่าของ z ยกกำลัง n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

$$\text{กำหนด } z^1 = z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ว่า } z^2 &= z \cdot z = r \cdot r [\cos(\theta + \theta) + i \sin(\theta + \theta)] \\ &= r^2 [\cos(2\theta) + i \sin(2\theta)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z^3 &= z^2 \cdot z = r^2 \cdot r [\cos(2\theta + \theta) + i \sin(2\theta + \theta)] \\ &= r^3 [\cos(3\theta) + i \sin(3\theta)]\end{aligned}$$

⋮

ดังนั้น $z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$ ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทของเดอมัวร์

📌 ทฤษฎีบทของเดอมัวร์ (De Moivre's Theorem)

กำหนด $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เมื่อ $z \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\text{จะได้ว่า } z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

ตัวอย่างที่ 25

ให้เขียนจำนวนเชิงซ้อนของ $(1 - \sqrt{3}i)^6$ ในรูป $a + bi$ โดยใช้ทฤษฎีบทของเดอมัวร์

วิธีทำ จาก $z = 1 - \sqrt{3}i$ จะได้ว่า $a = 1$ และ $b = -\sqrt{3}$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4

$$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \text{ และ } \tan \theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \text{ จะได้ว่า } \theta = \frac{5\pi}{3}$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } (1 - \sqrt{3}i)^6 &= 2^6 \left[\cos \left(6 \left(\frac{5\pi}{3} \right) \right) + i \sin \left(6 \left(\frac{5\pi}{3} \right) \right) \right] \\ &= 64(\cos 10\pi + i \sin 10\pi) \\ &= 64[1 + i(0)] = 64\end{aligned}$$

ให้เขียนจำนวนเชิงซ้อนของ $(3 + \sqrt{3}i)^5$ ในรูป $a + bi$ โดยใช้ทฤษฎีบทของเดอมัวร์

แบบฝึกทักษะ 1.5

ระดับพื้นฐาน ★

1. ให้เขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว และจัดมุม θ ให้เป็นจำนวนบวก

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| 1) $3 - \sqrt{3}i$ | 2) $\sqrt{3} + 3i$ |
| 3) $1 + i$ | 4) $2 - 2\sqrt{3}i$ |
| 5) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ | 6) $-3\sqrt{2} + \sqrt{6}i$ |

2. กำหนด $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ และ $z_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ให้หาค่าของ

- | | |
|--|---|
| 1) $\text{Arg}(z_1)$ | 2) $\text{Arg}(z_2)$ |
| 3) $\text{Arg}(z_2) - \text{Arg}(z_1)$ | 4) $\text{Arg}\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)$ |

3. กำหนด $|z| = 3$ และ $\text{Arg}(z) = \frac{5\pi}{6}$, $|w| = 4$ และ $\text{Arg}(w) = \frac{3\pi}{2}$ ให้หาค่าของ

- | | |
|------------------|--------------------|
| 1) zw | 2) z^2w |
| 3) $\frac{z}{w}$ | 4) $\frac{z}{w^2}$ |

ระดับกลาง ★★

4. ให้เขียนจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดในรูป $a + bi$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$

- | | |
|--|---|
| 1) $(1 - \sqrt{3}i)^5$ | 2) $(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^7$ |
| 3) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}}\right)^6$ | 4) $(\cos 15^\circ - i \sin 15^\circ)^3$ |
| 5) $[2(\cos 12^\circ - i \sin 12^\circ)]^{10}$ | 6) $[4(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)][5(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)]$ |
| 7) $\frac{8(\cos 152^\circ + i \sin 152^\circ)}{2(\cos 92^\circ + i \sin 92^\circ)}$ | 8) $(\cos 10^\circ - i \sin 10^\circ)^{-6}$ |

1.6 รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน (The n^{th} Roots of Complex Number)

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ $z^n = r^n[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$ นักเรียนสามารถนำไปหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนได้ โดยเขียนรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว แล้วใช้ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

$$\sin \theta = \sin(\theta + 2k\pi)$$

$$\text{และ } \cos \theta = \cos(\theta + 2k\pi) \quad \text{เมื่อ } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

ตัวอย่างที่ 26

ให้หารากที่ 3 ของ -27

วิธีทำ กำหนด $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรากที่ 3 ของ -27

$$\text{แสดงว่า } r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = -27$$

$$\text{จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ } z^n = r^n[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

$$\text{จะได้ว่า } r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = 27(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\text{นั่นคือ } r^3 = 27 \text{ และ } \cos 3\theta + i \sin 3\theta = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$\text{ดังนั้น } r = 3 \text{ และ } 3\theta = \pi + 2k\pi \text{ เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$\text{เมื่อ } k = 0 \text{ จะได้ } \theta_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$k = 1 \text{ จะได้ } \theta_2 = \pi$$

$$k = 2 \text{ จะได้ } \theta_3 = \frac{5\pi}{3}$$

$$\text{จาก } z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ แทน } r = 3 \text{ และ } \theta_1, \theta_2, \theta_3$$

$$\text{จะได้ว่า } z_1 = 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$= 3(-1 + 0)$$

$$= -3$$

$$\begin{aligned} z_3 &= 3\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right) \\ &= 3\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

นั่นคือ $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -3$ และ $z_3 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

ดังนั้น รากที่ 3 ของ -27 คือ -3 , $\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ และ $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

ลองทำดู

ให้หารากที่ 3 ของ 8

จากตัวอย่างที่ 26 นักเรียนใช้ทฤษฎีบทของเดอมัวร์เกี่ยวกับการยกกำลังสามของจำนวนเชิงซ้อนเพื่อหารากที่ 3 ของจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้น การหารากที่ n ทั้งหมดของจำนวนเชิงซ้อน z เป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท

ถ้า $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ และ $z \neq 0$ แล้วรากที่ n ของ z มีทั้งหมด n รากที่แตกต่างกัน

คือ $z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$ เมื่อ $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

จากทฤษฎีบท เราใช้สัญลักษณ์ $z^{\frac{1}{n}}$ แทนรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน z

จะได้ $z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$

ตัวอย่างที่ 27

ให้หารากที่ 4 ของ -1

วิธีทำ จาก $-1 = -1 + 0i$ จะได้ว่า $a = -1$, $b = 0$, $r = 1$ และ $\theta = \pi$

กำหนด z เป็นรากที่ 4 ของ -1

นำจำนวนเชิงซ้อน z มาเขียนในรูปเชิงขั้ว

จาก $z = (-1)^{\frac{1}{4}}$

จะได้ $z = (\cos \pi + i \sin \pi)^{\frac{1}{4}}$

จากทฤษฎีบท จะได้ว่า รากที่ 4 ของ -1 คือ

$$(-1)^{\frac{1}{4}} = 1^{\frac{1}{4}} \left[\cos \left(\frac{1+2k}{4} \pi \right) + i \sin \left(\frac{1+2k}{4} \pi \right) \right]$$

เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_1 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_2 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_3 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

ลองทำดู

ให้หารากที่ 3 ของ -i

ตัวอย่างที่ 28

ให้หารากที่ 4 ของ $-3 - 3\sqrt{3}i$

วิธีทำ จาก $-3 - 3\sqrt{3}i$ จะได้ว่า $a = -3$, $b = -3\sqrt{3}$, $r = 6$ และ $\theta = \frac{4\pi}{3}$

กำหนด z เป็นรากที่ 4 ของ $-3 - 3\sqrt{3}i$

นำจำนวนเชิงซ้อน z มาเขียนในรูปเชิงขั้ว

จาก $z = (-3 - 3\sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}}$

จะได้ว่า $z = \left[6 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) \right]^{\frac{1}{4}}$

จากทฤษฎีบท จะได้ว่า รากที่ 4 ของ $-3 - 3\sqrt{3}i$ คือ

$$(-3 - 3\sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}} = 6^{\frac{1}{4}} \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \right) \right]$$

เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3$

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_0 = \sqrt[4]{6} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt[4]{6} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_1 = \sqrt[4]{6} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt[4]{6} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_2 = \sqrt[4]{6} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \sqrt[4]{6} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_3 = \sqrt[4]{6} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \sqrt[4]{6} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$

ลองทำ

ให้หารากที่ 4 ของ $-2 + 2\sqrt{3}i$

จากตัวอย่างที่ 28 จะเห็นว่า รากที่ 4 ของ $-3 - 3\sqrt{3}i$ มี 4 คำตอบ คือ

$$z_0 = \sqrt[4]{6} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \quad \text{และ} \quad |z_0| = \left| \sqrt[4]{6} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right| = \sqrt[4]{6}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{6} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \quad \text{และ} \quad |z_1| = \left| \sqrt[4]{6} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \right| = \sqrt[4]{6}$$

$$z_2 = \sqrt[4]{6} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \quad \text{และ} \quad |z_2| = \left| \sqrt[4]{6} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right| = \sqrt[4]{6}$$

$$z_3 = \sqrt[4]{6} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \quad \text{และ} \quad |z_3| = \left| \sqrt[4]{6} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \right| = \sqrt[4]{6}$$

นั่นคือ $|z_0| = |z_1| = |z_2| = |z_3|$ และผลบวกของ $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 = 0$

จดจำ

- รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ จะมี n ราก (คำตอบ)
- ถ้า $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ เป็นรากที่ n ของ z แล้ว $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \dots = |z_n|$
- ถ้า $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ เป็นรากที่ n ของ z แล้ว $z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n = 0$

แนวข้อสอบ A-Level

กำหนด $z = 3\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ และ w เป็นรากที่ 4 ของ $3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

ถ้า $\operatorname{Re}(w) < 0$ และ $\operatorname{Im}(w) < 0$ แล้วส่วนจินตภาพของ $\frac{z}{w}$ เท่ากับเท่าใด

แนวคิด จากทฤษฎีบท จะได้ รากที่ 4 ของ $3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ คือ

$$\left[3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \right]^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{4}} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right) \right]$$

เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3$

$$\text{เมื่อ } k = 0 \text{ จะได้ } w_0 = \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{เมื่อ } k = 1 \text{ จะได้ } w_1 = \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$\text{เมื่อ } k = 2 \text{ จะได้ } w_2 = \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$\text{เมื่อ } k = 3 \text{ จะได้ } w_3 = \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

เนื่องจาก $\operatorname{Re}(w) < 0$ และ $\operatorname{Im}(w) < 0$ จะได้ว่า w อยู่ในควอดรันต์ที่ 4

$$\text{นั่นคือ } w = \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad \frac{z}{w} &= \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}} \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4} \right) \right] \\ &= 3\sqrt[4]{3} \left[\cos \left(\frac{2\pi}{12} - \frac{21\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{12} - \frac{21\pi}{12} \right) \right] \\ &= 3\sqrt[4]{3} \left[\cos \left(-\frac{19\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{19\pi}{12} \right) \right] \\ &= 3\sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{19\pi}{12} - i \sin \frac{19\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

ดังนั้น ส่วนจินตภาพของ $\frac{z}{w}$ คือ $-\sin \frac{19\pi}{12}$

แบบฝึกทักษะ 1.6

ระดับพื้นฐาน ★

1. หารากที่ 4 ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| 1) $z = 1$ | 2) $z = -16$ |
| 3) $z = 81i^2$ | 4) $z = -8i^2$ |
| 5) $z = -1 + \sqrt{3}i$ | 6) $z = -5 - 5\sqrt{3}i$ |
| 7) $z = -16 + 16\sqrt{3}i$ | 8) $z = -\sqrt{2} - \sqrt{6}i$ |

ระดับกลาง ★★

2. ให้หาคำรากของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1) $i^{\frac{1}{3}}$

2) $(-i)^{\frac{1}{3}}$

3) $(-1)^{\frac{1}{4}}$

4) $16^{\frac{1}{6}}$

5) $(-27i)^{\frac{1}{3}}$

6) $(-1 + \sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}}$

7) $(-2 - 2\sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}}$

8) $\left(\frac{-5 - 5\sqrt{3}i}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$

3. ให้หาค่าของ n เมื่อกำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้สมการต่อไปนี้ เป็นจริง

1) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^n = -1$

2) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^n = 1$

3) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n = -1$

4) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n = 1$

5) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^n = -i$

6) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^n = i$

7) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n = -i$

8) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n = i$

4. ให้หารากที่ 6 ของ -8

ระดับท้าทาย ★★★

5. กำหนด z_1, z_2, z_3 เป็นรากของสมการ $(z + 2i)^3 = 8i$

ให้หาค่าของ $|z_1| + |z_2| + |z_3|$

6. ให้หาผลบวกและผลคูณของรากทั้งหมดของสมการ

$$z^3 + 3z^2 + 3z + 1 - i = 0$$

1.7 สมการพหุนาม (Polynomial Equations)

ฟังก์ชันพหุนามเป็นฟังก์ชันที่เขียนในรูป $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง ถ้า $a_n \neq 0$ จะกล่าวว่าพหุนามมีระดับชั้น (degree) n เมื่อกำหนด $p(x) = 0$ คำตอบของสมการพหุนามจะเป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ทฤษฎีบทมูลฐานของพีชคณิต (Fundamental Theorem of Algebra)

กำหนด $p(x)$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงและดีกรีมากกว่าหรือเท่ากับ 1 จะได้ว่า สมการ $p(x) = 0$ จะมีคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อยหนึ่งคำตอบ

จากทฤษฎีบทมูลฐานของพีชคณิต จึงได้อีกทฤษฎีบทหนึ่ง ดังนี้

ทฤษฎีบท ถ้า $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรี n เมื่อ $n \geq 1$ แล้วสมการ $p(x) = 0$ จะมีคำตอบทั้งหมด n คำตอบ เมื่อนับคำตอบที่ซ้ำกันด้วย

พิสูจน์ กำหนด $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ เมื่อ $n \geq 1$ โดยทฤษฎีบทมูลฐานของพีชคณิต จะได้ว่า สมการ $p(x) = 0$ มีคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อยหนึ่งคำตอบ กำหนด c_1 เป็นคำตอบ จะได้ว่า $x - c_1$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $p(x)$ ทำให้ได้ว่า $p(x) = (x - c_1)q(x) = 0$ เมื่อ $q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี $n - 1$ ถ้า $n - 1 \geq 1$ สมการ $q(x) = 0$ จะมีคำตอบอย่างน้อยหนึ่งคำตอบเช่นเดียวกัน กำหนด c_2 เป็นคำตอบ จะได้ว่า $x - c_2$ จะเป็นตัวประกอบหนึ่งของ $q(x)$ ทำให้ $p(x) = (x - c_1)(x - c_2)r(x) = 0$ เมื่อ $r(x)$ เป็นพหุนามดีกรี $n - 2$ ดำเนินการเช่นเดียวกันไปเรื่อยๆ จนกระทั่งได้คำตอบตัวที่ n ตัวประกอบของ $p(x)$ มีดีกรีเป็น 1 ทั้งหมด จะได้ว่า

$$p(x) = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \dots (x - c_{n-1})(x - c_n) = 0$$

หรือคำตอบทั้งหมดของสมการ $p(x) = 0$ คือ $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$

นั่นคือ สมการมีคำตอบ n คำตอบ

ให้นักเรียนศึกษาการหาคำตอบของสมการพหุนามจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 29

ให้หาคำตอบทั้งหมดของสมการ $(x + 1)(x - i)(x + i)(x - 3)^2(x + 4)^3 = 0$

วิธีทำ จากสมการ $(x + 1)(x - i)(x + i)(x - 3)^2(x + 4)^3 = 0$ เป็นสมการพหุนาม ซึ่งมีดีกรีเท่ากับ 8 ดังนั้น มีคำตอบของสมการทั้งหมด 8 คำตอบ ซึ่งมีคำตอบแตกต่างกันทั้งหมด 5 คำ คือ $-1, i, -i, 3, -4$ โดยที่ 3 เป็นคำตอบซ้ำ 2 คำ และ -4 เป็นคำตอบซ้ำ 3 คำ

ลองทำ

ให้หาคำตอบทั้งหมดของสมการ $x(x^2 + 1)(x + 1)^2(x - 2)^3 = 0$

ตัวอย่างที่ 30

ให้หาคำตอบทั้งหมดของสมการ $x^4 + 4x^2 - 45 = 0$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}x^4 + 4x^2 - 45 &= 0 \\(x^2 - 5)(x^2 + 9) &= 0 \\(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x - 3i)(x + 3i) &= 0 \\x &= \sqrt{5}, -\sqrt{5}, 3i, -3i\end{aligned}$$

ดังนั้น คำตอบทั้งหมดของสมการ คือ $\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 3i, -3i$

ลองทำ

ให้หาคำตอบทั้งหมดของสมการ $x^4 + 9x^2 - 112 = 0$

จากเรื่องระบบจำนวนจริง ที่กล่าวถึงทฤษฎีบทตัวประกอบ และทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะมาแล้ว ซึ่งสามารถนำมาช่วยในการหาคำตอบของสมการพหุนามได้ ดังนี้

ทฤษฎีบทตัวประกอบ (Factor Theorem)

กำหนด $p(x)$ เป็นพหุนามที่มีดีกรีมากกว่าหรือเท่ากับ 1
จะได้ว่า พหุนาม $p(x)$ มี $x - c$ เป็นตัวประกอบ ก็ต่อเมื่อ $p(c) = 0$

นอกจากทฤษฎีบทตัวประกอบ ยังมีทฤษฎีบทเพิ่มเติมในการช่วยหาคำตอบของสมการพหุนามที่เป็นจำนวนตรรกยะได้ ดังนี้

ทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะ (Rational Factor Theorem)

กำหนด $p(x)$ เป็นพหุนาม $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a_n \neq 0$
ถ้า $x - \frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $p(x)$ โดยที่ m และ k เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $m \neq 0$
และ ห.ร.ม. ของ m และ k คือ 1 แล้ว m หาร a_n ลงตัว และ k หาร a_0 ลงตัว

ให้นักเรียนศึกษาการหาคำตอบจากทฤษฎีบทตัวประกอบ และทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 31

ให้หาเซตคำตอบของสมการ $2x^4 + 3x^3 - x^2 - 21x - 10 = 0$

วิธีทำ กำหนด $p(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 21x - 10$ มี $a_n = 2$ และ $a_0 = -10$
ตัวประกอบของ -10 ได้แก่ $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$ ซึ่งเป็นค่าของ k
ตัวประกอบของ 2 ได้แก่ $\pm 1, \pm 2$ ซึ่งเป็นค่าของ m
จะได้ จำนวนที่อยู่ในรูป $\frac{k}{m}$ จากจำนวนดังกล่าว
ที่อาจทำให้ $p\left(\frac{k}{m}\right) = 0$ คือ $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{5}{2}$
พิจารณา $p(2) = 2(2)^4 + 3(2)^3 - (2)^2 - 21(2) - 10 = 0$
และ $p\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 21\left(-\frac{1}{2}\right) - 10 = 0$
นั่นคือ $x + \frac{1}{2}$ และ $x - 2$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$ ซึ่งจะมีพหุนาม
ที่เป็นคำตอบอีก 2 คำตอบ ที่หาได้จาก $p(x) \div \left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2)$ จะได้ผลลัพธ์เป็น
 $2x^2 + 6x + 10$
ดังนั้น $2x^4 + 3x^3 - x^2 - 21x - 10 = \left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2)(2x^2 + 6x + 10)$
 $= \left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2)(2)(x^2 + 3x + 5)$
 $= (2x + 1)(x - 2)(x^2 + 3x + 5)$

หาคำตอบของสมการ $x^2 + 3x + 5 = 0$ โดยใช้สูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{11}i}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\left\{-\frac{1}{2}, 2, -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i\right\}$

ลองทำ

ให้หาเซตคำตอบของสมการ $x^3 - 4x^2 + 24 = 0$

ตัวอย่างที่ 32

ให้หาเซตคำตอบที่เป็นจำนวนตรรกยะของสมการ $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$

วิธีทำ กำหนด $p(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2$

ตัวประกอบของ -2 ได้แก่ $\pm 1, \pm 2$ ซึ่งเป็นค่าของ k

ตัวประกอบของ 1 ได้แก่ ± 1 ซึ่งเป็นค่าของ m

จะได้ จำนวนตรรกยะในรูป $\frac{k}{m}$ จากจำนวนดังกล่าวที่อาจทำให้ $p\left(\frac{k}{m}\right) = 0$ คือ ± 1 และ ± 2

เมื่อหาค่าของ $p(1), p(-1), p(2)$ และ $p(-2)$ พบว่า ได้ผลลัพธ์ไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้น สมการพหุนามนี้ไม่มีคำตอบของสมการที่เป็นจำนวนตรรกยะ

ลองทำ

ให้หาเซตคำตอบที่เป็นจำนวนตรรกยะของสมการ $x^4 - 2x^3 + x^2 + 4x - 6 = 0$

ตัวอย่างที่ 33

ให้หาเซตคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการ $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$

วิธีทำ เนื่องจากสมการ $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$ ไม่มีคำตอบของสมการที่เป็นจำนวนตรรกยะ

ดังนั้น คำตอบของสมการอาจเป็นจำนวนอตรรกยะหรือจำนวนเชิงซ้อน

$$\begin{aligned} \text{จาก } p(x) &= x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2 \\ &= x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (x^4 + x^2) + (-2x^3 - 2x) + (-2x^2 - 2) \\ &= x^2(x^2 + 1) - 2x(x^2 + 1) - 2(x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ } p(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 2x - 2)$$

$$\text{พิจารณา } p(x) = 0$$

$$(x^2 + 1)(x^2 - 2x - 2) = 0$$

$$\text{จะได้ว่า } x^2 + 1 = 0 \text{ หรือ } x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\text{ดังนั้น } x = \pm i \text{ หรือ } x^2 - 2x - 2 = 0$$

และจาก $x^2 - 2x - 2 = 0$ เมื่อเทียบกับสมการ $ax^2 + bx + c = 0$

จะได้ $a = 1, b = -2$ และ $c = -2$

$$\text{จะได้ } x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{i, -i, 1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}\}$

ลองทำ

ให้หาเซตคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการ $x^4 - 2x^3 + x^2 + 4x - 6 = 0$

จากตัวอย่างที่ 31 และ 33 เป็นสมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง จะเห็นว่า คำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจินตภาพไม่เท่ากับศูนย์ จะเป็นสังยุคซึ่งกันและกัน เป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท

กำหนด $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรีมากกว่าหรือเท่ากับ 1 และสัมประสิทธิ์ทุกตัวเป็นจำนวนจริง ถ้า z เป็นคำตอบของสมการ $p(x) = 0$ แล้วสังยุคของ z จะเป็นคำตอบของสมการด้วย

พิสูจน์ กำหนด $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริง และ $a_n \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \overline{p(z)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \overline{a_{n-2} z^{n-2}} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ &= a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + a_{n-2} \overline{z^{n-2}} + \dots + a_1 \overline{z} + a_0 \\ &= p(\overline{z}) \end{aligned}$$

สมมติว่า z เป็นคำตอบของสมการดังกล่าว จะได้ว่า

$$\begin{aligned} p(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0 \\ &= 0 \\ p(\bar{z}) &= \overline{p(z)} \\ &= \overline{0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\bar{z}$ เป็นคำตอบของสมการพหุนาม $p(x) = 0$

ตัวอย่างที่ 34

กำหนด $3i$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18 = 0$

ให้หาเซตคำตอบของสมการ

วิธีทำ $p(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18$

เนื่องจาก $3i$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ ดังนั้น $-3i$ เป็นคำตอบของสมการด้วย

จะได้ $(x - 3i)(x + 3i) = x^2 + 9$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

นำ $x^2 + 9$ ไปหาร $p(x)$ เพื่อหาตัวประกอบอื่น โดยใช้วิธีหารยาว ดังนี้

$$\begin{array}{r} x^2 - x - 2 \\ x^2 + 9 \overline{) x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18} \\ \underline{x^4 + 9x^2} \\ -x^3 - 2x^2 - 9x \\ \underline{-x^3 - 9x} \\ -2x^2 - 18 \\ \underline{-2x^2 } \\ 0 \end{array}$$

จะได้ว่า $(x^2 + 9)(x^2 - x - 2) = 0$

ให้ $x^2 - x - 2 = 0$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

จะได้ว่า $x = 2$ หรือ $x = -1$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{-1, 2, 3i, -3i\}$

ลองทำ

กำหนด $1 - \sqrt{2}i$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $x^4 - 2x^3 + x^2 + 4x - 6 = 0$

ให้หาเซตคำตอบของสมการ

ตัวอย่างที่ 35

กำหนด $1 - \sqrt{2}i$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $x^4 - 2x^3 + 6x - 9 = 0$

ให้หาเซตคำตอบของสมการ

วิธีทำ เนื่องจาก $1 - \sqrt{2}i$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ ดังนั้น $1 + \sqrt{2}i$ จะเป็นคำตอบของสมการด้วย จึงนำ $x - (1 - \sqrt{2}i)$ และ $x - (1 + \sqrt{2}i)$ ไปหารพหุนามโดยใช้วิธีหารสังเคราะห์

นั่นคือ	$1 - \sqrt{2}i$	1	-2	0	6	-9
			$1 - \sqrt{2}i$	-3	$-3 + 3\sqrt{2}i$	9
	$1 + \sqrt{2}i$	1	$-1 - \sqrt{2}i$	-3	$3 + 3\sqrt{2}i$	0
			$1 + \sqrt{2}i$	0	$-3 - 3\sqrt{2}i$	
		1	0	-3	0	

จะได้ว่า $x^4 - 2x^3 + 6x - 9 = 0$

$$[x - (1 - \sqrt{2}i)][x - (1 + \sqrt{2}i)](x^2 - 3) = 0$$

$$(x - 1 + \sqrt{2}i)(x - 1 - \sqrt{2}i)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$$

นั่นคือ $x = 1 - \sqrt{2}i$ หรือ $x = 1 + \sqrt{2}i$ หรือ $x = \sqrt{3}$ หรือ $x = -\sqrt{3}$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1 - \sqrt{2}i, 1 + \sqrt{2}i\}$

ลองทำ

กำหนด $1 - i$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 10x - 10 = 0$

ให้หาเซตคำตอบของสมการ

ตัวอย่างที่ 36

กำหนด 1 เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $x^4 + (1 - 2i)x^3 - (3 + 2i)x^2 - (1 - 4i)x + 2 = 0$

ให้หาเซตคำตอบของสมการ

วิธีทำ เนื่องจาก 1 เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ จึงนำ $x - 1$ ไปหารพหุนามโดยใช้วิธีหารสังเคราะห์

นั่นคือ	1	1	$1 - 2i$	$-3 - 2i$	$-1 + 4i$	2
			1	$2 - 2i$	$-1 - 4i$	-2
		1	$2 - 2i$	$-1 - 4i$	-2	0

ได้ผลลัพธ์ $q(x) = x^3 + (2 - 2i)x^2 - (1 + 4i)x - 2$

นำ $x = -2$ ไปแทนใน $q(x)$ จะได้ค่า $q(-2) = (-2)^3 + (2 - 2i)(-2)^2 - (1 + 4i)(-2) - 2 = 0$

ดังนั้น $x + 2$ เป็นตัวประกอบของ $q(x)$ โดยวิธีหารสังเคราะห์

นั่นคือ	-2	1	2 - 2i	-1 - 4i	-2
			-2	4i	2
		1	-2i	-1	0

$$\text{จะได้ว่า } x^4 + (1 - 2i)x^3 - (3 + 2i)x^2 - (1 - 4i)x + 2 = 0$$

$$(x - 1)(x + 2)(x^2 - 2ix - 1) = 0$$

$$(x - 1)(x + 2)(x - i)^2 = 0$$

นั่นคือ $x = 1$ หรือ $x = -2$ หรือ $x = i$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{-2, 1, i, i\}$

ลองทำ

กำหนด i เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $x^3 - (4 + 4i)x^2 - (3 - 16i)x + 12 = 0$
ให้หาเซตคำตอบของสมการ

ตัวอย่างที่ 37

ให้หาสมการพหุนาม $p(x)$ ดีกรีน้อยที่สุดที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และมี $3 + \sqrt{2}i$, $3 - \sqrt{2}i$, -1 และ 2 เป็นคำตอบของสมการ $p(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $3 + \sqrt{2}i$, $3 - \sqrt{2}i$, -1 และ 2 เป็นคำตอบของสมการ $p(x)$
ซึ่งมีดีกรีน้อยที่สุด คือ 4

$$\text{จะได้ว่า } p(x) = [x - (3 + \sqrt{2}i)][x - (3 - \sqrt{2}i)][x - (-1)](x - 2) = 0$$

$$(x - 3 - \sqrt{2}i)(x - 3 + \sqrt{2}i)(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$[(x - 3)^2 - (\sqrt{2}i)^2](x^2 - x - 2) = 0$$

$$(x^2 - 6x + 11)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x^4 - 7x^3 + 15x^2 + x - 22 = 0$$

ดังนั้น สมการพหุนาม $p(x)$ คือ $x^4 - 7x^3 + 15x^2 + x - 22 = 0$

ลองทำ

ให้หาสมการพหุนาม $p(x)$ ดีกรีน้อยที่สุดที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม
และมี $2 + \sqrt{3}i$, $2 - \sqrt{3}i$, 4 และ 2 เป็นคำตอบของสมการ $p(x)$

ตัวอย่างที่ 38

กำหนด $1 - \sqrt{3}i$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx - 8 = 0$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ให้หาค่า a , b และเซตคำตอบของสมการ

วิธีทำ เนื่องจากสมการที่กำหนดเป็นสมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

เมื่อ $1 - \sqrt{3}i$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ

$$\text{จะได้ว่า } (1 - \sqrt{3}i)^4 + a(1 - \sqrt{3}i)^3 + 2(1 - \sqrt{3}i)^2 + b(1 - \sqrt{3}i) - 8 = 0$$

$$-8 + 8\sqrt{3}i - 8a - 4 - 4\sqrt{3}i + b - \sqrt{3}bi - 8 = 0$$

$$(-8a + b - 20) + (4\sqrt{3} - \sqrt{3}b)i = 0 + 0i$$

$$-8a + b - 20 = 0 \dots\dots ①$$

$$4\sqrt{3} - \sqrt{3}b = 0 \dots\dots ②$$

แนะแนวคิด

หาค่า a , b โดยใช้สมบัติ
การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน

จากสมการ ② จะได้ $b = 4$

แทน $b = 4$ ในสมการ ① จะได้ $a = -2$

$$\text{จะได้สมการ คือ } x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$$

นั่นคือ	$1 - \sqrt{3}i$	1	-2	2	4	-8
			$1 - \sqrt{3}i$	-4	$-2 + 2\sqrt{3}i$	8
	$1 + \sqrt{3}i$	1	$-1 - \sqrt{3}i$	-2	$2 + 2\sqrt{3}i$	0
			$1 + \sqrt{3}i$	0	$-2 - 2\sqrt{3}i$	
		1	0	-2	0	

$$\text{จะได้ว่า } x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$$

$$[x - (1 - \sqrt{3}i)][x - (1 + \sqrt{3}i)](x^2 - 2) = 0$$

$$(x - 1 + \sqrt{3}i)(x - 1 - \sqrt{3}i)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$

นั่นคือ $x = 1 - \sqrt{3}i$ หรือ $x = 1 + \sqrt{3}i$ หรือ $x = \sqrt{2}$ หรือ $x = -\sqrt{2}$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1 - \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i\}$

ลองทำ

กำหนด $2 + i$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 10 = 0$
เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ให้หาค่า a, b และเซตคำตอบของสมการ

จากการแก้สมการพหุนามซึ่งมีคำตอบของสมการเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจินตภาพไม่เท่ากับศูนย์ สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์จะมีความสัมพันธ์กับผลบวกของคำตอบของสมการ ในที่นี้จะกล่าวเฉพาะสัมประสิทธิ์ของสองพจน์ ดังต่อไปนี้

กำหนดสมการพหุนามดีกรี n

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

จะได้ว่า ผลบวกของคำตอบของสมการทั้งหมดเท่ากับ $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$

และผลคูณของคำตอบของสมการทั้งหมดเท่ากับ $\begin{cases} \frac{a_0}{a_n} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ -\frac{a_0}{a_n} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

ตัวอย่างที่ 39

ให้หาผลบวกและผลคูณของคำตอบทั้งหมดของสมการ $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$

วิธีทำ จาก $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$

นำสมการที่กำหนดมาจัดรูปทั่วไปของสมการพหุนาม

จะได้ว่า $x^4 + (-2)x^3 + 2x^2 + 4x + (-8) = 0$

ดังนั้น $a_n = 1, a_{n-1} = -2$ และ $a_0 = -8$

จะได้ว่า ผลบวกของคำตอบทั้งหมดเท่ากับ $-\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{(-2)}{1} = 2$

ซึ่งมีผลลัพธ์เท่ากับผลบวกของคำตอบในตัวอย่างที่ 38

นั่นคือ $-\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{3}i + 1 + \sqrt{3}i = 2$

และผลคูณของคำตอบทั้งหมดเท่ากับ $\frac{a_0}{a_n} = \frac{-8}{1} = -8$

ซึ่งมีผลลัพธ์เท่ากับผลคูณของคำตอบในตัวอย่างที่ 38

นั่นคือ $(-\sqrt{2})(\sqrt{2})(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i) = -8$

ลองทำ

ให้หาผลบวกและผลคูณของคำตอบทั้งหมดของสมการ $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 8x + 10 = 0$

แบบฝึกทักษะ 1.7

ระดับพื้นฐาน ★

- ให้หาสมการพหุนาม $p(x)$ ดีกรีน้อยที่สุดที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและจำนวนต่อไปนี้ เป็นคำตอบของสมการ $p(x)$
 - $1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, -\frac{1}{2}$
 - $1 + \sqrt{2}i, 1 - \sqrt{2}i, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$
 - $1 - \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i, 2, 2$
 - $1 + i, 1 - i, -1, -1, -1$
 - $1 - 2i, 1 - 2i, 2$
 - $1 + i, 1 + i, 1, -2$
- ให้หาสมการพหุนามดีกรี 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และมี $\frac{1}{2}, -2, 2 + i$ และ $2 - i$ เป็นคำตอบของสมการ
- ถ้า $2 - \sqrt{3}i$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 8x - 14 = 0$ ให้หาเซตคำตอบของสมการ
- ถ้า $1 - \sqrt{3}i$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $x^4 + ax^3 + 7x^2 + bx - 4 = 0$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ให้หาค่า a, b และเซตคำตอบของสมการ
- ให้หาผลบวกและผลคูณของคำตอบทั้งหมดของสมการ $2x^4 - (1 - i)x^3 + 4ix^2 - 3x + 3i = 0$

ระดับกลาง ★★

- ให้หาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้
 - $x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = 0$
 - $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$
 - $2x^4 - x^3 - 4x^2 + 10x - 4 = 0$
 - $2x^5 - 9x^4 + 4x^3 + 54x - 27 = 0$
 - $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 16x + 24 = 0$

- 6) $3x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$
- 7) $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 8x + 10 = 0$
- 8) $8x^5 + 12x^4 + 14x^3 + 13x^2 + 6x + 1 = 0$
- 9) $2x^3 + (1 - 2\sqrt{3})x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$
- 10) $x^3 - (4 + 2i)x^2 + (7 + 8i)x - 14i = 0$
- 11) $x^3 - 4x^2 + (4 - i)x - 3 + 3i = 0$
- 12) $x^3 - (4 + i)x^2 + 4(1 + i)x - 4i = 0$

7. ให้หาเซตคำตอบของสมการ $x^4 + (1 - 2i)x^2 - 2i = 0$

ระดับท้าทาย ★★★

8. กำหนด x_1, x_2, x_3, x_4 เป็นคำตอบของสมการ $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 26x - 21 = 0$

ให้หาค่าของ

- 1) $x_1x_2x_3x_4$
- 2) $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2$

ตรวจสอบตนเอง



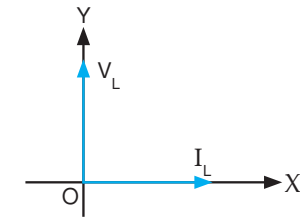
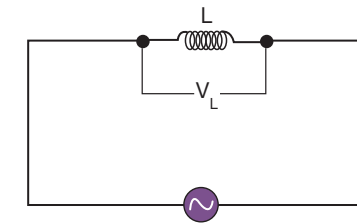
หลังจากเรียนจบหน่วยแล้ว ให้นักเรียนบอกสัญลักษณ์ที่ตรงกับระดับความสามารถของตนเอง

	ดี	พอใช้	ควรปรับปรุง
1. เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนและสามารถใช้สมบัติของจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหาคำถามได้	😊	😊	😞
2. สามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วได้	😊	😊	😞
3. สามารถแก้โจทย์จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วได้	😊	😊	😞
4. สามารถหาค่ารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนได้	😊	😊	😞
5. สามารถหาคำตอบของสมการพหุนามได้	😊	😊	😞

คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง

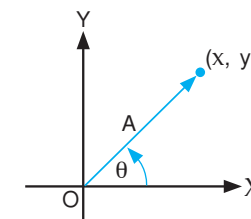
แผนภาพเฟเซอร์ (phasor diagram)

สำหรับวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ กระแสไฟฟ้า และความต่างศักย์ไม่ได้อยู่ในเฟสเดียวกันเหมือนวงจรไฟฟ้ากระแสตรง ดังนั้น จึงมีการนำแผนภาพเฟเซอร์ของความต่างศักย์ไฟฟ้าและกระแสไฟฟ้าซึ่งเป็นวิธีที่ง่ายกว่ามาช่วยในการวิเคราะห์ห้วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ โดยนำจำนวนเชิงซ้อนในวิชาคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้ในการคำนวณ



จากรูป จะเห็นว่า ความต่างศักย์ไฟฟ้าที่ตกคร่อมขดลวดเหนี่ยวนำ (V_L) จะนำหน้ากระแสไฟฟ้า (I_L) ซึ่งทำมุม 90 องศา การเขียนแผนภาพเฟเซอร์แสดงความต่างเฟสของ V_L และ I_L จะเขียนให้ V_L ขึ้นในแนวแกน Y หรือแกนจินตภาพ เพื่อแสดงว่าความต่างศักย์ไฟฟ้ามีเฟสนำหน้ากระแสไฟฟ้าอยู่ 90 องศา และ I_L ขึ้นในแนวแกน X หรือแกนจริง

โดยทั่วไป จำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูป $x + jy$ สามารถเขียนให้อยู่รูปเชิงขั้วได้ ดังนี้



จากรูป จะได้

$$x = A \cos \theta$$

$$y = A \sin \theta$$

และ
ดังนั้น

$$A = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x + jy = A \cos \theta + j(A \sin \theta)$$



สถานการณ์

จากตัวอย่างการศึกษาข้างต้น ให้นักเรียนค้นคว้าข้อมูลเรื่องการนำความรู้เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนมาประยุกต์ใช้ในชีวิตจริงมา 1 เรื่อง

สรุป แนวคิดหลัก

จำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อน

- จำนวนเชิงซ้อน คือ จำนวนที่อยู่ในรูป $z = a + bi$ หรือ $z = (a, b)$ เมื่อ a และ $b \in \mathbb{R}$
โดยที่ $\text{Re}(z) = a$ และ $\text{Im}(z) = b$
- $i^2 = -1$ หรือ $i = \sqrt{-1}$
- ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$
- เซตของจำนวนเชิงซ้อนเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{C}$ ดังนั้น $\mathbb{C} = \{ (a, b) \mid a \in \mathbb{R} \text{ และ } b \in \mathbb{R} \}$
- เซตของจำนวนจริงเป็นสับเซตของจำนวนเชิงซ้อน นั่นคือ $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- ระบบจำนวนเชิงซ้อนมีสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวน แต่ไม่มีการเปรียบเทียบจำนวนเชิงซ้อนใดมากกว่าหรือน้อยกว่า
- ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $b = 0$ จะได้ว่า z เป็นจำนวนจริง

ถ้า $a = 0$ แต่ $b \neq 0$ จะได้ว่า z เป็นจำนวนจินตภาพแท้

- การหาค่า i^n

$$\begin{array}{ll} i^n = 1 & \text{เมื่อ } n \div 4 \text{ เหลือเศษ } 0 \\ i^n = i & \text{เมื่อ } n \div 4 \text{ เหลือเศษ } 1 \\ i^n = -1 & \text{เมื่อ } n \div 4 \text{ เหลือเศษ } 2 \\ i^n = -i & \text{เมื่อ } n \div 4 \text{ เหลือเศษ } 3 \end{array}$$

สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

- การเท่ากัน $a + bi = c + di$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$
- การบวก $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- การคูณ $k(a + bi) = ka + kbi$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว
 $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

- สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

- กำหนด z, z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ $z = a + bi$

สมบัติ	การบวก	การคูณ
ปิด	$z_1 + z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน	$z_1 z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน
การสลับที่	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	$z_1 z_2 = z_2 z_1$
การเปลี่ยนหมู่	$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$	$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
การมีเอกลักษณ์	มีจำนวนเชิงซ้อน 0 ซึ่งทำให้ $0 + z = z + 0 = z$	มีจำนวนเชิงซ้อน 1 ซึ่งทำให้ $1 \cdot z = z \cdot 1 = z$
การมีตัวผกผัน	มีจำนวนเชิงซ้อน $-z$ ซึ่งทำให้ $z + (-z) = (-z) + z = 0$ โดยที่ $-z = -a - bi$	มีจำนวนเชิงซ้อน z^{-1} ซึ่งทำให้ $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$ โดยที่ $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$
การแจกแจง	$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ $(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$	

- การลบจำนวนเชิงซ้อน

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

- การหารจำนวนเชิงซ้อน

$$\frac{a + bi}{c + di} = (a + bi) \left(\frac{c - di}{c^2 + d^2} \right) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)i$$

- สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

- สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน คือ $\bar{z} = a - bi$
- สมบัติของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน

- $\overline{\bar{z}} = z$
- $z\bar{z} = a^2 + b^2$
- $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
- $\text{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ เมื่อ $z_2 \neq 0$
- $\frac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z} \right)}$ เมื่อ $z \neq 0$

กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

- ระนาบเชิงซ้อนประกอบด้วย 2 แกน คือ แกนนอน เรียกว่า แกนจริง และแกนตั้ง เรียกว่า แกนจินตภาพ
- ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน คือ $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ เมื่อ $z = a + bi$
- สมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน กำหนด z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน

- $|z|^2 = z\bar{z}$
- $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- $|zw| = |z||w|$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$
- $|z - w| \geq |z| - |w|$
- $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ เมื่อ $w \neq 0$
- $|z|^{-1} = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ เมื่อ $z \neq 0$
- $|z^n| = |z|^n$ เมื่อ $z \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็ม
- $|z| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $z = 0$

- การใช้กราฟแสดงคำตอบของสมการหรือสมการค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

- เปลี่ยน z ให้อยู่ในรูป $x + yi$
- จัดรูปสมการใหม่ เพื่อพิจารณาว่ากราฟค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนเป็นกราฟชนิดใด

รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน

- กำหนด $z = a + bi$ และ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

รากที่สองของ z คือ

$$\pm \left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} + \sqrt{\frac{r-a}{2}}i \right) \text{ เมื่อ } b \geq 0$$

$$\pm \left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} - \sqrt{\frac{r-a}{2}}i \right) \text{ เมื่อ } b < 0$$

- คำตอบของสมการพหุนามกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ $a, b, c \in \mathbf{R}$ และ $a \neq 0$ คือ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ เมื่อ } b^2 - 4ac \geq 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}i}{2a} \text{ เมื่อ } b^2 - 4ac < 0$$

จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว คือ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ หรือ $z = r \operatorname{cis} \theta$

เรียกมุม θ ว่า อาร์กิวเมนต์ (argument) ของ z ใช้สัญลักษณ์ $\operatorname{Arg}(z)$

- ทฤษฎีบทของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว กำหนด $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2} (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \text{ เมื่อ } z_2 \neq 0$$

$$\bar{z}_1 = r_1 [\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1)]$$

- $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2)$$

- ทฤษฎีบทของเดอมัวร์ กำหนด $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เมื่อ $z \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

- ถ้า $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ และ $z \neq 0$ แล้ว

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right]$$

$$\text{เมื่อ } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

- รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนใดๆ จะมี n ราก (คำตอบ)
- ถ้า $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ เป็นรากที่ n ของ z แล้ว $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \dots = |z_n|$
- ถ้า $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ เป็นรากที่ n ของ z แล้ว $z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n = 0$

สมการพหุนาม

- เขียนอยู่ในรูป $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง และ $a_n \neq 0$

- ถ้า $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรีมากกว่าหรือเท่ากับ 1 จะได้ว่า

- ถ้า $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรี n แล้ว $p(x) = 0$ จะมีคำตอบทั้งหมด n คำตอบ

- พหุนาม $p(x)$ มี $x - c$ เป็นตัวประกอบ ก็ต่อเมื่อ $p(c) = 0$

- ถ้า z เป็นคำตอบของสมการ $p(x) = 0$ และลิมิตของทุกพจน์เป็นจำนวนจริง แล้วสังยุคของ z จะเป็นคำตอบของสมการด้วย

- ผลบวกของคำตอบของสมการทั้งหมดเท่ากับ $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$

- ผลคูณของคำตอบของสมการทั้งหมดเท่ากับ $\begin{cases} \frac{a_0}{a_n} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ -\frac{a_0}{a_n} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$



แบบฝึกทักษะ

ประจำหน่วยการเรียนรู้ที่

1

คำชี้แจง : ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. กำหนด $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = -1 - 4i$, $z_3 = -5 + i$ ให้หาค่าของ

- | | |
|------------------------|---------------------|
| 1) $z_1 + z_2$ | 2) $z_2 - z_3$ |
| 3) $3z_1 - 4z_2 + z_3$ | 4) $z_1 z_2$ |
| 5) $z_1 z_3$ | 6) $z_1(z_2 + z_3)$ |

2. ให้หาตัวผกผันการบวกและตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

- | | |
|-----------------------|-------------------------|
| 1) $z = -5i$ | 2) $z = 3 - i$ |
| 3) $z = \sqrt{2} + i$ | 4) $z = -1 - \sqrt{3}i$ |

3. ให้หาค่าของ

- | | |
|--|--|
| 1) $i^{1023} + i^{1024} + i^{1025} + i^{1026}$ | 2) $i^{1023} \cdot i^{1024} \cdot i^{1025} \cdot i^{1026}$ |
|--|--|

4. กำหนด $a^2 + b^2 - 2abi - 1 + i = 0$ ให้หาค่า a และ b

5. ให้หาค่าของ

- | | |
|--|---|
| 1) $\frac{1 - 2i}{3 + 4i}$ | 2) $\frac{1 - i}{1 + i} + \frac{3 + 4i}{1 - i}$ |
| 3) $\frac{-7 + 3i}{6 + 8i} - \frac{5 + i}{2i}$ | 4) $\left(\frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} - \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} \right)^2$ |

6. กำหนด $z_1 = 8 + 3i$ และ $z_2 = 4 - i$ ให้หาค่าของ

- | | |
|---|-------------------------------|
| 1) $\overline{z_2 + z_1}$ | 2) $\overline{z_2 - z_1}$ |
| 3) $\overline{z_1 z_2}$ | 4) $\frac{1}{\overline{z_1}}$ |
| 5) $\left(\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \right)$ | 6) $(\overline{z_1}^2)$ |

7. ให้หาค่าของ

- | | |
|------------------------------|-----------------------|
| 1) $ 3 - 4i $ | 2) $ \sqrt{3}i $ |
| 3) $ \sqrt{5} + \sqrt{11}i $ | 4) $ -3 - \sqrt{2}i $ |
| 5) $ (0, -2) $ | 6) $ (-6, 8) $ |

8. ให้หาค่าของ $|z|$ ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

- | | |
|---|--|
| 1) $z = (1 - i)^4$ | 2) $z = \frac{(\sqrt{3} - i)^6}{(1 + i)^8}$ |
| 3) $z = \frac{-5i(3 - 4i)^5}{(2 + i)^{10}}$ | 4) $z = \frac{(\sqrt{5} - 2i)^3(1 + \sqrt{3}i)^4}{(5 + 2i)^3}$ |

9. ให้เขียนกราฟของสมการและอสมการต่อไปนี้

- | | |
|-----------------------|---------------------------|
| 1) $ z + i = 3$ | 2) $ z + 3 - 2i \leq 1$ |
| 3) $ z - 4 + 2i > 2$ | 4) $\text{Re}(z) \geq -3$ |

10. ให้เขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูปเชิงขั้ว

- | | |
|-----------------|-------------------------|
| 1) $z = 2 - 2i$ | 2) $z = -1 + \sqrt{3}i$ |
| 3) $z = -5i$ | 4) $z = (3, 0)$ |

11. กำหนด $z_1 = -2(\cos 27^\circ + i \sin 27^\circ)$, $z_2 = 4(\cos 63^\circ + i \sin 63^\circ)$ และ

$z_3 = 5(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ ให้หาค่าของ $z_1 z_2 z_3$ และ $\frac{z_1 z_2}{z_3}$ ในรูป $a + bi$

12. กำหนด z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ $2z_1 \overline{z_2} = 1 - \sqrt{3} \overline{z_2}$ และ

$z_1 = \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)^{15}$ ให้หาตัวผกผันการคูณของ z_2

13. ให้หาค่าของ

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 1) รากที่ 2 ของ $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ | 2) รากที่ 2 ของ $-6 - 6\sqrt{3}i$ |
| 3) รากที่ 2 ของ $2\sqrt{3} + 2i$ | 4) รากที่ 2 ของ $-1 + \sqrt{3}i$ |
| 5) รากที่ 2 ของ $8i$ | 6) รากที่ 3 ของ $27i$ |
| 7) รากที่ 4 ของ $-8 + 8\sqrt{3}i$ | 8) รากที่ 4 ของ $-16 - 16\sqrt{3}i$ |

14. ให้หาคำตอบของสมการต่อไปนี้

- | | |
|------------------------------|--|
| 1) $x^2 + 25 = 0$ | 2) $2x^2 - 4x + 7 = 0$ |
| 3) $2x^2 + ix + 1 = 0$ | 4) $2ix^2 - 3x - 3i = 0$ |
| 5) $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$ | 6) $x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 24x - 16 = 0$ |

15. กำหนด $2 - 2i$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $x^4 - 4x^3 + x^2 + 28x - 56 = 0$

ให้หาเซตคำตอบของสมการ

16. ให้ z_1, z_2, z_3, z_4 เป็นคำตอบของสมการ $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 24x - 24 = 0$

ให้หาค่าของ $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$