

คำอธิบายรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

เวลา 100 ชั่วโมง จำนวน 2.5 หน่วยกิต

ศึกษาความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน การบวก การลบ การคูณ การหารฟังก์ชัน ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม สมการเอกซ์โพเนนเชียลและสมการลอการิทึม ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ และภาคตัดกรวย

โดยจัดการเรียนการสอนให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหา ให้เหตุผล สื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ มีความคิดสร้างสรรค์ นำความรู้ที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน ควบคู่ไปกับคุณธรรม และจริยธรรม และมีคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ได้แก่ การทำงานอย่างมีระบบ มีระเบียบ มีความรอบคอบ มีความรับผิดชอบ พร้อมทั้งตระหนักในคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

ผลการเรียนรู้

- หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ การหารฟังก์ชัน หาฟังก์ชันประกอบและฟังก์ชันผกผัน
- ใช้สมบัติของฟังก์ชันในการแก้ปัญหา
- เข้าใจลักษณะกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- แก้สมการเอกซ์โพเนนเชียลและสมการลอการิทึม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ในการแก้ปัญหา

รวมทั้งหมด 5 ผลการเรียนรู้

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ผู้เรียบเรียง

ผศ. ดร.สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย

ผู้ตรวจ

รศ.นงนุช สุขวารี

ผศ. ดร.สุชัย ตันยอชัยวัฒน์

ยุพดี มงคลจินดาวงศ์

บรรณาธิการ

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2

ตามผลการเรียนรู้
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ผู้เรียบเรียง	ผศ. ดร.สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย
ผู้ตรวจ	รศ. นงนุช สุขวารี ผศ. ดร.สุชัย ตันยอชฌาวฒ ยุพดี มงคลจินดาวงศ์
บรรณาธิการ	ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ
สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย.
หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
เล่ม 2.--กรุงเทพฯ : แม็คเอดูเคชั่น, 2566.
180 หน้า.

1. คณิตศาสตร์--การศึกษาและการสอน (มัธยมศึกษา). I. ชื่อเรื่อง.
510.7
ISBN 978-616-345-266-5

พิมพ์ครั้งที่ 1
จำนวน 8,000 เล่ม
สงวนลิขสิทธิ์ : ธันวาคม 2566
สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย ห้ามลอกเลียน ไม่ว่าจะเป็นส่วนหนึ่งส่วนใด
ของหนังสือเล่มนี้ นอกจากจะได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษร

จัดทำโดย

 IMAC EDUCATION

ส่งชานดิสังจ่าย ไปรษณีย์ลาดพร้าว
ในนาม บริษัท แม็คเอดูเคชั่น จำกัด
9/99 อาคารแม็ค ซอยลาดพร้าว 38 ถนนลาดพร้าว
แขวงจันทระเกษม เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900
โทร. 0-2512-0661, 0-2938-2022-7 แฟกซ์ 0-2938-2028
www.MACeducation.com

พิมพ์ที่ : บริษัท 8 ศรี พรินต์ติ้ง จำกัด

คำชี้แจง

ตามที่กระทรวงศึกษาธิการโดยสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานได้ดำเนินการ
ทบทวนหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 โดยในระยะแรกให้ปรับปรุงมาตรฐาน
การเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี และสาระภูมิศาสตร์
ในกลุ่มสาระการเรียนรู้สังคมศึกษา ศาสนา และวัฒนธรรม สำหรับใช้ในปีการศึกษา 2561 ในชั้น
ประถมศึกษาปีที่ 1 และ 4 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 4 ปีการศึกษา 2562 ให้ใช้ในชั้นประถมศึกษา
ปีที่ 1, 2, 4 และ 5 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1, 2, 4 และ 5 และตั้งแต่ปีการศึกษา 2563 เป็นต้นไปให้ใช้
ในทุกชั้นเรียน ซึ่งการปรับหลักสูตรครั้งนี้มีเป้าหมายสำคัญเพื่อให้โรงเรียนสามารถจัดการกระบวนการเรียนรู้
ที่จะช่วยให้ผู้เรียนมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างรอบคอบ
สามารถใช้เทคโนโลยีที่เหมาะสมในการบูรณาการกับความรู้ทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์
เพื่อแก้ปัญหาหรือพัฒนากระบวนการออกแบบเชิงวิศวกรรมที่นำไปสู่การคิดค้นสิ่งประดิษฐ์หรือ
สร้างสรรค์นวัตกรรม นอกจากนี้ยังให้เกิดการเรียนรู้เรื่องภูมิศาสตร์ (Geo-literacy) ทั้งด้านความสามารถ
ทางภูมิศาสตร์ กระบวนการทางภูมิศาสตร์ และทักษะทางภูมิศาสตร์ เพื่อให้มีความรู้ความเข้าใจได้อย่าง
ถูกต้องและนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในการดำเนินชีวิต

ด้วยตระหนักถึงความสำคัญของการปรับเปลี่ยนข้างต้น บริษัท แม็คเอดูเคชั่น จำกัด จึงได้
มอบหมายให้ผู้เชี่ยวชาญด้านหลักสูตร ด้านการพัฒนาสื่อการเรียนรู้ และด้านการวัดและประเมินผล
ได้ปรับปรุงพัฒนาหนังสือเรียนให้สอดคล้องกับมาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัดของหลักสูตรในกลุ่มสาระ
การเรียนรู้ที่มีการเปลี่ยนแปลง และให้สอดคล้องกับการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์ที่กำหนดไว้ในแผนพัฒนา
เศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ ฉบับที่ 12 แผนการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2560-2579 และยุทธศาสตร์ชาติ
20 ปี

โดยหนังสือเรียนแต่ละหน่วยการเรียนรู้จะให้ผู้ใช้หนังสือเรียนได้ทราบเป้าหมายการเรียนรู้
ในตอนต้นหน่วยการเรียนรู้ จากสาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ และทุกหัวข้อหลักจะนำเสนอแนวคิด
สำคัญเพื่อให้ทราบถึงสิ่งที่เป็นความรู้ ความคิดที่เป็นแก่นสำคัญที่ต้องเรียนรู้ให้ลึกซึ้ง และการเรียนรู้ที่ดี
ผู้เรียนควรได้ตรวจสอบความรู้ความเข้าใจเป็นระยะๆ ก่อนเรียนเรื่องใหม่ ดังนั้น ในหนังสือเรียนจะมีการ
สอดแทรกกิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้ที่สัมพันธ์กับเรื่องที่ได้เรียนผ่านมา เพื่อให้ผู้เรียนได้ตรวจสอบ

ตนเอง หรือบางหัวข้ออาจเป็นการฝึกทักษะให้ชำนาญก่อน สิ่งที่เพิ่มเติมในหนังสือเรียนเล่มนี้ คือ กิจกรรมบูรณาการวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี วิศวกรรมศาสตร์ และคณิตศาสตร์ (STEM) ตามเป้าหมาย สำคัญของการปรับหลักสูตรครั้งนี้ ซึ่งผู้เรียนและผู้สอนสามารถนำไปประยุกต์หรือดัดแปลงให้เหมาะสม กับบริบทของโรงเรียนและผู้เรียน การศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมโดยใช้เทคโนโลยีการสื่อสารและสารสนเทศ (ICT) เป็นสิ่งจำเป็นที่ต้องค้นคว้าเพิ่มเติม ดังนั้นในหนังสือเรียนเล่มนี้จึงได้มีการเสริมเนื้อหาเพิ่มเติมที่ได้ ผ่านการคัดกรองมาแล้วว่าเหมาะสมกับการเรียนรู้ แทรกไว้ในเนื้อหาบางหน่วย โดยใช้สัญลักษณ์ 

ผู้เรียนสามารถใช้สมาร์ทโฟนสแกน QR Code หรือเปิดเว็บไซต์ MACeducation.com เพื่อเข้าเมนู การศึกษาขั้นพื้นฐาน >>> MAC iLink และเลือกเปิดดูส่วนเสริมของบทเรียนในหนังสือแต่ละเล่มได้ ท้ายหน่วยการเรียนรู้ทุกหน่วยจะมีการสรุปบทเรียนสำหรับผู้เรียนได้ใช้เป็นข้อมูลสำคัญในการตรวจสอบ องค์ความรู้ที่ควรได้รับการพัฒนาหลังจากเสร็จสิ้นการเรียนรู้ หรือเป็นสาระสำคัญที่ควรจดจำและทำความเข้าใจให้ถ่องแท้ ซึ่งนับว่าเป็นส่วนสำคัญอีกส่วนหนึ่งในการปรับปรุงหนังสือเรียนครั้งนี้ที่ได้พัฒนาให้ ชัดเจนยิ่งขึ้น

บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเรียนเล่มนี้จะมีคุณค่า มีประโยชน์ และช่วยส่งเสริมการปฏิรูปการศึกษา เพื่อเป็นรากฐานสำคัญที่จะช่วยทำให้ประเทศไทยก้าวสู่ประเทศที่มี การพัฒนาอย่างยั่งยืน ด้วยการมีพลเมืองที่มีคุณภาพ มีความคิดสร้างสรรค์ ตามเจตนารมณ์ของ การปรับปรุงหลักสูตรครั้งนี้และนโยบายประเทศไทย 4.0

บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด

คำนำ

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ได้เรียบเรียงขึ้นใหม่ตาม ผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษา ขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กิจกรรมการเรียนการสอนในหนังสือเล่มนี้ได้บูรณาการสาระต่าง ๆ เข้าด้วยกันไว้ในหน่วยการเรียนรู้ซึ่งสอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ในหลักสูตร

วัตถุประสงค์ของการเขียนหนังสือเล่มนี้ เพื่อให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามผลการเรียนรู้เน้นการเชื่อมโยงความรู้กับกระบวนการทักษะการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 ฝึกทักษะ ตามสาระเพื่อวัดผลประเมินผลตนเอง มีกิจกรรมส่งเสริมให้เกิดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ การนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ ให้เกิดความคิดริเริ่ม สร้างสรรค์และมีความเชื่อมั่นในตนเอง และมีส่วนร่วมในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตลอดจนการวัดและ ประเมินผลการเรียนรู้ของผู้เรียน

หนังสือเรียนเล่มนี้ประกอบด้วย 3 หน่วยการเรียนรู้ แต่ละหน่วยการเรียนรู้ได้สรุปผังมโนทัศน์ ของเนื้อหา ระบุผลการเรียนรู้ มีภาพและคำถามเข้าสู่บทเรียน แนวคิดหลักของหน่วยการเรียนรู้ แนวคิด สำคัญของแต่ละเรื่อง กิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้ กิจกรรมสะเต็มศึกษา บทสรุปเนื้อหาและแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์เพื่อเป็นการวัดและประเมินผลการเรียนรู้ของผู้เรียน

ท้ายนี้ต้องขอขอบคุณเป็นอย่างสูงที่ท่านได้เลือกใช้หนังสือเรียนเล่มนี้เป็นสื่อการเรียนรู้ ผู้เรียบเรียง หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเรียนเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อครู นักเรียน และผู้สนใจโดยส่งผลต่อการพัฒนา ทั้งด้านความรู้ ทักษะ ค่านิยมและคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ตามเจตนารมณ์ที่กำหนดไว้ในหลักสูตร

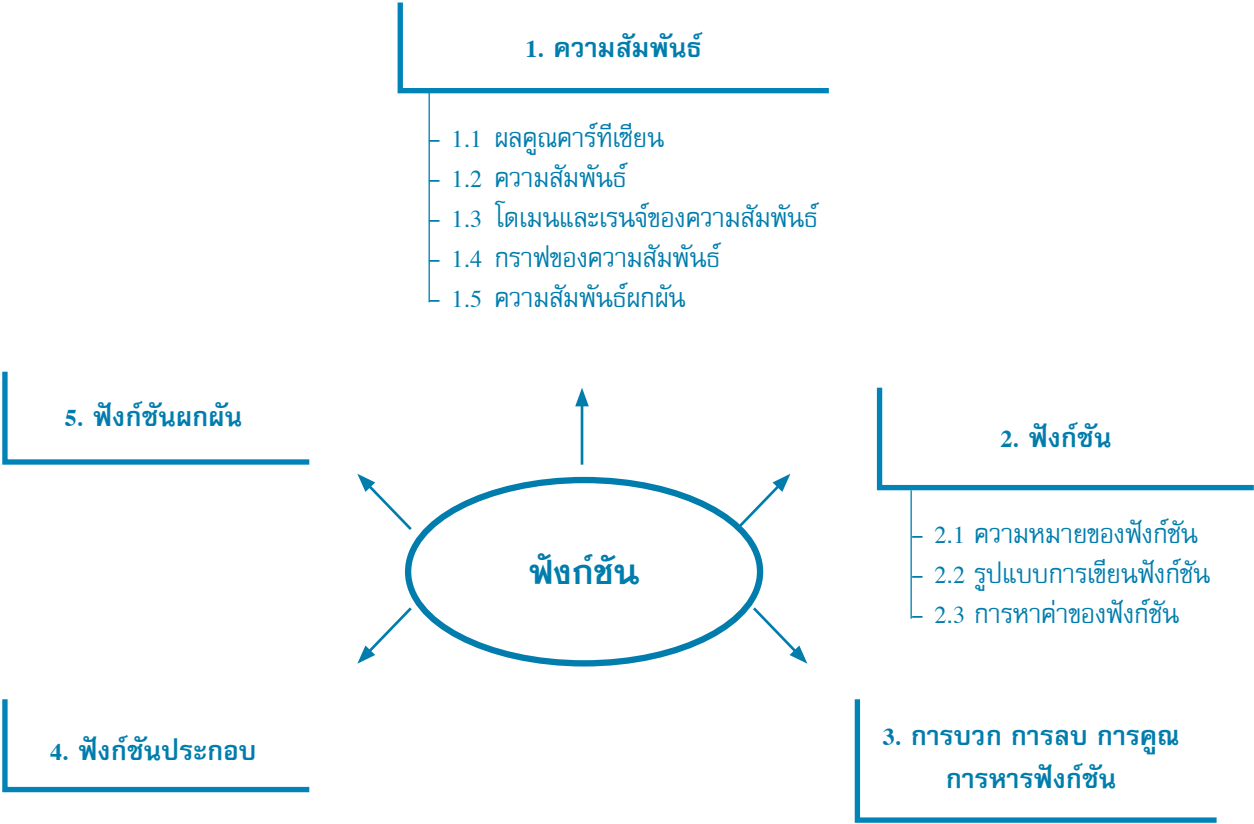
ผศ. ดร.สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย

สารบัญ

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชัน	1
1. ความสัมพันธ์	2
2. ฟังก์ชัน	25
3. การบวก การลบ การคูณ การหารฟังก์ชัน	42
4. ฟังก์ชันประกอบ	46
5. ฟังก์ชันผกผัน	50
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	57
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	60
1. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	61
2. ฟังก์ชันลอการิทึม	71
3. สมการเอกซ์โพเนนเชียลและสมการลอการิทึม	82
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	91

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรขาคณิตวิเคราะห์	92
1. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์	93
2. ภาคตัดกรวย	120
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	166
บรรณานุกรม	168
ภาคผนวก	169
อภิธานศัพท์	171

ฟังก์ชัน



ผลการเรียนรู้

- 1. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ การหารฟังก์ชัน หาฟังก์ชันประกอบและฟังก์ชันผกผัน
- 2. ใช้สมบัติของฟังก์ชันในการแก้ปัญหา

มีเพียงบางความสัมพันธ์
เท่านั้นที่เป็นฟังก์ชัน

นักเรียนจะมีวิธีตรวจสอบ
อย่างไรว่าความสัมพันธ์นั้น
เป็นฟังก์ชันหรือไม่



แนวคิดหลัก

ในชีวิตประจำวันจะพบกับความสัมพันธ์อยู่ตลอดเวลา ซึ่งอาจเป็นความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งสองสิ่ง เช่น การเป็นพ่อ กับลูก การเรียนอยู่ห้องเดียวกัน บุคคลกับเลขประจำตัวประชาชน จากตัวอย่างข้างต้นจะพบว่าความสัมพันธ์คือการจับคู่ระหว่างสิ่งแรกกับสิ่งที่สอง บางความสัมพันธ์เป็นการจับคู่ระหว่างสิ่งแรกตัวเดียวกับสิ่งที่สองหลายตัว หรือการจับคู่ระหว่างสิ่งแรกหลายตัวกับสิ่งที่สองเพียงตัวเดียว แต่บางความสัมพันธ์เป็นการจับคู่ระหว่างสิ่งแรกเพียงตัวเดียวกับสิ่งที่สองเพียงตัวเดียว ในทางคณิตศาสตร์จะเรียกความสัมพันธ์สองแบบหลังนี้ว่า ฟังก์ชัน แนวคิดที่สำคัญของฟังก์ชัน คือ เป็นกฎหรือโปรแกรมที่กำหนดขึ้นเพื่อให้ได้ผลลัพธ์จากสิ่งที่นำเข้า

1. ความสัมพันธ์

1.1 ผลคูณคาร์ทีเซียน



แนวคิดสำคัญ

คู่อันดับเป็นการจับคู่ของสองสิ่งโดยถือลำดับเป็นสำคัญ ถ้ามีเซต 2 เซต คือเซต A และเซต B แล้วเซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมดโดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B เรียกว่า ผลคูณคาร์ทีเซียน โดยสมาชิกตัวหน้าทั้งหมดเรียกว่า โดเมน และสมาชิกตัวหลังทั้งหมดเรียกว่า เรนจ์ เนื่องจากสามารถใช้คู่อันดับแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังได้ จึงกล่าวได้ว่า ความสัมพันธ์คือเซตของคู่อันดับและเป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียนระหว่างเซตสองเซต

การจับคู่ระหว่างสิ่งสองสิ่งที่มีความสัมพันธ์กัน และเขียนแสดงสิ่งที่มีความสัมพันธ์กันในวงเล็บโดยมีเครื่องหมายจุลภาค (,) คั่นสิ่งเหล่านี้ สิ่งที่ได้เหล่านี้เรียกว่า **คู่อันดับ**

คู่อันดับจะประกอบด้วยสมาชิก 2 ตัว คือสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลัง โดยที่สมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลังสลับที่กันไม่ได้ เพราะการสลับที่ของสมาชิกอาจจะทำให้ความหมายไม่เหมือนกัน เช่น (a, b) คือ คู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเป็น a และสมาชิกตัวหลังเป็น b แต่ (b, a) คือ คู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเป็น b และสมาชิกตัวหลังเป็น a ดังนั้น คู่อันดับ $(1, 2)$ กับคู่อันดับ $(2, 1)$ จึงมีความหมายไม่เหมือนกัน

บทนิยาม คู่อันดับ $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

จะเห็นได้ว่า $(a, b) \neq (b, a)$ ยกเว้น $a = b$ เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่า x และ y ที่ทำให้ $(x, 2) = (5, y)$

วิธีทำ จากบทนิยามของการเท่ากันของคู่อันดับ จะได้ว่า

$$(x, 2) = (5, y) \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = 5 \text{ และ } 2 = y$$

$$\text{ดังนั้น } x = 5, y = 2$$

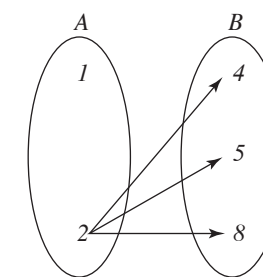
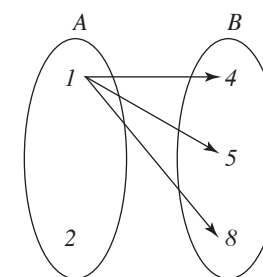
ตอบ

บทนิยาม ถ้าเซต A และเซต B เป็นเซตใดๆ ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B หมายถึง เซตของคู่อันดับทั้งหมดที่สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับเป็นสมาชิกของเซต A และสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับเป็นสมาชิกของเซต B ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย $A \times B$ นั่นคือ $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ และ } y \in B\}$

ทฤษฎีบท $A = \phi$ หรือ $B = \phi$ ก็ต่อเมื่อ $A \times B = \phi$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $A \times B$ เมื่อกำหนด $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{4, 5, 8\}$

วิธีทำ เขียนแผนภาพแสดงการจับคู่จากสมาชิกของเซต A ไปยังสมาชิกของเซต B โดยแยกเป็นกลุ่มได้ 2 กลุ่ม คือ



คู่อันดับกลุ่มที่ 1 ได้แก่ $(1, 4), (1, 5), (1, 8)$ คู่อันดับกลุ่มที่ 2 ได้แก่ $(2, 4), (2, 5), (2, 8)$

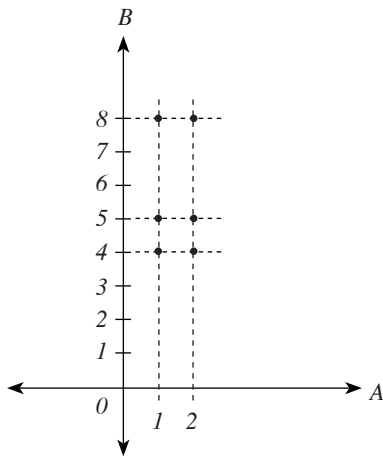
$$\text{ดังนั้น } A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (1, 8), (2, 4), (2, 5), (2, 8)\}$$

นอกจากนี้ยังสามารถแสดงสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times B$ ในรูปตารางได้ดังนี้

	A	B		
		4	5	8
1		(1, 4)	(1, 5)	(1, 8)
2		(2, 4)	(2, 5)	(2, 8)

จะได้ว่า $A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (1, 8), (2, 4), (2, 5), (2, 8)\}$

เนื่องจาก $A \times B$ เป็นเซตของคู่อันดับ ดังนั้นสามารถแสดงจำนวนสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times B$ ด้วยจุดบนระนาบ ดังนี้



จะได้ว่า $A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (1, 8), (2, 4), (2, 5), (2, 8)\}$

ตอบ

- ข้อสังเกต**
- $B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2), (8, 1), (8, 2)\}$
 - เซต A มีสมาชิก 2 ตัว ทำให้มีกลุ่มของคู่อันดับ 2 กลุ่ม
เซต B มีสมาชิก 3 ตัว ทำให้แต่ละกลุ่มมีคู่อันดับ 3 คู่อันดับ
จึงได้ว่า จำนวนสมาชิกในเซต $A \times B$ มี $2 \times 3 = 6$ คู่อันดับ
จำนวนสมาชิกในเซต $B \times A$ มี $3 \times 2 = 6$ คู่อันดับ
แต่เซต $A \times B \neq B \times A$ เนื่องจาก $(1, 4) \in A \times B$ แต่ $(1, 4) \notin B \times A$
 - ในกรณีทั่วไป ถ้าเซต A มีสมาชิกจำนวน m ตัว และเซต B มีสมาชิก n ตัว จะได้ว่า
จำนวนสมาชิกของเซต $A \times B$ มี $m \times n$ คู่อันดับ จึงเป็นหนึ่งเหตุผลที่ใช้เครื่องหมายคูณ
เป็นสัญลักษณ์แทนผลคูณคาร์ทีเซียน แต่พึงระวังว่ากรณีนี้จะจริงเมื่อเซต A และ
เซต B เป็นเซตจำกัดเท่านั้น
 - สำหรับเซต A และเซต B ใดๆ ที่ไม่เป็นเซตว่าง จะได้ว่า
“ถ้า $A \neq B$ แล้ว $A \times B \neq B \times A$ ”

สมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน

ให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ

- $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$ หรือ $A = \phi$ หรือ $B = \phi$
- $A \times \phi = \phi = \phi \times A$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
 $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
- $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
 $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$
- ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \times C \subset B \times C$
- ถ้า A เป็นเซตอนันต์ และ B เป็นเซตจำกัด ซึ่ง $B \neq \phi$ แล้ว $A \times B$ เป็นเซตอนันต์

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{3, 7\}$ และ $C = \{\phi\}$ จงหา

- $A \times (B \cup C)$
- $(A \times B) \cup (A \times C)$

วิธีทำ

- $B \cup C = \{\phi, 3, 7\}$
 $A \times (B \cup C) = \{(-1, \phi), (-1, 3), (-1, 7), (0, \phi), (0, 3), (0, 7), (1, \phi), (1, 3), (1, 7)\}$

ตอบ

- $A \times B = \{(-1, 3), (-1, 7), (0, 3), (0, 7), (1, 3), (1, 7)\}$
 $A \times C = \{(-1, \phi), (0, \phi), (1, \phi)\}$
 $(A \times B) \cup (A \times C) = \{(-1, \phi), (-1, 3), (-1, 7), (0, \phi), (0, 3), (0, 7), (1, \phi), (1, 3), (1, 7)\}$

ตอบ

1.2 ความสัมพันธ์

ในวิชาคณิตศาสตร์ ความสัมพันธ์เป็นความเกี่ยวข้องกันของสิ่งสองสิ่งภายใต้กฎเกณฑ์บางอย่างใด
อย่างหนึ่ง และสามารถเขียนสิ่งที่สัมพันธ์กันในรูปของคู่อันดับได้

จากเซต $A \times B$ บางครั้งต้องการคู่อันดับในเซต $A \times B$ ซึ่งคู่อันดับที่สนใจนี้จะจับคู่กันตามเงื่อนไขหรือความสัมพันธ์ที่เรากำหนดขึ้น เช่น

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 5, 7\}$$

จะได้จำนวนสมาชิกของเซต $A \times B$ ทั้งหมด 12 คู่อันดับ

ถ้าให้ r เป็นเซตของคู่อันดับที่สนใจโดยกำหนด $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$ จะได้ว่า $r = \{(2, 2), (3, 3)\}$ ในกรณีเช่นนี้จะเรียกเซต r ว่า ความสัมพันธ์จาก A ไป B

นอกจากนี้ยังอาจกำหนดเงื่อนไขหรือความสัมพันธ์ในลักษณะอื่นได้อีกมากมาย แต่ไม่ว่าจะกำหนดอย่างไรก็จะได้เซตของคู่อันดับที่เรียกว่า ความสัมพันธ์จาก A ไป B เป็นสับเซตของเซต $A \times B$ เสมอ ดังนั้น จึงเขียนบทนิยามของความสัมพันธ์จาก A ไป B ได้ดังนี้

บทนิยาม เรียก r ว่าเป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times B$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ และ $r = \{(a, b) \in A \times B \mid b = 2a\}$ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B จงเขียนเซต r แบบแจกแจงสมาชิก

วิธีทำ กำหนดให้ $(a, b) \in A \times B$ จึงได้ว่า

$$a \in A \text{ และ } b \in B \text{ โดยที่ } b = 2a$$

$$\text{เมื่อ } a = 1 \text{ จะได้ } b = 2(1) = 2$$

$$a = 2 \text{ จะได้ } b = 2(2) = 4$$

$$a = 3 \text{ จะได้ } b = 2(3) = 6$$

$$\text{ดังนั้น } r = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$$

ตอบ

ข้อดก

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A จะเรียก r ว่าเป็นความสัมพันธ์ในเซต A

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก R ไป R จะเรียก r ว่าเป็นความสัมพันธ์ในเซต R

และเมื่อกล่าวถึงความสัมพันธ์ในเซต R อาจละไว้ในฐานที่เข้าใจว่า r เป็นความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริงได้ เช่น $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2\}$ อาจเขียนแทนด้วย $r = \{(x, y) \mid y = x^2\}$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2x - 1\}$ เป็นความสัมพันธ์ในเซต A จงเขียนเซต r แบบแจกแจงสมาชิก

วิธีทำ จากเซต r จะได้ว่า $(x, y) \in A \times A$ โดยที่ $y = 2x - 1$

เนื่องจาก $y = 2x - 1$ โดยที่ $x \in A$ และ $y \in A$

$$\text{เมื่อ } x = 1 \text{ จะได้ } y = 2(1) - 1 = 1 \text{ โดยที่ } 1 \in A$$

$$\text{ดังนั้น } (1, 1) \in r$$

$$\text{เมื่อ } x = 2 \text{ จะได้ } y = 2(2) - 1 = 3 \text{ โดยที่ } 2 \in A \text{ และ } 3 \in A$$

$$\text{ดังนั้น } (2, 3) \in r$$

$$\text{เมื่อ } x = 3 \text{ จะได้ } y = 2(3) - 1 = 5 \text{ โดยที่ } 3 \in A \text{ และ } 5 \in A$$

$$\text{ดังนั้น } (3, 5) \in r$$

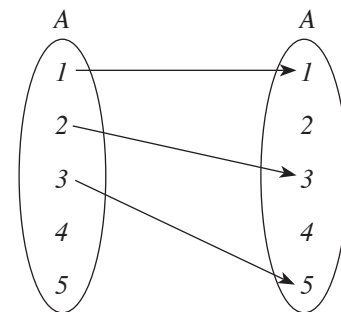
$$\text{เมื่อ } x = 4 \text{ จะได้ } y = 2(4) - 1 = 7 \text{ โดยที่ } 4 \in A \text{ แต่ } 7 \notin A$$

$$\text{ดังนั้น } (4, 7) \notin r$$

$$\text{เมื่อ } x = 5 \text{ จะได้ } y = 2(5) - 1 = 9 \text{ โดยที่ } 5 \in A \text{ แต่ } 9 \notin A$$

$$\text{ดังนั้น } (5, 9) \notin r$$

เขียนแผนภาพแสดงการจับคู่ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดให้ได้ดังนี้



ดังนั้น เขียนเซต r แบบแจกแจงสมาชิกได้เป็น $r = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5)\}$

ตอบ



แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงหาค่าของตัวแปร x และ y

$$(1) (4, x) = (y, -5)$$

$$(2) (x+4, 3y-1) = \left(\frac{1}{2}, 11\right)$$

2. ถ้า $(x-1, 3y) = (8, x)$ แล้ว $x^3 + y^3$ เท่ากับเท่าไร

3. ถ้า $(-2x, 2y-1) = (1+x^2, 2|y|-1)$ แล้ว x และ y มีค่าเท่ากับเท่าไร

4. กำหนดให้ $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{a, b, c\}$ จงหา

$$(1) A \times A$$

$$(2) A \times B$$

$$(3) B \times A$$

$$(4) B \times B$$

5. กำหนดให้ $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ และ $C = \{3, 4, 7\}$ จงหา

$$(1) (A \cap B) \times C$$

$$(2) A \times (B \cap C)$$

$$(3) (A \cup B) \times (B \cap C)$$

6. กำหนดให้ $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, d, e\}$ และ $C = \{a, f\}$ จงหา
- (1) $(C-A) \times B$ (2) $[(B-A) \cup C] \times (A \cap C)$
7. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{2, 4, 6, 8\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก
- (1) ความสัมพันธ์ “เท่ากับ” จาก A ไป B
- (2) ความสัมพันธ์ “มากกว่าหรือเท่ากับ” จาก A ไป B
- (3) ความสัมพันธ์ “รากที่สาม” จาก A ไป B
- (4) ความสัมพันธ์ “ยกกำลังสอง” จาก A ไป B
8. กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x < 4\}$ โดยที่ $\mathbb{Z}$ คือเซตของจำนวนเต็ม r_1, r_2, r_3, r_4 เป็นความสัมพันธ์ใน A จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก
- (1) $r_1 = \{(x, y) \mid x - y = 0\}$ (2) $r_2 = \{(x, y) \mid y = x^2\}$
- (3) $r_3 = \{(x, y) \mid y = 3x\}$ (4) $r_4 = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{x}\}$
9. ถ้า $A = \{0, 1, 2, 3\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x^y = 1\}$ แล้วจำนวนสมาชิกของความสัมพันธ์ r เท่ากับเท่าไร
10. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 3, 5\}$ จงหาจำนวนสมาชิกของความสัมพันธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจาก A ไป $A \cap B$

1.3 โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

ในหัวข้อที่ผ่านมานักเรียนทราบแล้วว่า ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B จะได้ว่า $r \subset A \times B$ นั่นคือ

$$r = \{(x, y) \mid x \in A \text{ และ } y \in B\}$$

จะเห็นว่าความสัมพันธ์ r เป็นเซตที่มีสมาชิกเป็นคู่อันดับ (x, y) ซึ่งสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับคือ x เป็นสมาชิกที่อยู่ในเซต A และสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับคือ y เป็นสมาชิกที่อยู่ในเซต B

ในหัวข้อนี้จะแยกพิจารณาสมาชิกของความสัมพันธ์ r ที่เป็นคู่อันดับดังกล่าว นำมาสร้างเซตขึ้นใหม่อีกสองเซต โดยเซตแรกมีสมาชิกที่เป็นสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับคือ x เรียกเซตนี้ว่า **โดเมนของความสัมพันธ์** และเซตที่สองมีสมาชิกที่เป็นสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับคือ y เรียกเซตนี้ว่า **เรนจ์ของความสัมพันธ์** ดังจะกล่าวในบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B นั่นคือ $r = \{(a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$

โดเมนของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับของความสัมพันธ์ r

เขียนแทนด้วย D_r นั่นคือ $D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$

เรนจ์ของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับของความสัมพันธ์ r

เขียนแทนด้วย R_r นั่นคือ $R_r = \{y \mid (x, y) \in r\}$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 7\}$

$r_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$

$r_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x + 1\}$

- (1) จงเขียน r_1 และ r_2 แบบแจกแจงสมาชิก
- (2) จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r_1 และ r_2

วิธีทำ (1) $r_1 = \{(1, 2), (2, 4)\}$

$$r_2 = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7)\}$$

ตอบ

$$(2) D_{r_1} = \{1, 2\}, R_{r_1} = \{2, 4\}$$

$$D_{r_2} = \{1, 2, 3\}, R_{r_2} = \{3, 5, 7\}$$

ตอบ

วิธีหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

วิธีที่ 1 ถ้าความสัมพันธ์ r เป็นเซตที่เขียนแบบแจกแจงสมาชิกได้ จะหาโดเมนและเรนจ์ได้โดยวิธีแจกแจงสมาชิก

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ $r = \{(a, b) \in A \times B \mid b = 2a + 1\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $(a, b) \in A \times B$ จึงได้ว่า

$$a \in A, b \in B \text{ และ } a \text{ กับ } b \text{ จับคู่กันโดยมีเงื่อนไขว่า } b = 2a + 1$$

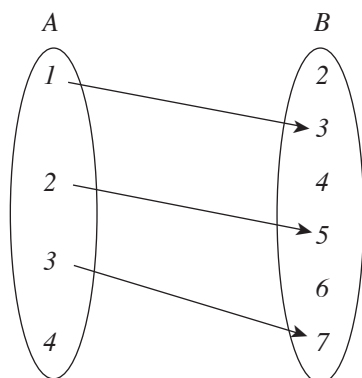
$$\text{เมื่อ } a = 1 \text{ จะได้ } b = 2(1) + 1 = 3 \text{ โดยที่ } 1 \in A \text{ และ } 3 \in B \text{ ดังนั้น } (1, 3) \in r$$

$$\text{เมื่อ } a = 2 \text{ จะได้ } b = 2(2) + 1 = 5 \text{ โดยที่ } 2 \in A \text{ และ } 5 \in B \text{ ดังนั้น } (2, 5) \in r$$

$$\text{เมื่อ } a = 3 \text{ จะได้ } b = 2(3) + 1 = 7 \text{ โดยที่ } 3 \in A \text{ และ } 7 \in B \text{ ดังนั้น } (3, 7) \in r$$

$$\text{เมื่อ } a = 4 \text{ จะได้ } b = 2(4) + 1 = 9 \text{ โดยที่ } 4 \in A \text{ แต่ } 9 \notin B \text{ ดังนั้น } (4, 9) \notin r$$

เขียนแผนภาพแสดงการจับคู่ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดให้ได้ดังนี้



นั่นคือ

$$r = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7)\}$$

ดังนั้น

$$D_r = \{1, 2, 3\}$$

$$R_r = \{3, 5, 7\}$$

ตอบ

วิธีที่ 2 ถ้าความสัมพันธ์ r เป็นเซตที่เขียนบอกเงื่อนไข และ $r \subset R \times R$ จะหาโดเมนและเรนจ์แบบบอกเงื่อนไข ซึ่งทั้งสองเซตเป็นเซตย่อยของจำนวนจริง โดยมีหลักในการหาดังนี้

การหาโดเมนของความสัมพันธ์ r

1. ให้เขียนค่า y อยู่ในเทอมของ x
2. หาค่าของ x ที่ทำให้ y มีค่าเป็นจำนวนจริง จะได้ว่า x ที่หาได้เป็นสมาชิกในเซตของโดเมนของ r หรืออาจหาโดเมนของ r โดยหาจากคอมพลีเมนต์ของเซตแทน นั่นคือ จะหาเซต C ที่เซตของค่า x ทำให้ได้ค่า y ไม่เป็นจำนวนจริง แล้วจึงสรุปว่า $D_r = R - C$

การหาเรนจ์ของความสัมพันธ์ r

1. ให้เขียนค่า x อยู่ในเทอมของ y
2. หาค่าของ y ที่ทำให้ x มีค่าเป็นจำนวนจริง จะได้ว่า y ที่หาได้เป็นสมาชิกในเซตของเรนจ์ของ r หรืออาจหาเรนจ์ของ r โดยหาจากคอมพลีเมนต์ของเซตแทน นั่นคือ จะหาเซต D ที่เซตของค่า y ทำให้ได้ค่า x ไม่เป็นจำนวนจริง แล้วจึงสรุปว่า $R_r = R - D$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid xy - x - 3y = 2\}$

วิธีทำ

หาโดเมน จาก $xy - x - 3y = 2$

จะได้ $xy - 3y = x + 2$

$$(x - 3)y = x + 2$$

$$y = \frac{x+2}{x-3}; x \neq 3$$

จะเห็นว่าไม่มีจำนวนจริง $x = 3$ เพียงค่าเดียวที่ทำให้ $y \notin R$

ดังนั้น $D_r = R - \{3\}$

หาเรนจ์

จาก $xy - x - 3y = 2$

จะได้ $xy - x = 3y + 2$

$$x(y - 1) = 3y + 2$$

$$x = \frac{3y+2}{y-1}; y \neq 1$$

จะเห็นว่าไม่มีจำนวนจริง $y = 1$ เพียงค่าเดียวที่ทำให้ $x \notin R$

ดังนั้น $R_r = R - \{1\}$

ตอบ

การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ r และ $r \subset R \times R$ บางครั้งอาจต้องพิจารณาเงื่อนไขของเซต r ด้วย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 9 จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{4-x}\}$

วิธีทำ ต้องการหาโดเมนของ r โดยหาค่า x ซึ่งทำให้ได้ค่า y ที่เป็นจำนวนจริง

พิจารณาสมการ $y = \sqrt{4-x}$

จะต้องมีเงื่อนไขว่า $4-x \geq 0$

$$x \leq 4$$

ดังนั้น $D_r = (-\infty, 4]$

ต่อไปต้องการหาเรนจ์ของ r โดยหาค่า y ซึ่งทำให้ได้ค่า x ที่อยู่ใน D_r

เนื่องจาก $4-x \geq 0$ และ $y = \sqrt{4-x}$

จะเห็นได้ว่า ทุกๆ ค่าของ x ที่ $x \leq 4$ จะทำให้ $y \geq 0$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ถ้า $x = 4$ จะได้ $y = 0$

ถ้า $x = 3$ จะได้ $y = 1$

ถ้า $x = 2$ จะได้ $y = \sqrt{2}$

ถ้า $x = 1$ จะได้ $y = \sqrt{3}$

⋮

ถ้า x น้อยลงเรื่อยๆ จะทำให้ได้ค่า y เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ดังตาราง

x	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	...
y	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$	...

ดังนั้น $R_r = [0, \infty)$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 10 จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ $r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{|x-2|}{x-2} \right\}$

วิธีทำ ต้องการหาโดเมนของ r โดยหาค่า y ที่เป็นจำนวนจริง

จากสมการ $y = \frac{|x-2|}{x-2}$ พิจารณาแทนค่า x ดังนี้

จากบทนิยามของค่าสัมบูรณ์ $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$

ถ้า $x > 2$ จะได้ว่า $x-2 > 0$ ดังนั้น $y = \frac{|x-2|}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} = 1$

ถ้า $x = 2$ จะได้ว่า $x-2 = 0$ ดังนั้น y หาค่าไม่ได้

ถ้า $x < 2$ จะได้ว่า $x-2 < 0$ ดังนั้น $y = \frac{|x-2|}{x-2} = \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$

ดังนั้น จึงได้ว่า $D_r = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

ต่อไปต้องการหาเรนจ์ของ r โดยหาค่า y ซึ่งทำให้ได้ค่า x ที่อยู่ใน D_r

จากการหาค่า x ข้างบน จะพบว่า y มีสองค่า คือ $y = -1, 1$

ดังนั้น จึงได้ว่า $R_r = \{-1, 1\}$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 11 จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ $r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{3}{x^2 - 4x - 5} \right\}$

วิธีทำ ต้องการหาโดเมนของ r โดยหาค่า x ซึ่งทำให้ได้ค่า y ที่เป็นจำนวนจริง โดยเขียน y ในเทอมของ x

จากสมการ $y = \frac{3}{x^2 - 4x - 5}$ (1)

จะได้ $y = \frac{3}{(x+1)(x-5)}$

จะเห็นว่า มีค่า $x = -1$ กับ $x = 5$ เท่านั้นที่ทำให้ y ไม่เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น จึงได้ว่า $D_r = \mathbb{R} - \{-1, 5\}$

ต่อไปต้องการหาเรนจ์ของ r โดยหาค่า y ซึ่งทำให้ได้ค่า x ที่อยู่ใน D_r โดยการจัด x ในเทอมของ y

จากสมการ (1) จัดรูปใหม่ จะได้

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 5 &= \frac{3}{y} \\ x^2 - 4x - 5 + 9 &= \frac{3}{y} + 9 \quad (\text{นำ 9 บวกทั้ง 2 ข้าง}) \\ x^2 - 4x + 4 &= \frac{3+9y}{y} \\ (x-2)^2 &= \frac{9y+3}{y} \end{aligned} \quad \text{.....(2)}$$

เนื่องจาก $(x-2)^2 \geq 0$

จาก (2) จะได้ $\frac{9y+3}{y} \geq 0$

$$\frac{3y+1}{y} \geq 0$$



ดังนั้น จึงได้ว่า $R_r = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup (0, \infty)$

ตอบ

1.4 กราฟของความสัมพันธ์

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์ที่เป็นสับเซตของ R จะได้ว่า $r \subset R \times R$ นั่นคือ

$$r = \{(x, y) \mid x, y \in R\} \text{ เมื่อ } R \text{ เป็นเซตของจำนวนจริง}$$

ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นว่าเซตของความสัมพันธ์เป็นจุดในระนาบ XY ได้ ซึ่งเรียกว่า กราฟของความสัมพันธ์ เพื่อช่วยในการหาโดเมนและเรนจ์ของ r ดังต่อไปนี้

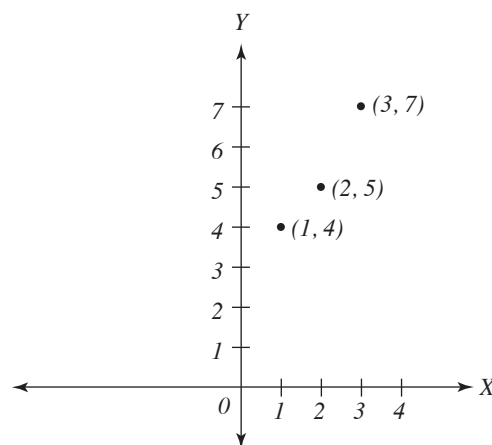
บทนิยาม ถ้า r เป็นความสัมพันธ์ในเซต R แล้ว กราฟของความสัมพันธ์ r คือ เซตของจุดในระนาบ XY ซึ่งแต่ละจุดใช้แทนสมาชิกของ r แต่ละสมาชิก

ตัวอย่างที่ 12 จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

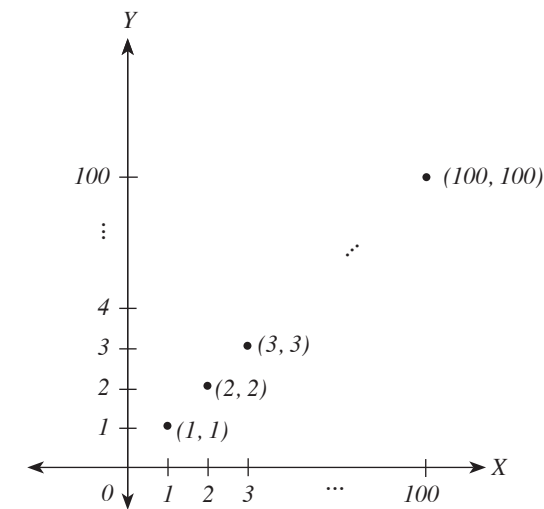
(1) $r_1 = \{(1, 4), (2, 5), (3, 7)\}$

(2) $r_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots, (100, 100)\}$

วิธีทำ (1) กราฟของ r_1 คือจุด 3 จุด ดังรูป



(2) กราฟของ r_2 คือจุด 100 จุด ดังรูป



ตอบ

การเขียนกราฟของความสัมพันธ์อาจทำได้ดังนี้

1. ถ้า r เป็นเซตจำกัด จะเขียนจุดที่ใช้แทนสมาชิกของ r ทุกสมาชิก ดังกราฟของ $r_1 = \{(1, 4), (2, 5), (3, 7)\}$ ในตัวอย่างที่ 12 ข้อ (1) หรือเขียนจุดที่ใช้แทนสมาชิกของ r เพียง 3 สมาชิกแรกและสมาชิกสุดท้าย (จุดที่ใช้แทนสมาชิกอื่นๆ จะเว้นไว้ในฐานที่เข้าใจ) ดังกราฟของ $r_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots, (100, 100)\}$ ในตัวอย่างที่ 12 ข้อ (2)

2. ถ้า r เป็นเซตอนันต์ จะเขียนจุดที่ใช้แทนสมาชิกของ r เพียง 5 ถึง 10 สมาชิก โดยเว้นจุดให้ห่างเป็นระยะๆ จะทำให้ได้กราฟของ r อย่างคร่าวๆ ดังตัวอย่างต่อไป

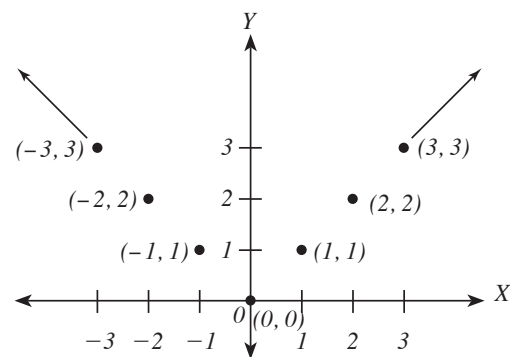
ตัวอย่างที่ 13 จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

(1) $r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = |x|\}$

(2) $r_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = \frac{1}{2}x^2 \right\}$

วิธีทำ (1) จากเงื่อนไขที่ว่า $y = |x|$ เมื่อแทนค่า x ด้วยจำนวนเต็มจะได้พิกัดของจุดซึ่งแทนสมาชิกของ r_1 ดังตาราง และจะได้กราฟของ r_1 ดังรูป

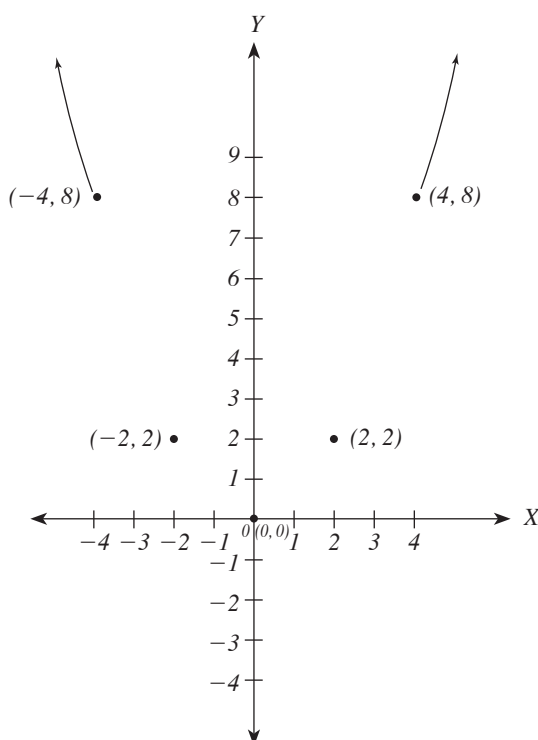
x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	3	2	1	0	1	2	3	...



ตอบ

(2) จากเงื่อนไขที่ว่า $y = \frac{1}{2}x^2$ เมื่อแทนค่า x ด้วยจำนวนเต็มจะได้พิกัดของจุดซึ่งแทนสมาชิกของ r_2 ดังตาราง และจะได้กราฟของ r_2 ดังรูป

x	...	-4	-2	0	2	4	...
y	...	8	2	0	2	8	...



ตอบ

ข้อสังเกต

กรณีที่สมาชิกของความสัมพันธ์เป็น $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ และเงื่อนไขของความสัมพันธ์อยู่ในรูปสมการ สมการนี้เรียกว่า **สมการของความสัมพันธ์** กราฟของจุดในความสัมพันธ์จะวางเรียงต่อเนื่องกันจนมองเห็นเป็นเส้นตรงหรือเส้นโค้ง และมีจุดนับไม่ถ้วน การเขียนกราฟแบบนี้จะใช้วิธีพิจารณาแนวทางเดินของจุด (x, y) บนกราฟ โดยหาพิกัดของจุด 5 ถึง 10 จุดห่างกันเป็นระยะๆ แล้วลากเส้นไปตามแนวของกราฟของจุดเหล่านั้น จะทำให้ได้กราฟของความสัมพันธ์อย่างคร่าวๆ

ตัวอย่างที่ 14 จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

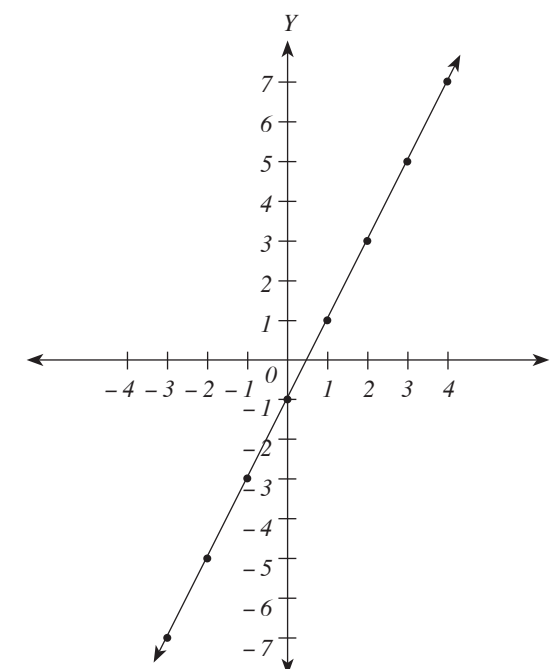
(1) $r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x - 1\}$

(2) $r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x|\}$

(3) $r_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{2}x^2 \right\}$

วิธีทำ (1) จากสมการ $y = 2x - 1$ เมื่อแทนค่า x ด้วยจำนวนจริงบางค่า จะได้พิกัดซึ่งแทนสมาชิกของ r_1 บางสมาชิกดังตาราง และจะได้กราฟของ r_1 ดังรูป

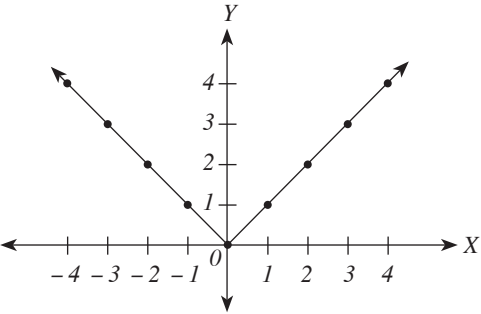
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7



ตอบ

(2) จากสมการ $y = |x|$ เมื่อแทนค่า x ด้วยจำนวนจริงบางค่า จะได้พิกัดซึ่งแทนสมาชิกของ r_2 บางสมาชิกดังตาราง และจะได้กราฟของ r_2 ดังรูป

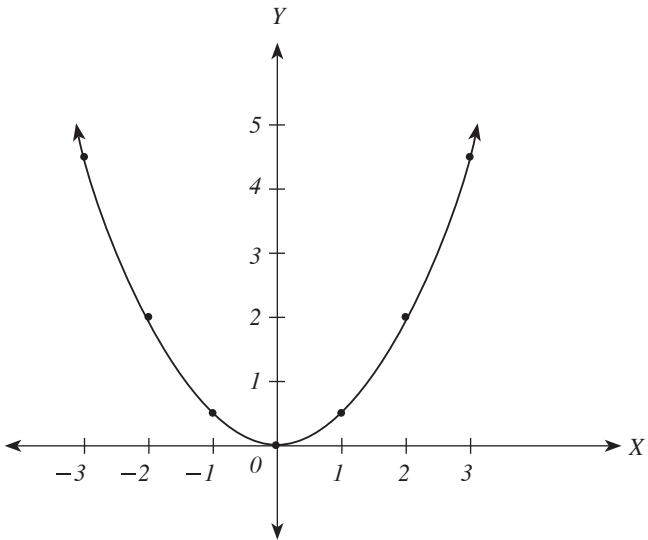
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	3	2	1	0	1	2	3	4



ตอบ

(3) จากสมการ $y = \frac{1}{2}x^2$ เมื่อแทนค่า x ด้วยจำนวนจริงบางค่า จะได้พิกัดซึ่งแทนสมาชิกของ r_3 บางสมาชิกดังตาราง และจะได้กราฟของ r_3 ดังรูป

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5

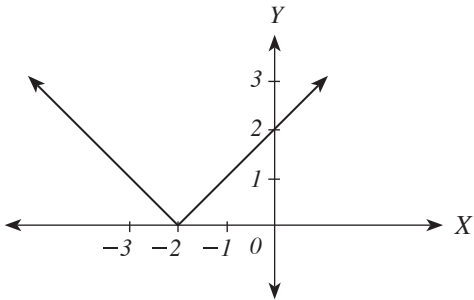


ตอบ

ข้อสังเกต

1. ในสมการของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูป $y = ax + b$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงที่ $a \neq 0$ กราฟของความสัมพัธ์จะอยู่ในแนวเส้นตรง
2. ในสมการของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงที่ $a \neq 0$ กราฟของความสัมพัธ์จะอยู่ในรูปพาราโบลา
3. ถ้าทราบว่ากราฟของความสัมพันธ์เป็นรูปเส้นตรง จะเขียนกราฟเส้นตรงได้ง่าย โดยหาจุดที่อยู่บนกราฟเพียง 2 จุด แล้วลากเส้นตรงผ่านจุดทั้งสอง ก็จะได้กราฟของเส้นตรงนั้นตามต้องการ

ตัวอย่างที่ 15 จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x+2|\}$ ซึ่งมีกราฟดังรูป

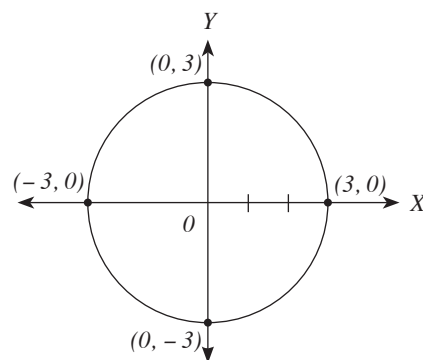


วิธีทำ จากกราฟ x เป็นจำนวนจริงใดๆ และ y มีค่าตั้งแต่ 0 ขึ้นไป
จะได้ว่า

$$\begin{aligned} D_r &= \mathbb{R} \\ R_r &= [0, \infty) \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 16 จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 9\}$ ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด รัศมีเท่ากับ 3 ดังรูป



วิธีทำ จากกราฟ x มีค่าตั้งแต่ -3 ถึง 3 และ y มีค่าตั้งแต่ -3 ถึง 3 จะได้ว่า

$$D_r = [-3, 3]$$

$$R_r = [-3, 3]$$

ตอบ

1.5 ความสัมพันธ์ผกผัน

บทนิยาม ความสัมพันธ์ผกผันของ r คือ ความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r

ความสัมพันธ์ผกผันของ r เขียนแทนด้วย r^{-1}

เขียน r^{-1} ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

$$r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$$

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้ว r^{-1} จะเป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A

วิธีการหาความสัมพันธ์ผกผัน

1. ถ้าโจทย์กำหนดความสัมพันธ์ที่เขียนในรูปแจกแจงสมาชิก ให้สลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับ

ตัวอย่างที่ 17 กำหนดให้ $r = \{(a, b), (c, d), (e, f)\}$ จงหา r^{-1}

วิธีทำ $r^{-1} = \{(b, a), (d, c), (f, e)\}$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 18 กำหนดให้ $r = \{(1, 2), (3, 4), (4, 5)\}$ จงหา r^{-1}

วิธีทำ $r^{-1} = \{(2, 1), (4, 3), (5, 4)\}$

ตอบ

2. ถ้าโจทย์กำหนดความสัมพันธ์ในรูปบอกเงื่อนไข ให้สลับที่ระหว่าง x กับ y ที่เงื่อนไข โดยเปลี่ยน x เป็น y และเปลี่ยน y เป็น x แล้วเขียน y ในเทอมของ x

ตัวอย่างที่ 19 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x + 1\}$ จงหา r^{-1}

วิธีทำ จาก $y = 2x + 1$
เปลี่ยน x เป็น y และเปลี่ยน y เป็น x แล้วหา y ในเทอมของ x
จะได้

$$x = 2y + 1$$

$$2y = x - 1$$

$$y = \frac{x - 1}{2}$$

$$\text{ดังนั้น } r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x - 1}{2}\}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 20 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x^3 - 7\}$ จงหา r^{-1}

วิธีทำ จาก $y = 2x^3 - 7$
เปลี่ยน x เป็น y และเปลี่ยน y เป็น x แล้วหา y ในเทอมของ x
จะได้

$$x = 2y^3 - 7$$

$$y^3 = \frac{x + 7}{2}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{x + 7}{2}}$$

$$\text{ดังนั้น } r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt[3]{\frac{x + 7}{2}}\}$$

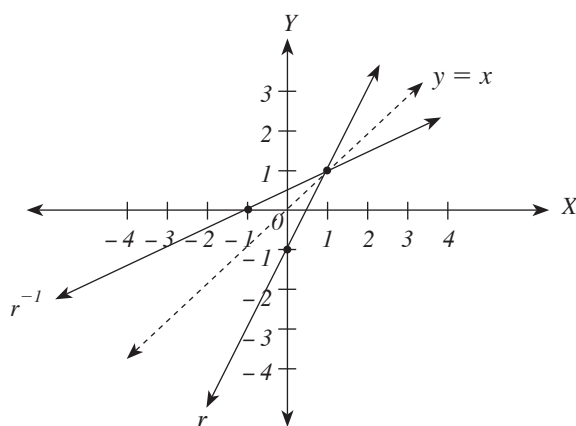
ตอบ

ตัวอย่างที่ 21 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x - 1\}$

จงหา r^{-1} และเขียนกราฟของ r และ r^{-1} บนระบบพิกัดฉาก XY

วิธีทำ จากสมการ $y = 2x - 1$
จะได้ $x = 2y - 1$
 $y = \frac{x+1}{2}$

$$\text{ดังนั้น } r^{-1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x+1}{2} \right\}$$

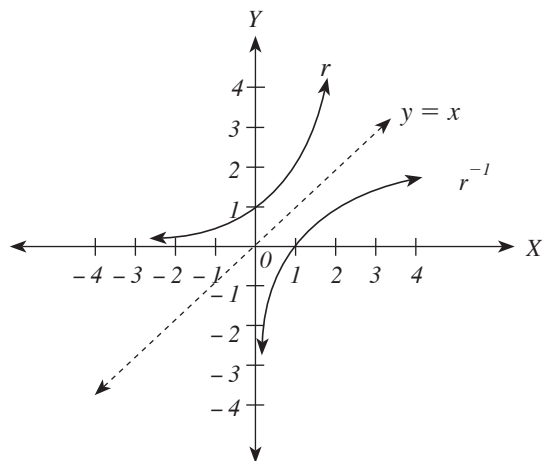


ตอบ

ตัวอย่างที่ 22 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2^x\}$

จงหา r^{-1} และเขียนกราฟของ r และ r^{-1} บนระบบพิกัดฉาก XY

วิธีทำ จาก $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2^x\}$
ดังนั้น $r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 2^y\}$



ตอบ

ข้อสังเกต กราฟของความสัมพันธ์ผกผันของ r^{-1} คือภาพสะท้อนของกราฟของความสัมพันธ์ r ที่มีเส้นตรง $y = x$ เป็นเส้นสะท้อน



แบบฝึกหัดที่ 2

- จากความสัมพันธ์ $r = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), \dots, (10, 20)\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r
- กำหนดให้ $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-2, 0, 2, 4, 6, 8\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x + 2\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r
- กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy - 2y = x - 1\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r
- กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 4\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r
- กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy = 1\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r
- กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{25 - x^2}\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r
- กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2 + \sqrt{x - 9}\}$ จงหา

(1) D_r (2) R_r (3) $R_r - D_r$

- กำหนดให้ $r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{1-y}{y-2} = \sqrt{x} \right\}$ จงหา

(1) D_r (2) R_r (3) $D_r - R_r$

- กำหนดให้ $r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{x^2 + 1} - 1 \right\}$ จงหา

(1) D_r (2) R_r (3) $D_r - R_r$

- กำหนดให้ $r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{5}{|x + 4| + 2} \right\}$ จงหาเรนจ์ของ r

- กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y^2 - 4y\}$ จงหาโดเมนของ r

- จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$(1) r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \right\} \quad (2) r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{-5}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} \right\}$$

- ถ้า $A = B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times B \mid -1 \leq x < 2 \text{ และ } y = |x - 1|\}$

(1) จงสร้างตารางแสดงการจับคู่กันของ x กับ y ให้ครบทุกคู่อันดับ เมื่อ $(x, y) \in r$

(2) จงเขียนเซต r แบบแจกแจงสมาชิก

(3) จงเขียนกราฟของ r

14. กำหนดให้ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
และ $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$ จงเขียนเซต r แบบแจกแจงสมาชิกและเขียนกราฟของ r
15. จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้
- (1) $r = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \mid y = 2x\}$
 - (2) $r = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x\}$
 - (3) $r = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 4 \text{ และ } 2 \leq y \leq 5\}$
 - (4) $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x + 4\}$
 - (5) $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x|\}$
 - (6) $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x - 2|\}$
 - (7) $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x + 2|\}$
16. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy = 1\}$
- (1) จงสร้างตารางแสดงคู่อันดับ (x, y) ที่อยู่ในเซต r จำนวน 8 คู่อันดับ โดยใช้ค่า x เป็นจำนวนเต็ม และ $-4 \leq x \leq 4$
 - (2) จงเขียนกราฟของจุด 8 จุด จากตารางในข้อ (1)
 - (3) จงเขียนกราฟของ r เมื่อ x เป็นจำนวนจริงในช่วง $[-4, 0) \cup (0, 4]$
 - (4) จงอภิปรายว่ากราฟของ r มีลักษณะอย่างไร จะตัดแกน X แกน Y หรือไม่ เพราะเหตุใด เมื่อ x เป็นจำนวนจริงในช่วง $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
17. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 25\}$
- (1) จงสร้างตารางแสดงคู่อันดับ (x, y) ที่อยู่ในเซต r โดยใช้ค่า $x = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$
 - (2) จงเขียนกราฟของจุด 20 จุด จากตารางในข้อ (1)
 - (3) จงเขียนกราฟของ r เมื่อ x เป็นจำนวนจริงในช่วง $[-5, 5]$
18. จงหาความสัมพันธ์ผกผัน พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ผกผัน
- (1) $r = \{(-1, -2), (1, 1), (3, 4)\}$
 - (2) $r = \{(-3, 5), (3, -5), (5, -7), (7, -10)\}$
 - (3) $r = \{(2, 1), (2, 4), (4, 2), (4, 4), (5, 2)\}$
 - (4) $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2x + y = 10\}$ เมื่อ $\mathbb{N}$ เป็นเซตของจำนวนนับ
 - (5) $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x^2 + 4\}$
19. จงเขียนกราฟของ r และ r^{-1} บนระบบพิกัดฉาก XY เมื่อกำหนด r ดังต่อไปนี้
- (1) $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3 - 2x\}$
 - (2) $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 - 2x = 0\}$
 - (3) $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{1 - x}\}$



กิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้ที่ 1

$$\text{ให้นักเรียนจับคู่กัน แข่งกันหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ } r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = \frac{3x^2 - 7}{x^2 + 1} \right\}$$

เมื่อ $\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม พร้อมทั้งหา $D_r - R_r$

2. ฟังก์ชัน



แนวคิดสำคัญ

ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งสมาชิกในโดเมนแต่ละตัวจับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของความสัมพันธ์เพียงตัวเดียวเท่านั้น ถ้า $(a, b) \in f$ แล้วจะเรียก b เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ a เขียนแทนด้วย $b = f(a)$

ดังที่กล่าวมาแล้วว่า ความสัมพันธ์ก็คือการจับคู่ระหว่างสมาชิกในโดเมนกับสมาชิกในเรนจ์ อาจจะเป็นการจับคู่ระหว่างสมาชิกในโดเมนเพียงตัวเดียวกับสมาชิกในเรนจ์เพียงตัวเดียว หรือเป็นการจับคู่ระหว่างสมาชิกในโดเมนหลายตัวกับสมาชิกในเรนจ์เพียงตัวเดียว แต่บางความสัมพันธ์เป็นการจับคู่ระหว่างสมาชิกในโดเมนเพียงตัวเดียวกับสมาชิกในเรนจ์หลายตัว ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์สองแบบแรกๆ ที่เรียกว่า “ฟังก์ชัน”

2.1 ความหมายของฟังก์ชัน

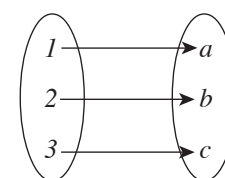
พิจารณาความสัมพันธ์

$$r_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$$

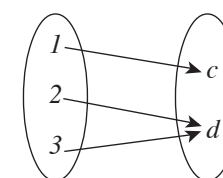
$$r_2 = \{(1, c), (2, d), (3, d)\}$$

$$r_3 = \{(1, e), (1, f), (2, g)\}$$

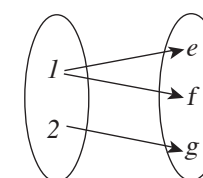
เขียนแสดง r_1 , r_2 และ r_3 ด้วยแผนภาพแสดงการจับคู่ของสมาชิกดังนี้



r_1



r_2



r_3

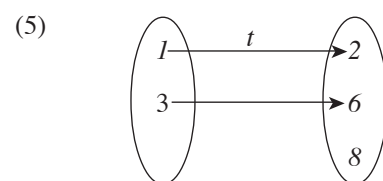
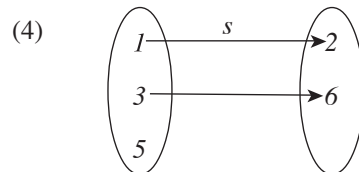
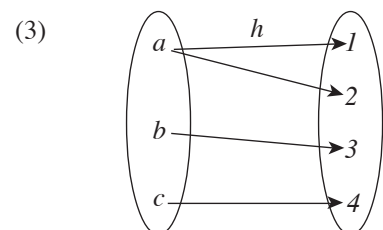
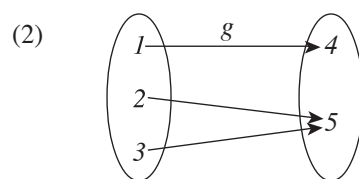
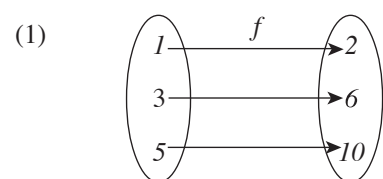
จะเห็นว่า สมาชิกแต่ละตัวในโดเมนของ r_1 จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของ r_1 เพียงตัวเดียว
 สมาชิกแต่ละตัวในโดเมนของ r_2 จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของ r_2 เพียงตัวเดียว
 สมาชิกบางตัวในโดเมนของ r_3 จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของ r_3 สองตัว
 เรียกความสัมพันธ์ที่มีลักษณะเดียวกับความสัมพันธ์ r_1 และ r_2 ว่า **ฟังก์ชัน**
 ส่วนความสัมพันธ์ r_3 ไม่เป็นฟังก์ชัน

บทนิยาม ฟังก์ชัน คือความสัมพันธ์ซึ่งสมาชิกในโดเมนแต่ละตัวจับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของความสัมพัธ์เพียงตัวเดียวเท่านั้น

ดังนั้น ถ้า r เป็นความสัมพันธ์ที่ทุก x, y และ z ใดๆ ซึ่ง $(x, y) \in r$ และ $(x, z) \in r$ แล้ว $y = z$ จะเรียก r ว่าเป็นฟังก์ชัน นิยมเขียนแทนฟังก์ชันด้วย f

ในกรณีที่มี x, y และ z ซึ่ง $(x, y) \in r$ และ $(x, z) \in r$ แต่ $y \neq z$ จะเรียกว่า r ไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 1 จากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ตามแผนภาพต่อไปนี้ จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชัน



วิธีทำ (1) จากแผนภาพจะพบว่า ไม่มีสมาชิกใดในโดเมนของ f จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของ f มากกว่า 1 ตัว

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน

ตอบ

(2) จากแผนภาพจะพบว่า ไม่มีสมาชิกใดในโดเมนของ g จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของ g มากกว่า 1 ตัว

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชัน

ตอบ

(3) จากแผนภาพจะพบว่า a อยู่ในโดเมนของ h จับคู่กับ 1 และ 2 ซึ่งเป็นสมาชิกในเรนจ์ของ h นั่นคือ มีสมาชิกบางตัวในโดเมนของ h จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของ h มากกว่า 1 ตัว

ดังนั้น h ไม่เป็นฟังก์ชัน

ตอบ

(4) จากแผนภาพจะพบว่า ความสัมพันธ์ $s = \{(1, 2), (3, 6)\}$ ซึ่งสมาชิกแต่ละตัวในโดเมนจับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของความสัมพัธ์เพียงตัวเดียวเท่านั้น

ดังนั้น s เป็นฟังก์ชัน (5 ไม่เป็นสมาชิกของโดเมน)

ตอบ

(5) จากแผนภาพจะพบว่า ไม่มีสมาชิกใดในโดเมนของ t จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของ t มากกว่า 1 ตัว

ดังนั้น t เป็นฟังก์ชัน

ตอบ

ข้อสังเกต

1. จากแผนภาพข้อ (2) ในตัวอย่างที่ 1 จะพบว่า g เป็นฟังก์ชัน เพราะว่าไม่มีสมาชิกตัวใดในโดเมนของ g จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของ g มากกว่า 1 ตัว

แม้ว่าจะมี 5 ซึ่งเป็นสมาชิกในเรนจ์ของ g จับคู่ 2 ครั้ง คือสมาชิก 5 ในเรนจ์ของ g จับคู่กับ 2 และ 3 ซึ่งเป็นสมาชิกในโดเมนของ g แต่บทนิยามกล่าวไว้ว่า ฟังก์ชันคือความสัมพันธ์ที่สมาชิกในโดเมนแต่ละตัวจับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของความสัมพัธ์เพียงตัวเดียว โดยไม่ได้บอกว่าสมาชิกแต่ละตัวในเรนจ์จะต้องจับคู่กับสมาชิกในโดเมนได้ไม่เกินกี่ตัว ซึ่งแปลความหมายได้ว่าสมาชิกแต่ละตัวในเรนจ์จะจับคู่กับสมาชิกในโดเมนกี่ตัวก็ได้

ดังนั้น ความสัมพันธ์ g ที่สมาชิกแต่ละตัวในโดเมนจับคู่กับสมาชิกในเรนจ์เพียงตัวเดียว แม้จะมีสมาชิกบางตัวในเรนจ์จับคู่กับสมาชิกในโดเมนมากกว่า 1 ตัว ความสัมพันธ์ g ก็ยังคงเป็นฟังก์ชัน

2. จากแผนภาพข้อ (1) ในตัวอย่างที่ 1 จะพบว่า f เป็นฟังก์ชันที่มี

$D_f = \{1, 3, 5\}$ เป็นเซตของสมาชิกตัวหน้าของทุกคู่อันดับใน f

$R_f = \{2, 6, 10\}$ เป็นเซตของสมาชิกตัวหลังของทุกคู่อันดับใน f

ฟังก์ชัน f ตามแผนภาพนี้เขียนในรูปเซตได้เป็น $f = \{(1, 2), (3, 6), (5, 10)\}$ และเรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็นฟังก์ชันจากโดเมนของ f ไปยังเรนจ์ของ f

ในทำนองเดียวกันจากแผนภาพข้อ (2) ในตัวอย่างที่ 1 จะเรียกฟังก์ชัน g ว่าเป็นฟังก์ชันจากโดเมนของ g ไปยังเรนจ์ของ g

วิธีตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

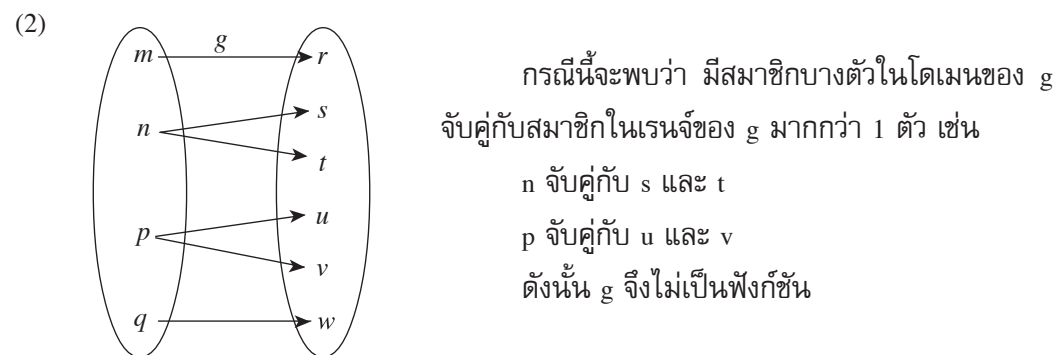
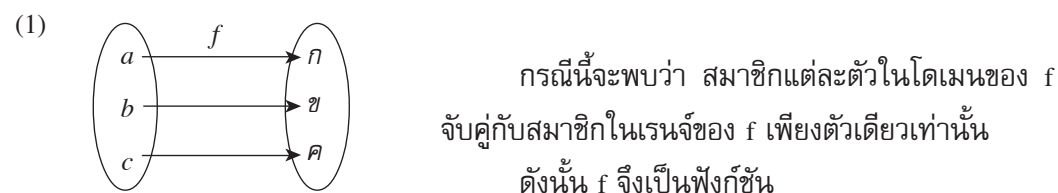
เนื่องจากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้บางความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชัน และบางความสัมพันธ์ไม่เป็นฟังก์ชัน ดังนั้น จึงมีความจำเป็นที่จะต้องมีการตรวจสอบว่า ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ ซึ่งวิธีการตรวจสอบจะแยกเป็น 2 กรณี คือ

1. กรณีที่ความสัมพันธ์นั้นเป็นเซตที่แจกแจงสมาชิกได้

การตรวจสอบโดยวิธีนี้จะต้องพิจารณาว่าสมาชิกแต่ละตัวในโดเมนของความสัมพันธ์จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของความสัมพันธ์เพียงตัวเดียวเท่านั้น ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้จึงจะเป็นฟังก์ชัน

ถ้ามีสมาชิกบางตัวในโดเมนของความสัมพันธ์จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของความสัมพันธ์มากกว่า

1 ตัว ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ก็จะไม่เป็นฟังก์ชัน เช่น



2. กรณีที่ความสัมพันธ์นั้นมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริงที่ไม่สามารถแจกแจงสมาชิกได้ จะตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ สามารถทำได้โดยวิธีต่อไปนี้คือ

2.1 วิธีพิจารณาจากเงื่อนไขของความสัมพันธ์ ถ้าพิจารณาได้ว่า “ทุกครั้งที่แทนค่า x ลงในสมการ 1 ค่า ทำให้ได้ค่า y เพียง 1 ค่า” ซึ่งหมายถึงสมาชิกแต่ละตัวในโดเมนจับคู่ตัวละครั้งเดียว” ในกรณีนี้ความสัมพันธ์นั้นจะเป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 2 ความสัมพันธ์ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

$$(1) f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x\}$$

$$(2) g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$$

$$(3) h = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = x\}$$

$$(4) k = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |y| = x\}$$

วิธีทำ (1) พิจารณาสมการ $y = 2x$

เมื่อแทนค่า $x = 1$ ทำให้ได้ค่า $y = 2$ เพียงค่าเดียว

แทนค่า $x = -2$ ทำให้ได้ค่า $y = -4$ เพียงค่าเดียว

แทนค่า $x = \frac{1}{3}$ ทำให้ได้ค่า $y = \frac{2}{3}$ เพียงค่าเดียว

แทนค่า $x = -\frac{1}{4}$ ทำให้ได้ค่า $y = -\frac{1}{2}$ เพียงค่าเดียว

จะได้ว่าทุกครั้งที่แทนค่า x ลงในสมการ 1 ค่า ทำให้ได้ค่า y เพียงค่าเดียวเสมอ ดังนั้น สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน

ตอบ

(2) พิจารณาสมการ $y = x^2$

เมื่อแทนค่า $x = 2$ ทำให้ได้ค่า $y = 4$ เพียงค่าเดียว

แทนค่า $x = -5$ ทำให้ได้ค่า $y = 25$ เพียงค่าเดียว

แทนค่า $x = \frac{1}{3}$ ทำให้ได้ค่า $y = \frac{1}{9}$ เพียงค่าเดียว

แทนค่า $x = -\frac{1}{4}$ ทำให้ได้ค่า $y = \frac{1}{16}$ เพียงค่าเดียว

จะได้ว่าทุกครั้งที่แทนค่า x ลงในสมการ 1 ค่า ทำให้ได้ค่า y เพียงค่าเดียวเสมอ ดังนั้น สรุปได้ว่า g เป็นฟังก์ชัน

ตอบ

(3) พิจารณาสมการ $y^2 = x$

เมื่อแทนค่า $x = 1$ จะได้ $y = \pm 1$ มี 2 ค่า ซึ่งหมายความว่ามีความสัมพันธ์ (1, -1) และ (1, 1)

อยู่ใน h

ดังนั้น h ไม่เป็นฟังก์ชัน

ตอบ

(4) พิจารณาสมการ $|y| = x$

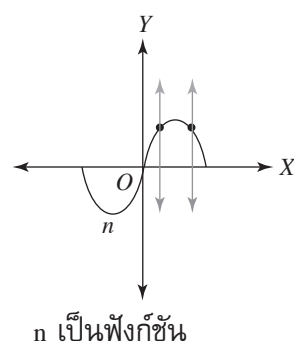
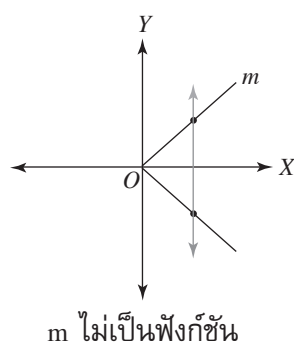
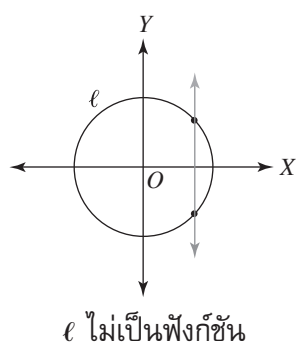
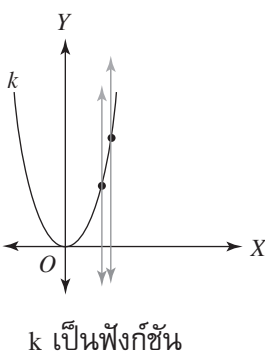
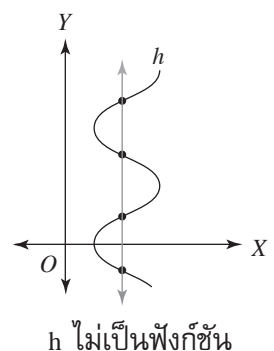
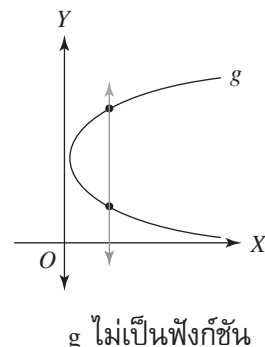
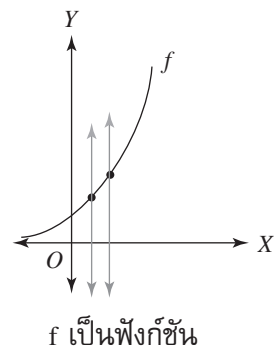
เมื่อแทนค่า $x = 2$ ทำให้ได้ $|y| = 2$ ซึ่งจะได้ $y = 2, -2$

ดังนั้น k ไม่เป็นฟังก์ชัน

ตอบ

ข้อตกลง ถ้า f เป็นฟังก์ชัน และ $(x, y) \in f$ แล้วจะกล่าวได้ว่า y เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ x และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $y = f(x)$

2.2 วิธีพิจารณาจากกราฟของความสัมพันธ์ f ถ้าลากเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y แล้วตัดกราฟของ f มากกว่า 1 จุดแล้ว f จะไม่เป็นฟังก์ชัน (เพราะว่ามี x บางค่าจับคู่กับค่า y เกิน 1 ครั้ง) ถ้าลากเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y แล้วตัดกราฟของ f ไม่เกินหนึ่งจุดเสมอจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน



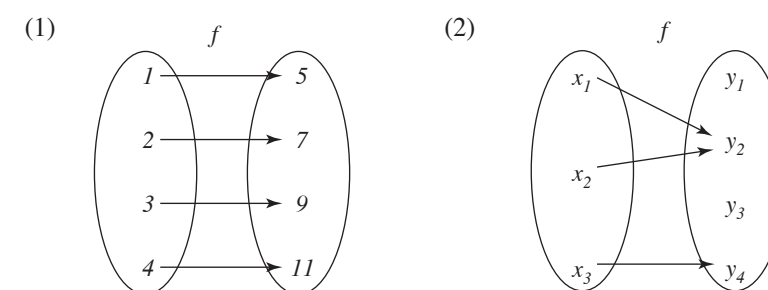
2.2 รูปแบบการเขียนฟังก์ชัน

การเขียนฟังก์ชันมีหลายรูปแบบ แต่รูปแบบที่พบบ่อยๆ มี 5 รูปแบบ คือ

รูปแบบที่ 1 การเขียนฟังก์ชันโดยการแจกแจงสมาชิก รูปแบบนี้เป็นการเขียนฟังก์ชัน f ในรูปเซต และเขียนสมาชิกแต่ละตัวของ f ซึ่งเป็นคู่อันดับลงในเซต เช่น

$$f = \{(1, 5), (2, 7), (3, 9), (4, 11)\}$$

รูปแบบที่ 2 การเขียนฟังก์ชันโดยใช้แผนภาพ รูปแบบนี้เป็นการนำคู่อันดับซึ่งเป็นสมาชิกของฟังก์ชันมาเขียนแสดงให้เห็นการจับคู่อย่างชัดเจน เช่น



รูปแบบที่ 3 การเขียนฟังก์ชันโดยใช้ตาราง รูปแบบนี้เป็นการนำคู่อันดับซึ่งเป็นสมาชิกของ f แต่ละสมาชิกเขียนไว้ในตาราง เช่น

(1)

x	1	2	3	4
$f(x)$	5	7	9	11

(2) ตารางแสดงเงินเดือนและรายจ่ายต่อเดือนของครูกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ 7 คน

เงินเดือนที่ได้รับ	18,400	18,950	19,200	19,500	19,780	19,900	21,400
รายจ่ายต่อเดือน	18,100	18,300	18,450	18,400	18,500	18,480	19,000

รูปแบบที่ 4 การเขียนฟังก์ชันแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกในเซต รูปแบบนี้เกิดจากการเขียนฟังก์ชันในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข โดยใช้คู่อันดับ (x, y) แทนสมาชิกใดๆ ในเซต f แล้วมีเงื่อนไขบอกให้ทราบว่า x กับ y มีความสัมพันธ์กันด้วยกฎเกณฑ์ใด เช่น

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x\}$$

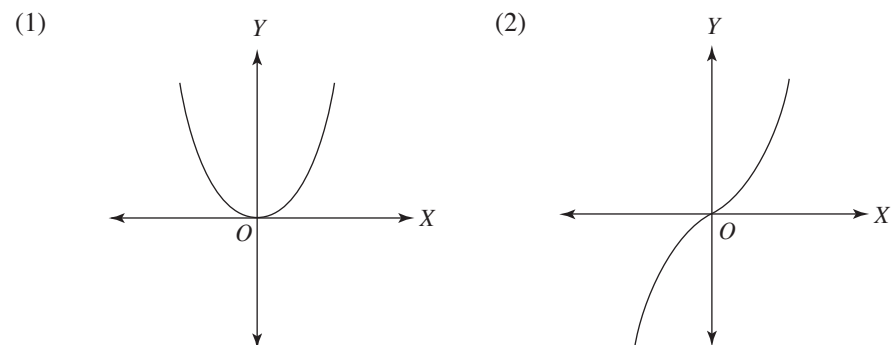
ในตัวอย่างนี้ f เป็นเซต มีสมาชิกเป็นคู่อันดับ (x, y) ใดๆ โดยที่ x กับ y มีความสัมพันธ์กันโดยใช้กฎเกณฑ์หรือเงื่อนไขว่า $y = 2x$

การเขียนฟังก์ชันแบบนี้ นิยมเขียนเฉพาะกฎเกณฑ์ (เงื่อนไข) ที่ x กับ y มีความสัมพันธ์กันแทนการเขียนเซต f เช่น

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x\} \text{ เขียนแทนด้วย } y = 2x$$

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + 3x - 5\} \text{ เขียนแทนด้วย } y = x^2 + 3x - 5$$

รูปแบบที่ 5 การเขียนฟังก์ชันโดยใช้กราฟ รูปแบบนี้เกิดจากการนำคู่อันดับ (x, y) ที่อยู่ใน f ไปเขียนเป็นจุดบนระนาบ ซึ่งจะได้เซตของจุดมากมายที่เห็นเป็นรูปภาพแบบต่างๆ เช่น



ต่อไปจะกล่าวถึงฟังก์ชันที่นักเรียนควรรู้จักดังต่อไปนี้

1. ฟังก์ชันจาก A ไป B

บทนิยาม f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ $D_f = A$ และ $R_f \subset B$
 f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f: A \rightarrow B$

2. ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

บทนิยาม f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ $D_f = A$ และ $R_f = B$
 f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f: A \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} B$

3. ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B



บทนิยาม f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ซึ่งถ้า $y \in R_f$ จะมี $x \in D_f$ เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $(x, y) \in f$
 f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f: A \xrightarrow{1-1} B$

4. ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B

บทนิยาม f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ $D_f = A$ และ $R_f = B$
 f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f: A \xrightarrow{1-1} B$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{4, 5, 6\}$ จงหาฟังก์ชันตามเงื่อนไขที่กำหนดมา
 ข้อละ 1 ฟังก์ชัน

- (1) ฟังก์ชันจาก A ไป B
- (2) ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B
- (3) ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B
- (4) ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B

วิธีทำ (1) ฟังก์ชันจาก A ไป B คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเท่ากับ A และเรนจ์เป็นสับเซตของ B จะได้

$$f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 4)\}$$

ตอบ

- (2) ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B คือ ฟังก์ชันจาก A ไป B ที่มีเรนจ์เท่ากับ B จะได้

$$f = \{(1, 5), (2, 4), (3, 6)\}$$

ตอบ

- (3) ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B คือ ฟังก์ชันที่มีสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับไม่เท่ากัน จะได้

$$f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$$

ตอบ

- (4) ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเท่ากับ A และเรนจ์เท่ากับ B

จะได้

$$f = \{(1, 6), (2, 4), (3, 5)\}$$

ตอบ

ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และ A เป็นสับเซตของโดเมน

1. f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก x_1, x_2 ใดๆ ใน A
 ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$
2. f เป็นฟังก์ชันลดบน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก x_1, x_2 ใดๆ ใน A
 ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$

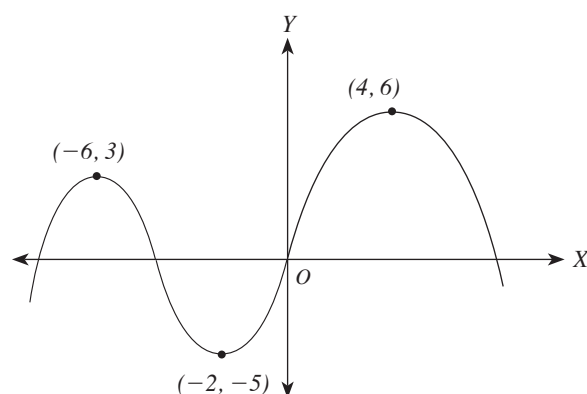
ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $f(x) = 2x+5$ จงพิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดในเซตของจำนวนจริง

วิธีทำ ให้ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ถ้า $x_1 < x_2$
 จะได้ $2x_1 < 2x_2$
 $2x_1+5 < 2x_2+5$
 นั่นคือ $f(x_1) < f(x_2)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มในเซตของจำนวนจริง

ตอบ

ตัวอย่างที่ 5 จงพิจารณากราฟของฟังก์ชัน h ต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือเป็นฟังก์ชันลดบนช่วงใด



วิธีทำ ฟังก์ชัน h เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, -6]$ และบนช่วง $[-2, 4]$

ฟังก์ชัน h เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-6, -2]$ และบนช่วง $[4, \infty)$

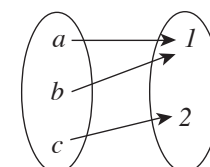
ตอบ



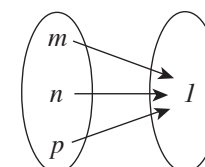
แบบฝึกหัดที่ 3

1. แผนภาพของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ แผนภาพใดเป็นฟังก์ชัน แผนภาพใดไม่เป็นฟังก์ชัน และจงบอกเหตุผลด้วยว่าเป็นฟังก์ชันเพราะเหตุใด หรือไม่เป็นฟังก์ชันเพราะเหตุใด

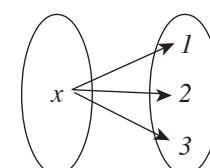
(1)



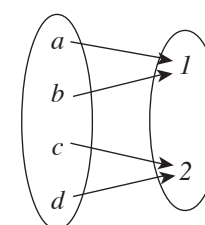
(2)



(3)



(4)



2. เซตที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

(1) $f = \{(1, 3)\}$

(2) $g = \{(1, 3), (2, 5), (2, 7)\}$

(3) $h = \{(1, 3), (2, 5)\}$

(4) $j = \{(1, 5), (2, 5)\}$

3. ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

(1) $h = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 5x+4\}$

(2) $j = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x|\}$

(3) $k = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2+y^2 = 4\}$

4. กำหนดให้ $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 3x-1\}$ โดยที่ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ

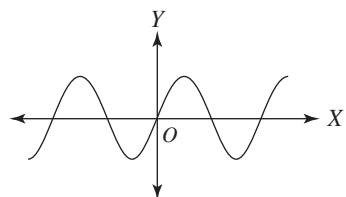
$B = \{2, 4, 5, 7, 8, 9, 11\}$

(1) จงเขียนเซต f แบบแจกแจงสมาชิก

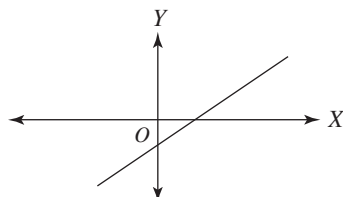
(2) จงตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันหรือไม่

5. กราฟของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ กราฟในข้อใดเป็นฟังก์ชัน และกราฟในข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน พร้อมให้เหตุผลประกอบคำตอบ

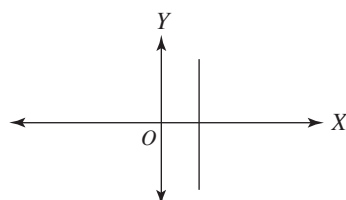
(1)



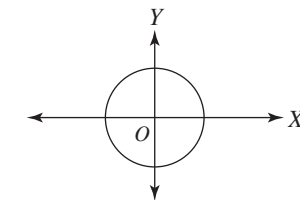
(2)



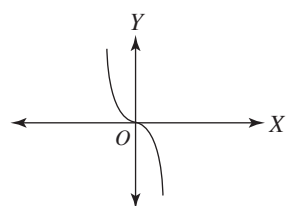
(3)



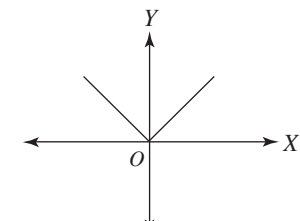
(4)



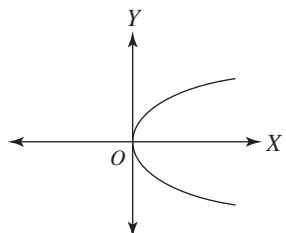
(5)



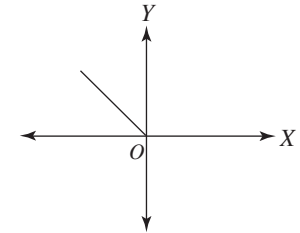
(6)



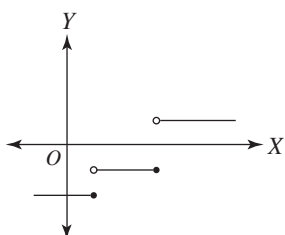
(7)



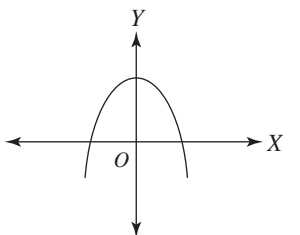
(8)



(9)



(10)



6. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{x, y, z\}$

$$f_1 = \{(1, x), (2, x), (3, y)\}$$

$$f_2 = \{(1, y), (2, x), (3, z)\}$$

$$f_3 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$$

$$f_4 = \{(x, 1), (y, 2), (z, 2)\}$$

$$f_5 = \{(x, 2), (y, 1), (z, 3)\}$$

$$f_6 = \{(x, x), (y, x), (z, x)\}$$

จงพิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดให้ว่าเป็นฟังก์ชันตามเงื่อนไขใดในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) ฟังก์ชันจาก A ไป B

(2) ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

(3) ฟังก์ชันจาก B ไป B

(4) ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B

(5) ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก B ไป A

(6) ฟังก์ชันจาก B ไป A

(7) ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง A

(8) ฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง B

7. ฟังก์ชันต่อไปนี้ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนช่วงที่กำหนดให้

(1) $f(x) = \frac{x+5}{2}$; $\mathbb{R}$

(2) $f(x) = -5x+7$; $(0, \infty)$

(3) $f(x) = -x^2+9$; $(-\infty, 0]$

(4) $f(x) = |x+2|$; $[-1, 1]$

ข้อสังเกต จาก

$$f(a-3) = 4a+7 \quad \dots\dots\dots(1)$$

อาจจะสามารถหาค่า $f(2)$ จากสมการ (1) ได้โดยไม่ต้องเปลี่ยนตัวแปรก็ได้ เช่น ใช้วิธีแทนค่า a ที่ทำให้ $a-3 = 2$ นั่นคือ แทนค่า $a = 5$ ลงใน (1) ซึ่งจะได้

$$f(5-3) = 4(5)+7$$

$$f(2) = 27$$

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ $f(x+2) = x-5$ จงหาค่าของ $f(3)$ และ $f(9)$

วิธีทำ จาก

$$f(x+2) = x-5 \quad \dots\dots\dots(1)$$

จาก (1) แทน $x = 1$ จะได้ $f(1+2) = 1-5$

$$f(3) = -4$$

จาก (1) แทน $x = 7$ จะได้ $f(7+2) = 7-5$

$$f(9) = 2$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 9 กำหนดให้ $f(x+1) = 2x+3$ จงหา $f(3x+5)$

วิธีทำ จาก

$$f(x+1) = 2x+3 \quad \dots\dots\dots(1)$$

กำหนดให้ $x+1 = t$

ดังนั้น $x = t-1$

แทนค่า x ในสมการ (1) จะได้ $f(t) = 2(t-1)+3$

$$= 2t-2+3$$

$$f(t) = 2t+1 \quad \dots\dots\dots(2)$$

แทนค่า $t = 3x+5$ ในสมการ (2) จะได้

$$f(3x+5) = 2(3x+5)+1$$

$$= 6x+10+1$$

นั่นคือ

$$f(3x+5) = 6x+11$$

ตอบ



แบบฝึกหัดที่ 4

1. กำหนดให้ $f = \{(1, 5), (2, 7), (3, 8), (4, 9)\}$ จงหาค่าของ

(1) $f(1)$ (2) $f(2)$ (3) $f(3)$ (4) $f(4)$

2. กำหนดให้ $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 5, 7, 8, 9, 11\}$ และ

$$f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 3x-1\}$$
 จงหาค่าของ

(1) $f(1)$ (2) $f(3)$ (3) $f(4)$

3. กำหนดให้ $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x+4\}$ จงหาค่าของ

(1) $f(0)$ (2) $f(1)$ (3) $f(5)$

4. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง และ $f(x) = 2x-1$ จงหาค่าของ

(1) $f(-2)$ (2) $f(-1)$ (3) $f\left(\frac{3}{2}\right)$ (4) $f(3.5)$

5. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง และ $f(x) = x+4$ จงหา

(1) $f(3)$ (2) $f(a)$ (3) $f(b-1)$ (4) $f(t+1)$

(5) $f(2k+3)$

6. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง และ $f(x-1) = x+2$ จงหา

(1) $f(2)$ (2) $f(c)$ (3) $f(a-3)$ (4) $f(a+1)$

(5) $f(t)$ (6) $f(x)$

7. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง และ $f(x+2) = x^3+3x+5$ จงหาค่าของ

(1) $f(2)$ (2) $f(3)$ (3) $f(3)-f(2)$ (4) $\frac{f(1)+f(0)}{f(3)}$

8. กำหนดให้ $f(x+3) = 2x+5$ จงหา

(1) $f(x-4)$ (2) $f(4x-3)$ (3) $f(a-b)$

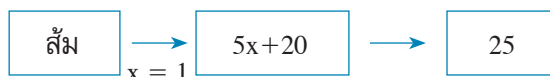


กิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้ที่ 2

1. ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 5-6 คน แต่ละกลุ่มสร้างสถานการณ์เพื่อทำแบบจำลองฟังก์ชัน แล้วแทนค่าสมาชิกในโดเมนเพื่อหาค่าของฟังก์ชันในแบบจำลองที่สร้างขึ้น
2. นำสถานการณ์มาสร้างแบบจำลองในรูปฟังก์ชัน โดยฟังก์ชันจะเป็นเงื่อนไขบังคับที่กำหนดผลลัพธ์ที่ขึ้นกับสิ่งที่นำเข้า
3. แต่ละกลุ่มออกมานำเสนอและสรุปการหาค่าของฟังก์ชันที่ได้

เช่น ให้นักเรียนตั้งกลุ่มขายน้ำผลไม้ปั่น โดยมีผลไม้ที่ใช้ในการปั่นคือ ส้ม ฝรั่ง สับปะรด แตงโม มะนาว และอื่นๆ น้ำปั่นที่ได้จะมีราคาต่อแก้วขึ้นอยู่กับจำนวนชนิดผลไม้ กำหนดดังนี้ ผลไม้ 1 ชนิด เมื่อปั่นเสร็จจะคิดในราคา 25 บาท ถ้าปั่นผลไม้ 2 ชนิดจะคิดในราคา 30 บาท และปั่นผลไม้ 3 ชนิดจะคิดในราคา 35 บาท เช่นนี้เรื่อยๆ

จากตัวอย่างของการขายน้ำผลไม้ปั่นข้างต้น ราคาของน้ำผลไม้ปั่นเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับจำนวนผลไม้กล่าวคือ คู่อันดับ $(1, 25), (2, 30), \dots$ เป็นคู่อันดับของฟังก์ชัน นั่นคือ สามารถกำหนดฟังก์ชันได้ดังนี้ $f(x) = 5x + 20$



3. การบวก การลบ การคูณ การหารฟังก์ชัน



แนวคิดสำคัญ

การสร้างฟังก์ชันใหม่จากฟังก์ชันเดิมที่มีอยู่ เป็นการนำฟังก์ชันตั้งแต่สองฟังก์ชันขึ้นไปมาบวก ลบ คูณ และหารกัน

ในหัวข้อนี้จะศึกษาวิธีสร้างฟังก์ชันใหม่จากฟังก์ชันเดิมที่มีอยู่ จะเห็นได้ว่า ฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง สามารถบวก ลบ คูณ และหารกันได้เช่นเดียวกับจำนวนจริงดังนี้

บทนิยาม กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง ผลบวก ผลต่าง ผลคูณ และผลหารของ f และ g เขียนแทนด้วย $f+g$, $f-g$, fg และ $\frac{f}{g}$ ตามลำดับ เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดค่าโดย

$$(1) (f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

$$(2) (f-g)(x) = f(x)-g(x)$$

$$(3) (fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$(4) \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} ; g(x) \neq 0$$

$$\text{โดยที่ } D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \cap D_g$$

$$\text{และ } D_{\frac{f}{g}} = \{x \in R \mid x \in D_f \cap D_g \text{ และ } g(x) \neq 0\}$$

ตัวอย่างที่ 1 ให้ $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$ และ $g = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (5, 1)\}$

จงหา $f+g$, $f-g$, fg และ $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

วิธีทำ โดเมนของ f คือ $\{1, 2, 3, 4\}$ และโดเมนของ g คือ $\{1, 2, 3, 5\}$

โดเมนของ $f+g$, $f-g$ และ fg คือ $D_f \cap D_g = \{1, 2, 3\}$

$(f+g)(1) = f(1)+g(1) = 1+5 = 6$ จะได้ $(1, 6)$ อยู่ใน $f+g$

$(f+g)(2) = f(2)+g(2) = 4+4 = 8$ จะได้ $(2, 8)$ อยู่ใน $f+g$

$(f+g)(3) = f(3)+g(3) = 9+3 = 12$ จะได้ $(3, 12)$ อยู่ใน $f+g$

ดังนั้น $f+g = \{(1, 6), (2, 8), (3, 12)\}$

ข้อสังเกต อาจหา $f+g$ ดังนี้

$$f+g = \{(1, 1+5), (2, 4+4), (3, 9+3)\}$$

$$= \{(1, 6), (2, 8), (3, 12)\}$$

$$f-g = \{(1, 1-5), (2, 4-4), (3, 9-3)\}$$

$$= \{(1, -4), (2, 0), (3, 6)\}$$

$(fg)(1) = f(1)g(1) = (1)(5) = 5$ จะได้ $(1, 5)$ อยู่ใน fg

$(fg)(2) = f(2)g(2) = (4)(4) = 16$ จะได้ $(2, 16)$ อยู่ใน fg

$(fg)(3) = f(3)g(3) = (9)(3) = 27$ จะได้ $(3, 27)$ อยู่ใน fg

ดังนั้น $fg = \{(1, 5), (2, 16), (3, 27)\}$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \cap D_g \text{ และ } g(x) \neq 0\} = \{1, 2, 3\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{1}{5} \text{ จะได้ } \left(1, \frac{1}{5}\right) \text{ อยู่ใน } \frac{f}{g}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{4}{4} = 1 \text{ จะได้ } (2, 1) \text{ อยู่ใน } \frac{f}{g}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{9}{3} = 3 \text{ จะได้ } (3, 3) \text{ อยู่ใน } \frac{f}{g}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{f}{g} = \left\{\left(1, \frac{1}{5}\right), (2, 1), (3, 3)\right\}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $f(x) = x^2 + 1$ และ $g(x) = \sqrt{x+2}$ จงหา

(1) $f+g$, $f-g$, fg และ $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

(2) $(f+g)(3)$, $(f-g)(3)$, $fg(3)$ และ $\frac{f}{g}(3)$

วิธีทำ (1) D_f คือ $\mathbb{R}$ และ D_g คือ $\{x \mid x \geq -2\}$

$$\text{ดังนั้น } D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \cap D_g = \{x \mid x \geq -2\}$$

$$\begin{aligned} D_{\frac{f}{g}} &= \{x \mid x \in D_f \cap D_g \text{ และ } g(x) \neq 0\} \\ &= \{x \mid x > -2\} \end{aligned}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 1 + \sqrt{x+2}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 1 - \sqrt{x+2}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x^2 + 1)(\sqrt{x+2})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x+2}}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (f+g)(3) &= f(3) + g(3) = (3^2 + 1) + \sqrt{3+2} \\ &= 10 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f-g)(3) &= f(3) - g(3) = (3^2 + 1) - \sqrt{3+2} \\ &= 10 - \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (fg)(3) &= f(3)g(3) = (3^2 + 1)(\sqrt{3+2}) \\ &= 10\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)(3) &= \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{(3^2 + 1)}{\sqrt{3+2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

ตอบ



แบบฝึกหัดที่ 5

1. กำหนดให้ $f = \{(-3, -7), (-2, -5), (-1, -3), (0, -1), (1, 1), (2, 3), (3, 5)\}$

และ $g = \{(-4, -3), (-2, -1), (0, 0), (2, 1), (4, 3), (6, 5)\}$ จงหา

(1) $f+g$ (2) $g+f$ (3) $f-g$ (4) $g-f$

(5) fg (6) gf (7) $\frac{f}{g}$ (8) $\frac{f+g}{fg}$

2. จงหา $f+g$, $f-g$, fg และ $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

(1) $f(x) = x+5$ และ $g(x) = x^2 - 25$

(2) $f(x) = 3x^2$ และ $g(x) = \frac{1}{2x-3}$, $x \neq \frac{3}{2}$

(3) $f(x) = \sqrt{x+3}$ และ $g(x) = \sqrt{x+3}$

(4) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ และ $g(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

(5) $f(x) = x^3 + 3x$ และ $g(x) = 3x^2 + 1$

(6) $f(x) = 5x+2$ และ $g(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$

(7) $f(x) = x^3 + x - 1$ และ $g(x) = 3x^2 + 4$

(8) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ และ $g(x) = 2x - 1$

(9) $f(x) = x^2 + 4$ และ $g(x) = \sqrt{2x+5}$

ตอบ



กิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้ที่ 3

ให้นักเรียนจับคู่กัน ช่วยกันสร้างโจทย์ 2-3 ข้อ

นักเรียนคนที่ 1 สร้างโจทย์เกี่ยวกับการบวกและการลบของฟังก์ชัน พร้อมทั้งแสดงวิธีการหา

คำตอบ

นักเรียนคนที่ 2 สร้างโจทย์เกี่ยวกับการคูณและการหารของฟังก์ชัน พร้อมทั้งแสดงวิธีการหา

คำตอบ

แต่ละคู่ออกมานำเสนอผลงานหน้าชั้นเรียน

ตอบ

4. ฟังก์ชันประกอบ



แนวคิดสำคัญ

ให้ f, g เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ ฟังก์ชันประกอบของ f และ g ที่ x เขียนแทนด้วย $(g \circ f)(x)$ โดยที่ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ สำหรับทุก x ซึ่ง $f(x) \in D_g$ โดเมนของ $g \circ f$ คือ $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

บทนิยาม ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน โดยที่

$$R_f \cap D_g \neq \emptyset$$

ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทน

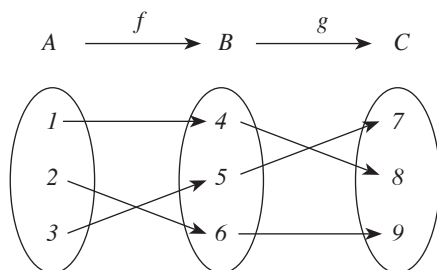
ด้วย $g \circ f$ คือ ฟังก์ชันที่โดเมนคือ

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \text{ และ}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ สำหรับทุกค่าของ } x \text{ ที่}$$

$$x \in D_{g \circ f}$$

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ดังแสดงในแผนภาพ



จากแผนภาพจะได้ $f(1) = 4, f(2) = 6, f(3) = 5$

$$g(4) = 8, g(6) = 9, g(5) = 7$$

นั่นคือ

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(4) = 8$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(6) = 9$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(5) = 7$$

ดังนั้น

$$g \circ f = \{(1, 8), (2, 9), (3, 7)\}$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f = \{(3, 8), (4, 10), (5, 9)\}$

$$\text{และ } g = \{(1, 5), (2, 4), (3, 6)\}$$

จงหา $f \circ g$

วิธีทำ $D_f = \{3, 4, 5\}$ และ $R_f = \{8, 10, 9\}$

$$D_g = \{1, 2, 3\} \text{ และ } R_g = \{5, 4, 6\}$$

จะได้ $R_g \cap D_f = \{4, 5\} \neq \emptyset$ เพราะฉะนั้น หา $f \circ g$ ได้

$$\text{ดังนั้น } f \circ g = \{(1, 9), (2, 10)\}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = 3x - 5$ และ $g(x) = 1 - x^2$ จะมี $g \circ f$ และ $f \circ g$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

ถ้ามีจงหา $g \circ f$ และ $f \circ g$ พร้อมทั้งหาโดเมน

วิธีทำ จาก $f(x) = 3x - 5$ จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \mathbb{R}$

$$\text{และจาก } g(x) = 1 - x^2 \text{ จะได้ } D_g = \mathbb{R} \text{ และ } R_g = (-\infty, 1]$$

หา $g \circ f$ พิจารณา $R_f \cap D_g = \mathbb{R}$ เพราะฉะนั้น หา $g \circ f$ ได้

$$(g \circ f)(x) = g(3x - 5)$$

$$= 1 - (3x - 5)^2$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 5 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \mathbb{R}$$

หา $f \circ g$ พิจารณา $R_g \cap D_f = (-\infty, 1]$ เพราะฉะนั้น หา $f \circ g$ ได้

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= f(1 - x^2)$$

$$= 3(1 - x^2) - 5$$

$$= 3 - 3x^2 - 5$$

$$= -3x^2 - 2$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^2 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \mathbb{R}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = x+1$, $g(x) = \sqrt{x}$ และ $h(x) = x-2$ จงหา

(1) $(f \circ g) \circ h$ (2) $f \circ (g \circ h)$

วิธีทำ (1) จาก $f(x) = x+1$ และ $g(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(\sqrt{x}) \\ &= \sqrt{x} + 1\end{aligned}$$

จาก $h(x) = x-2$

$$((f \circ g) \circ h)(x) = \sqrt{x-2} + 1$$

ดังนั้น $(f \circ g) \circ h = \sqrt{x-2} + 1$

(2) จาก $g(x) = \sqrt{x}$ และ $h(x) = x-2$

$$\begin{aligned}(g \circ h)(x) &= g(x-2) \\ &= \sqrt{x-2}\end{aligned}$$

จาก $f(x) = x+1$

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ h))(x) &= f(\sqrt{x-2}) \\ &= \sqrt{x-2} + 1\end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ (g \circ h) = \sqrt{x-2} + 1$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 4 กำหนด $(f \circ g)(x) = x^2 - 1$ และ $g(x) = x+2$ จงหา $f(x)$ และ $f(1)$

วิธีทำ จาก $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$$x^2 - 1 = f(x+2)$$

.....(1)

จาก (1) ให้ $x+2 = a$

$$x = a-2$$

แทน $x = a-2$ ใน (1) จะได้

$$(a-2)^2 - 1 = f(a)$$

$$a^2 - 4a + 4 - 1 = f(a)$$

$$a^2 - 4a + 3 = f(a)$$

เปลี่ยนตัวแปรจาก a เป็น x จะได้

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$f(1) = 1^2 - 4(1) + 3 = 0$$

ดังนั้น $f(x) = x^2 - 4x + 3$ และ $f(1) = 0$

ตอบ

ข้อสังเกต 1. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

2. $g \circ f$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $f \circ g$

3. ถ้ามี $(f \circ g) \circ h$ และ $f \circ (g \circ h)$ แล้วจะได้ว่า

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

4. $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$



แบบฝึกหัดที่ 6

1. กำหนดให้ $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 4)\}$

และ $g = \{(0, -1), (1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$

$$h = \{(-3, 0), (-2, 0), (-1, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (0, 0)\}$$

จงหา

(1) $g \circ f$ (2) $D_{g \circ f}$ (3) $f \circ g$ (4) $D_{f \circ g}$

(5) $h \circ f$ (6) $D_{h \circ f}$ (7) $g \circ h$ (8) $D_{g \circ h}$

2. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 1$ และ $g(x) = 3x + 5$ จงหา

(1) $(g \circ f)(x)$ (2) $(g \circ f)(5)$ (3) $(f \circ g)(x)$ (4) $(f \circ g)(-4)$

3. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 3x$, $g(x) = x^2 + 1$ และ $h(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ 2x-3 & \text{เมื่อ } x \geq 0 \end{cases}$

จงหา

(1) $(f \circ (g \circ h))(2)$ (2) $((f \circ g) \circ h)(-2)$ (3) $((g \circ f) \circ h)(0)$

(4) $((g \circ h) \circ f)(-1)$

4. กำหนด $f(x) = 3x - 2$ และ $g(x) = |x - 3|$ จงหา

(1) $(g \circ f)(x)$ (2) $(f \circ g)(x)$ (3) $(f \circ f)(x)$

(4) $(g \circ g)(x)$

5. กำหนด $f(x) = \frac{1}{x}$

$$g(x) = x^3$$

และ $h(x) = x^2 + 1$ จงหา

(1) $((f \circ g) \circ h)(x)$

(2) $((f \circ g) \circ h)(2)$

6. กำหนด $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 5$, $f(x) = x - 1$ จงหา $g(x) + f(3)$



กิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้ที่ 4

- ให้นักเรียนแบ่งเป็น 2 กลุ่มเท่าๆ กัน แล้วช่วยกันหาคำตอบของโจทย์ต่อไปนี้
ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งซึ่งสอดคล้องกับ
สมการ $(f \circ f)(x) = 5 + x(5 - f(x))$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x \in R$ แล้วจงหาค่าของ $f(5)$
- กลุ่มที่หาคำตอบได้ก่อนจะเป็นฝ่ายชนะ

5. ฟังก์ชันผกผัน



แนวคิดสำคัญ

เนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ ดังนั้นจึงสามารถหาความสัมพันธ์ผกผันของฟังก์ชันใดๆ ที่กำหนดให้ได้เสมอ โดยที่ตัวผกผันของฟังก์ชันอาจเป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชันก็ได้

จากการศึกษาเรื่องความสัมพันธ์ นักเรียนทราบแล้วว่าความสัมพันธ์จะมีตัวผกผันของความสัมพันธ์ และเนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ ดังนั้นฟังก์ชันจึงมีตัวผกผันของฟังก์ชัน

กำหนดให้ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = f(x)\}$ เป็นฟังก์ชัน เมื่อสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลังในคู่อันดับเดียวกันทุกคู่อันดับในฟังก์ชัน

ความสัมพันธ์ที่ได้เรียกว่า **ตัวผกผันของฟังก์ชัน** ใช้สัญลักษณ์ f^{-1} และถ้า f^{-1} เป็นฟังก์ชันจะเรียก f^{-1} ว่า **ฟังก์ชันผกผัน**

พิจารณา $f = \{(2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จะได้ $f^{-1} = \{(4, 2), (6, 3), (8, 4)\}$ เป็นฟังก์ชัน

ดังนั้น เรียก f^{-1} ว่าเป็นฟังก์ชันผกผันของ f

แต่ถ้า $g = \{(2, 4), (3, 4), (4, 8)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

$g^{-1} = \{(4, 2), (4, 3), (8, 4)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

ดังนั้น g^{-1} เป็นตัวผกผันของฟังก์ชัน g แต่ g^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชันผกผัน

ทฤษฎีบท ให้ f เป็นฟังก์ชัน

f มีฟังก์ชันผกผัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ข้อสังเกต 1. $D_f = R_{f^{-1}}$ และ $D_{f^{-1}} = R_f$

2. ถ้า f เป็นฟังก์ชัน และ f^{-1} เป็นฟังก์ชันแล้ว

$(x, y) \in f$ ก็ต่อเมื่อ $(y, x) \in f^{-1}$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดฟังก์ชัน f ซึ่ง $f(x) = 2x - 1$ มีฟังก์ชันผกผันหรือไม่

วิธีทำ วิธีที่ 1 ใช้บทนิยามของตัวผกผันของความสัมพันธ

จากกำหนด $f(x) = 2x - 1$

เขียนในรูปเซต $f = \{(x, y) \mid y = 2x - 1\}$

$f^{-1} = \{(x, y) \mid x = 2y - 1\}$ (เปลี่ยน x เป็น y และเปลี่ยน y เป็น x)

จัดสมการ $x = 2y - 1$

$x + 1 = 2y$

$\frac{x+1}{2} = y$

ดังนั้น $f^{-1} = \left\{ y \mid y = \frac{x+1}{2} \right\}$

ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่ง $(x, y) \in f^{-1}$ และ $(x, z) \in f^{-1}$

จะได้ $y = \frac{x+1}{2}$ และ $z = \frac{x+1}{2}$

นั่นคือ

$y = z$

ดังนั้น f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

ตอบ

วิธีที่ 2 โดยแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1

ให้ x_1, x_2 เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่ง $f(x_1) = f(x_2)$

$$\text{จะได้ว่า } 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1$$

$$x_1 = x_2$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1-1

โดยทฤษฎีบท f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

นั่นคือ $f(x) = 2x - 1$ มีฟังก์ชันผกผัน f^{-1}

$$\text{และ } f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 1$ จงหา f^{-1} และพิจารณาว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ

$$\text{จาก } f(x) = x^2 - 1$$

$$f = \{(x, y) \mid y = x^2 - 1\}$$

$$f^{-1} = \{(x, y) \mid x = y^2 - 1\}$$

$$\text{หรือ } f^{-1} = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x+1} \text{ หรือ } y = -\sqrt{x+1}\}$$

เนื่องจากฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1

ดังนั้น f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = 3x + 2$ จงหา f^{-1}

วิธีทำ

$$\text{จาก } f(x) = 3x + 2$$

$$\text{ให้ } y = 3x + 2$$

$$x = 3y + 2 \quad (\text{เปลี่ยน } x \text{ เป็น } y \text{ และเปลี่ยน } y \text{ และ } x)$$

$$y = \frac{x-2}{3} = f^{-1}(x)$$

$$\text{ดังนั้น } f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$$

ตอบ



แบบฝึกหัดที่ 7

1. กำหนดให้ $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a)\}$

(1) จงหา f^{-1}

(2) f^{-1} เป็นฟังก์ชันผกผันหรือไม่

(3) จงหา D_f และ R_f

(4) จงหา $D_{f^{-1}}$ และ $R_{f^{-1}}$

2. กำหนดให้ $f = \{(1, 0), (2, 4), (3, -2), (4, 5)\}$ จงหา

(1) $f(2)$

(2) $f(3)$

(3) $f^{-1}(5)$

(4) $f^{-1}(0)$

(5) $f^{-1}(-2) + f(2)$

3. จงเขียนกราฟของ f และ f^{-1} เมื่อกำหนด $f(x)$ ให้ ดังต่อไปนี้

(1) $f(x) = 2x + 4$

(2) $f(x) = x^2 + 2$

(3) $f(x) = |x + 2|$

4. กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ จงหา $f^{-1}(x)$ พร้อมทั้งหา $D_{f^{-1}}$

(1) $f(x) = \sqrt{x+1}$

(2) $f(x) = \frac{2x+3}{4}$

(3) $f(x) = 3\sqrt{x} + 1$

(4) $f(x) = x^3 + 8$

(5) $f(x) = \frac{x-1}{3}$

5. กำหนดฟังก์ชัน $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 \text{ และ } g(x) = 5x - 3 \text{ จงหา}$$

(1) $f^{-1}(1)$

(2) $f^{-1}(-2)$

(3) $g^{-1}(2)$

(4) $g^{-1}(12)$



กิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้ที่ 5

ให้นักเรียนจับคู่กันแล้วตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันผกผันของ g หรือไม่

1. $f(x) = x^2 - 4$ และ $g(x) = \sqrt{x+4}$

2. $f(x) = x + 5$ และ $g(x) = x - 5$

3. $f(x) = 3x$ และ $g(x) = \frac{1}{3}x$

4. $f(x) = 3x + 5$ และ $g(x) = \frac{x-3}{2}$



กิจกรรมสะเต็มศึกษา

“ฟังก์ชันกับเพนดูลัม”

จุดประสงค์

1. หาค่าของฟังก์ชันระหว่างคาบกับความยาวเชือกของเพนดูลัมได้
2. สร้างเพนดูลัมและทดสอบการใช้งานได้

อุปกรณ์

1. ลูกตุ้มเหล็ก 1 ลูก
2. เชือก
3. ไม้หรือเหล็กเพื่อทำขาตั้ง

ขั้นตอนในการดำเนินกิจกรรม

1. ให้นักเรียนแบ่งกลุ่มตามความเหมาะสม แล้วอ่านข้อความต่อไปนี้

“การแกว่งของลูกตุ้มอย่างง่าย เป็นการแกว่งของมวลที่แขวนที่จุดตรึงแน่นด้วยเชือกเบา เมื่อดึงมวลให้เชือกเบนเป็นมุมเล็กๆ แล้วปล่อย มวลจะเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายหรือเรียกว่าลูกตุ้มอย่างง่าย ซึ่งประกอบด้วยลูกตุ้มมวลขนาดเล็กตามอุดมคติแขวนที่ปลายด้ายหรือเชือกเบา โดยธรรมชาติวัตถุที่แขวนห้อยอยู่อย่างอิสระแนวดิ่งจะเป็นตำแหน่งสมดุล เมื่อดึงวัตถุให้เอียงทำมุมเล็กๆ กับแนวดิ่งแล้วปล่อยให้วัตถุเคลื่อนที่แกว่งกลับไปกลับมา ซึ่งจะพิจารณาได้ว่าเป็นการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายนั่นเอง

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิก คือการที่วัตถุเคลื่อนที่กลับไปมาซ้ำรอยเดิมโดยผ่านตำแหน่งสมดุลด้วยคาบที่คงที่ ตัวอย่างของการเคลื่อนที่แบบนี้ ได้แก่ การเคลื่อนที่ของวัตถุที่ถูกผูกติดไว้กับสปริงในแนวราบ แล้ววัตถุเคลื่อนที่ไปตามแรงที่สปริงกระทำต่อวัตถุ หรือการแกว่งของลูกตุ้ม”

2. แต่ละกลุ่มช่วยกันสืบค้นวิธีการสร้างเพนดูลัมและฟังก์ชันระหว่างคาบกับความยาวเชือกของเพนดูลัม
3. ทดลองเปลี่ยนความยาวเชือกแล้วใช้ฟังก์ชันดังกล่าวหาคาบของการแกว่งของเพนดูลัม
4. สร้างตามแบบและทดสอบการใช้งาน



สรุป

หลังจากศึกษาหน่วยการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะเกิดการเรียนรู้ครบทั้ง 3 ด้าน ได้แก่ ความรู้ (Knowledge) ทักษะ/กระบวนการ (Process) และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ (Attribute) ดังนี้

K

- คู่อันดับ $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$
- ถ้าเซต A และเซต B เป็นเซตใดๆ โดยมีสมาชิก m และ n ตัว ตามลำดับ ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B หมายถึง เซตของคู่อันดับทั้งหมดที่สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับเป็นสมาชิกของเซต A และสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับเป็นสมาชิกของเซต B ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$ นั่นคือ $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ และ } y \in B\}$ และจำนวนสมาชิกเท่ากับ $m \times n$ คู่อันดับ และโดยทั่วไป $A \times B \neq B \times A$
- r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times B$
ถ้า $r \subset A \times A$ จะเรียก r ว่าเป็นความสัมพันธ์ในเซต A
ถ้า $r \subset R \times R$ จะเรียก r ว่าเป็นความสัมพันธ์ในเซต R ในกรณีนี้ อาจละไว้ในฐานที่เข้าใจว่า r เป็นความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริงได้
- ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B นั่นคือ $r = \{(a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$
โดเมนของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย D_r นั่นคือ $D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$
เรนจ์ของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย R_r นั่นคือ $R_r = \{y \mid (x, y) \in r\}$
- การหาโดเมนของความสัมพันธ์ r ให้เขียนค่า y ให้อยู่ในเทอมของ x
การหาเรนจ์ของความสัมพันธ์ r ให้เขียนค่า x ให้อยู่ในเทอมของ y
- กราฟของความสัมพันธ์
 - (1) ในสมการของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูป $y = ax + b$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงที่ $a \neq 0$ กราฟของความสัมพันธ์จะอยู่ในแนวเส้นตรง
 - (2) ในสมการของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงที่ $a \neq 0$ กราฟของความสัมพันธ์จะอยู่ในรูปเส้นโค้ง
 - (3) ถ้าทราบว่ากราฟของความสัมพันธ์เป็นรูปเส้นตรง จะเขียนกราฟเส้นตรงได้ง่าย โดยหาจุดที่อยู่บนกราฟเพียง 2 จุด แล้วลากเส้นตรงผ่านจุดทั้งสองก็จะได้กราฟของเส้นตรงนั้นตามต้องการ
- ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งสมาชิกในโดเมนแต่ละตัวจับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของความสัมพันธ์เพียงตัวเดียวเท่านั้น
- ถ้า f เป็นฟังก์ชัน และ $(x, y) \in f$ แล้วจะกล่าวว่า y เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ x และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $y = f(x)$
- การหาค่าฟังก์ชัน f ที่ a อย่างง่าย จะใช้วิธีแทนค่า $x = a$ ลงในสมการของฟังก์ชันก็จะได้ค่าของฟังก์ชัน f ที่ a ตามต้องการ

- การบวก การลบ การคูณ และการหารของฟังก์ชัน เป็นการนำฟังก์ชันมา บวก ลบ คูณ และหารกัน
- ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนคือ $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ และ $g \circ f(x) = g(f(x))$ สำหรับทุก x ใน $D_{g \circ f}$
- f มีฟังก์ชันผกผัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
- ในกรณีที่ f มีฟังก์ชันผกผัน (f^{-1} เป็นฟังก์ชัน) โดเมนของ f^{-1} เท่ากับเรนจ์ของ f และเรนจ์ของ f^{-1} เท่ากับโดเมนของ f

P

- ทักษะการแก้ปัญหา
- ทักษะการสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
- ทักษะการเชื่อมโยง
- ทักษะการให้เหตุผล

A

- มีวินัย
- ใฝ่เรียนรู้
- มุ่งมั่นในการทำงาน
- ทำความเข้าใจหรือสร้างกรณีทั่วไปโดยใช้ความรู้ที่ได้จากการศึกษากรณีตัวอย่างหลายๆ กรณี
- มองเห็นว่าสามารถใช้คณิตศาสตร์แก้ปัญหาในชีวิตจริงได้
- มีความมุ่งมั่นในการทำความเข้าใจปัญหาและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- สร้างเหตุผลเพื่อสนับสนุนแนวคิดของตนเองหรือโต้แย้งแนวคิดของผู้อื่นอย่างสมเหตุสมผล



แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์

1. ถ้าคู่อันดับ $(x-5y, 2x-3y) = (9, 4)$ แล้วจงหาค่า x และ y
2. ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ และ $C = \{1, 4\}$ แล้ว จงหา $(A \times B) - (A \times C)$
3. กำหนด $A = \{1, 2, 7, 8, 9, 10\}$ และ $B = \{2, 3, 4, 5\}$
 - (1) ถ้า r_1 แทนความสัมพันธ์ “เป็นครึ่งหนึ่งของ A ไป B ” แล้วจงเขียน r_1 แบบบอกเงื่อนไข
 - (2) ถ้า $r_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid |x-y| < 2\}$ แล้วจงเขียน r_2 แบบแจกแจงสมาชิก
4. ถ้า $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{2x-16}\}$ แล้วจงหา D_r และ R_r
5. จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3-|x|\}$$
 พร้อมทั้งหา D_r และ R_r

6. จากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ จงพิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

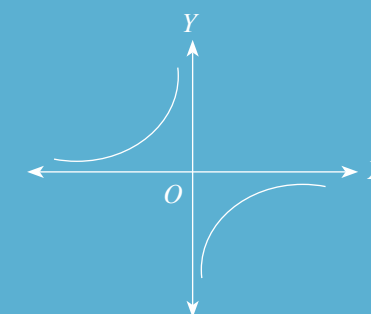
$$(1) r = \left\{ (3, 6), (4, 8), \left(\frac{4}{2}, 8\right), \left(\sqrt{16}, \frac{16}{2}\right) \right\}$$

$$(2) r = \{(4, a), (9, a), (4, b), (9, b)\}$$

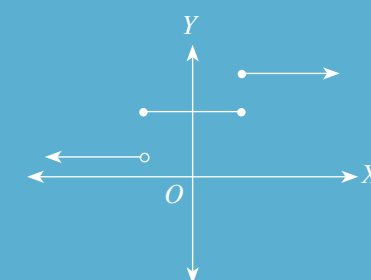
$$(3) r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}; A = \{1, 2\}, B = \{-2, 2\}$$

$$(4) r = \{(x, y) \mid y^2 = 6x-3\}$$

(5)



(6)



7. กำหนดให้ $f = \{(-1, 7), (3, -1), (4, 3), (7, -2)\}$

(1) จงหา $f(7)$

(2) ถ้า $f(a) = 3$ แล้วจงหาค่า a

(3) จงหา $f^{-1}(-1) - 2f(3)$

8. กำหนดให้ $f(x+5) = 2x+1$ จงหา

(1) $f(8)$

(2) $f(x)$

9. กำหนดให้ $g(x) = x^2 + 2x + 1$ และ $h(x) = \begin{cases} \frac{3-2x}{5} & \text{เมื่อ } x < -5 \\ x-1 & \text{เมื่อ } -5 \leq x \leq 2 \\ 4 & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$ จงหา

(1) $g(2)$

(2) $h(2)$

(3) $g(-3) + h(-5)$

10. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$

$f_1 = \{(3, 3), (2, 4), (1, 3)\}$

$f_5 = \{(3, 4), (2, 3), (1, 2)\}$

$f_2 = \{(3, 3), (2, 2), (1, 4)\}$

$f_6 = \{(3, 3), (2, 3), (1, 3)\}$

$f_3 = \{(4, 1), (3, 3), (2, 1)\}$

$f_7 = \{(4, 1), (3, 3), (2, 2)\}$

$f_4 = \{(2, 3), (3, 3), (1, 2)\}$

จงพิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดให้ว่ามีฟังก์ชันใดบ้างที่มีลักษณะดังต่อไปนี้

(1) ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

(2) ฟังก์ชันจาก A ไป B

(3) ฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง A

11. ถ้า $f(x) = \frac{2}{x-3}$ แล้ว จงหา $f^{-1}(x)$

12. ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือเป็นฟังก์ชันลด

(1) $f(x) = 2+3x$

(2) $f(x) = -x^2+5$ บนช่วง $[-2, 2]$

13. กำหนดฟังก์ชัน $f = \{(-3, 1), (4, 2), (11, -1)\}$

$g = \{(-3, 0), (1, 2), (4, -1)\}$

จงหา

(1) $(f+g)(4)$

(2) $\frac{f}{g}$

14. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{(x+2)(1-x)}$ และ $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ จงหา $(fg)(x)$ และ D_{fg}

15. ถ้า $f(x) = x^2+x-3$ และ $(f+g)(x) = x^4-3x^2+5$ แล้วจงหา $g(x)$

16. กำหนด $f = \{(-1, 3), (-2, 6), (0, 1), (3, 2)\}$

$g = \{(-2, 3), (3, 4), (6, 7), (4, 5)\}$ จงหา

(1) $g^{-1} \circ f$

(2) $f \circ g$

17. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^2+1}{3}$ และ $g(x) = \sqrt{x-1}$ จงหา $(f \circ g)(x)$

18. กำหนดให้ $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$ และ $g \circ f(x) = \sqrt{2x-5}$ จงหา

(1) $D_{f \circ g}$

(2) $(f \circ g)(x)$