



หนังสือเรียน

รายวิชาพื้นฐาน

คณิตศาสตร์

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ ๒ เล่ม ๑

ตามมาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด และสาระการเรียนรู้แกนกลาง
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

พิมพ์ครั้งที่ ๑

ISBN 978-616-576-402-5

จำนวน ๒๗๐,๐๐๐ เล่ม พ.ศ. ๒๕๖๗

จัดจำหน่ายโดย

องค์การค้าของ สกสค. พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว

๒๒๔๙ ถนนลาดพร้าว วังทองหลาง กรุงเทพมหานคร

❖ มีลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ



ประกาศสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน
เรื่อง อนุญาตให้ใช้สื่อการเรียนรู้ในสถานศึกษา

ด้วยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำหนังสือเรียน รายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒ เล่ม ๑ ตามมาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด และสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
(ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ สำนักงานคณะกรรมการการศึกษา
ขั้นพื้นฐาน ได้พิจารณาแล้วอนุญาตให้ใช้ในสถานศึกษาได้

ประกาศ ณ วันที่ ๑๔ กุมภาพันธ์ พ.ศ. ๒๕๖๗

ว่าที่ร้อยตรี

(ธนุ วงษ์จินดา)

เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) มีอำนาจหน้าที่ในการพัฒนา หลักสูตร วิธีการเรียนรู้
การประเมินผล การจัดทำหนังสือเรียน แบบฝึกหัด และสื่อการเรียนรู้ทุกประเภทที่ใช้ประกอบการเรียนรู้ในกลุ่มสาระการเรียนรู้
คณิตศาสตร์ของการจัดการศึกษาขั้นพื้นฐาน

หนังสือเรียน รายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒ เล่ม ๑ นี้ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และ
เทคโนโลยี (สสวท.) จัดทำขึ้นตามมาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด และสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
(ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีการปรับปรุงให้ม
ีความทันสมัย คำนึงถึงการส่งเสริมให้นักเรียนมีทักษะที่จำเป็น สอดคล้องกับการเรียนรู้ ในศตวรรษที่ ๒๑ เป็นสำคัญ รวมทั้ง
เน้นด้านการคิดวิเคราะห์ การแก้ปัญหา การคิดสร้างสรรค์ และการนำไปประยุกต์ใช้เพื่อพัฒนาคุณภาพชีวิตของตนเอง

กระทรวงศึกษาธิการหวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเรียนเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้และเป็นส่วนสำคัญ
ในการพัฒนาคุณภาพและมาตรฐานการศึกษา กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์
และเทคโนโลยี ตลอดจนบุคคลและหน่วยงานอื่น ๆ ที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำไว้ ณ โอกาสนี้

ว่าที่ร้อยตรี

(ธนุ วงษ์จินดา)

เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำมาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด และสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีจุดเน้นเพื่อพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถที่ทัดเทียมกับนานาชาติ ได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงความรู้กับ กระบวนการคิด มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผลและเป็นระบบ สามารถคิดวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ ได้อย่างรอบคอบและถี่ถ้วน ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา ได้อย่างถูกต้องเหมาะสม และสามารถนำไปใช้ ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ สสวท. จึงจัดทำหนังสือเรียนที่เป็นไปตามมาตรฐานหลักสูตรเพื่อให้โรงเรียนได้ใช้สำหรับจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน

หนังสือเรียน รายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒ เล่ม ๑ นี้ ประกอบด้วยบทเรียนเรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง ปริซึมและทรงกระบอก การแปลงทางเรขาคณิต สมบัติของเลขยกกำลัง และพหุนาม เนื้อหาสาระในแต่ละบทเรียนสอดคล้องครบถ้วนตามตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้ตามมาตรฐานการเรียนรู้ที่ได้กำหนดไว้ในหลักสูตร และสะท้อนภาพความเชื่อมโยงที่คาดหวังระหว่างหลักสูตรแกนกลางกับการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในโรงเรียน ผู้สอนสามารถใช้หนังสือเรียนเล่มนี้เป็นเครื่องมือในการจัดการเรียนรู้ บนพื้นฐานของความเข้าใจเกี่ยวกับธรรมชาติการเรียนรู้ของวัยรุ่น ความเชื่อมั่นในศักยภาพของผู้เรียน ความมุ่งหวังให้ผู้เรียนทุกคนมีความรู้และทักษะที่จำเป็นและเพียงพอกับการดำรงชีวิตในโลกอนาคตที่มีการพัฒนาและเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว มีความพร้อมในการศึกษาต่อระดับที่สูงขึ้น และสนับสนุนให้ผู้เรียนมีสิทธิ์ในการเรียนรู้และให้โอกาสในการเรียนรู้ในบริบทที่ท้าทาย หนังสือเรียนเล่มนี้นำเสนอรูปแบบการจัดการเรียนรู้ที่หลากหลายตามบริบทที่เหมาะสมในแต่ละเนื้อหา เช่น การลงมือปฏิบัติเพื่อสร้างข้อมูลและใช้ข้อมูลดังกล่าวสร้างข้อความคาดการณ์จนเกิดเป็นข้อสรุป การใช้คำถามเพื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนคิด วิเคราะห์ และแก้ปัญหาอย่างเป็นเหตุเป็นผล เพื่อให้ตอบสนองกับรูปแบบการเรียนรู้ที่แตกต่างกันของผู้เรียน มีการใช้สื่อการเรียนรู้ที่มีความทันสมัย เช่น ซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัต สื่อวัตถุดิจิทัลเสมือนจริง ด้วยมุ่งหวังที่จะกระตุ้นความสนใจของผู้เรียน ให้เปิดรับโอกาสในการเรียนรู้ ช่วยให้ผู้เรียนเห็นภาพและเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ และเข้าถึงแก่นของวิชาคณิตศาสตร์ที่มีธรรมชาติเป็นนามธรรมได้ในที่สุด โดยยึดหลักการของการเรียนรู้ที่เน้นให้ผู้เรียนสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเองควบคู่กับการชี้แนะของผู้สอน

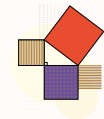
ในการจัดทำหนังสือเรียนเล่มนี้ สสวท. ได้รับความร่วมมือเป็นอย่างดีจากผู้ทรงคุณวุฒิ คณาจารย์ ครูผู้สอน นักวิชาการจากสถาบันและสถานศึกษาทั้งภาครัฐและเอกชน จึงขอขอบคุณไว้ ณ ที่นี้ และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์เล่มนี้จะเป็นประโยชน์แก่ผู้เรียนและผู้ที่เกี่ยวข้องทุกฝ่ายในการจัดการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพและประสิทธิผล หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้หนังสือเรียนเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วยจะขอบคุณยิ่ง

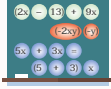
(รองศาสตราจารย์ธีระเดช เจียรสุขสกุล)

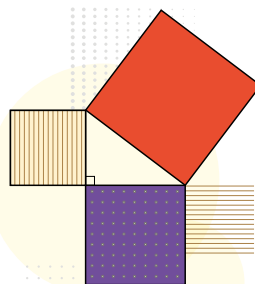
ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

การสื่อความหมายของรูปภาพและกรอบที่ควรรู้			
1	จุดประสงค์ของบทเรียน	6	ข้อควรระวัง
	ความรู้และทักษะที่นักเรียนควรทำได้เมื่อเรียนจบบทนี้		ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่อาจเข้าใจผิดหรือนำไปใช้โดยไม่ระวัง เพื่อให้เกิดความเข้าใจที่ถูกต้อง และย้ำเตือนให้นักเรียนเกิดความรอบคอบในการนำไปใช้
2	ทบทวนความรู้ก่อนเรียน	7	กิจกรรม
	ทบทวนเนื้อหาหรือความรู้ก่อนเรียน เพื่อเตรียมความพร้อมสำหรับการเรียนเนื้อหาใหม่ ซึ่งจะมีลิงก์ และ QR-code สำหรับเข้าไปทำแบบทดสอบออนไลน์ เพื่อตรวจสอบความรู้พื้นฐานก่อนเข้าสู่บทเรียน		กิจกรรมที่เน้นให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติ เพื่อฝึกการสังเกต ฝึกการคิด และให้เกิดการเรียนรู้หรือสร้างองค์ความรู้ใหม่ ๆ ทั้งยังช่วยพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์
3	มุมมอง	8	คำถามท้ายกิจกรรม
	ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เพิ่มเติมจากเนื้อหา เพื่อเสริมความรู้ทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียน		คำถามเพื่อสรุปความรู้ หรือขยายความรู้จากกิจกรรมที่ได้ทำ
4	ชวนคิด	9	มุมมองเทคโนโลยี
	คำถามเพื่อตรวจสอบความรู้หรือขยายความรู้จากเนื้อหา ตัวอย่าง หรือแบบฝึกหัด โดยเน้นให้เกิดการอภิปรายร่วมกันในชั้นเรียน เพื่อขยายความคิดเพิ่มเติม และแลกเปลี่ยนเรียนรู้ซึ่งกันและกัน		ความรู้หรือกิจกรรมที่ใช้เทคโนโลยีเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เช่น เครื่องคิดเลข หรือซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัต เพื่อให้นักเรียนมีทักษะในการใช้เทคโนโลยีในการแก้ปัญหา
5	ข้อสังเกต	10	สื่อเสริม เพิ่มความรู้
	ข้อมูลหรือความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สังเกตและสรุปได้จากเนื้อหาหรือตัวอย่าง เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนได้ฝึกการสังเกต คาคการณ์ และลงข้อสรุป		ข้อมูลหรือวิดีโอที่เสริมความรู้ที่เพิ่มเติมจากเนื้อหา ตัวอย่าง หรือแบบฝึกหัด เพื่อแนะนำแหล่งการเรียนรู้ให้นักเรียนได้ศึกษาเพิ่มเติม

การสื่อความหมายของรูปภาพและกรอบที่ควรรู้			
11	เกร็ดน่ารู้	17	สรุปท้ายบท
	ความรู้ทั่วไปในชีวิตจริงที่สอดคล้องกับเนื้อหา ตัวอย่าง หรือแบบฝึกหัด		สรุปเนื้อหาของบทเรียน เพื่อสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ในบทเรียนนั้น ๆ
12	เครื่องคิดเลข	18	กิจกรรมท้ายบท
	แนะนำให้ใช้เครื่องคิดเลขช่วยในการคำนวณ		กิจกรรมท้ายบทเรียน เพื่อให้นักเรียนได้นำความรู้ในบทเรียนมาใช้ในการแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่หลากหลาย
13	ซอฟต์แวร์ตารางทำงาน	19	แบบฝึกหัดท้ายบท
	แนะนำให้ใช้ซอฟต์แวร์ตารางทำงานในการทำกิจกรรม หรือการแก้ปัญหา		แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน เพื่อให้นักเรียนได้ประยุกต์ใช้ความรู้ที่ได้จากหัวข้อต่าง ๆ ในบทเรียนนี้ รวมทั้งบทเรียนก่อนหน้ามาใช้ในการแก้ปัญหา
14	The Geometer's Sketchpad	20	กิจกรรมคณิตศาสตร์เชิงสะสม
	แนะนำให้ใช้ซอฟต์แวร์ The Geometer's Sketchpad ในการทำกิจกรรม การสำรวจ หรือการแก้ปัญหา		กิจกรรมที่เน้นการประยุกต์ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์มาแก้ปัญหาในชีวิตจริง โดยให้นักเรียนได้บูรณาการความรู้ทางคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี หรือกระบวนการออกแบบเชิงวิศวกรรม
15	ท้าทาย	21	สื่อ AR (Augmented Reality)
	แบบฝึกหัดข้อที่มีความยากหรือซับซ้อนมากกว่าตัวอย่างที่มีให้ แต่ยังสามารถใช้เนื้อหาความรู้ที่เรียนมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาได้		สื่อเสริมการเรียนรู้ด้านโพลแอปพลิเคชัน “AR สวท. คณิต มัธยม” เพื่อใช้งานได้ที่ http://ipst.me/9075
16	ตรวจสอบความเข้าใจ		
	ตรวจสอบความเข้าใจของตนเองภายหลังจากเรียนจบบทเรียน เพื่อตรวจสอบว่าเนื้อหาใดที่เข้าใจ และเนื้อหาใดต้องทบทวนหรือเรียนรู้เพิ่มเติม		

สารบัญ	บทที่ 1–3	
บทที่	เนื้อหา	หน้า
1	บทที่ 1 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส	10
	1.1 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส	13
	1.2 บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส	32
		
ทฤษฎีบทพีทาโกรัส		
2	บทที่ 2 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง	48
	2.1 จำนวนตรรกยะ	51
	2.2 จำนวนอตรรกยะ	61
	2.3 รากที่สอง	71
	2.4 รากที่สาม	88
		
ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับ จำนวนจริง		
3	บทที่ 3 ปริซึมและทรงกระบอก	102
	3.1 พื้นที่ผิวและปริมาตรของปริซึม	105
	3.2 พื้นที่ผิวและปริมาตรของทรงกระบอก	125
		
ปริซึมและทรงกระบอก		

สารบัญ	บทที่ 4–6	
บทที่	เนื้อหา	หน้า
4	บทที่ 4 การแปลงทางเรขาคณิต	140
	4.1 การเลื่อนขนาน	146
	4.2 การสะท้อน	167
	4.3 การหมุน	193
		
การแปลงทางเรขาคณิต		
5	บทที่ 5 สมบัติของเลขยกกำลัง	228
	5.1 การดำเนินการของเลขยกกำลัง	231
	5.2 สมบัติอื่น ๆ ของเลขยกกำลัง	246
		
สมบัติของเลขยกกำลัง		
6	บทที่ 6 พหุนาม	258
	6.1 การบวกและการลบเอกนาม	261
	6.2 การบวกและการลบพหุนาม	270
	6.3 การคูณพหุนาม	283
	6.4 การหารพหุนามด้วยเอกนาม	291
		
พหุนาม		
กิจกรรมคณิตศาสตร์เชิงสะสม		304
บรรณานุกรม		306
ภาคผนวก		
ดัชนี		308
บัญชีสัญลักษณ์		311
คณะผู้จัดทำ		312

บทที่	1	ทฤษฎีบทพีทาโกรัส
		1.1 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส
		1.2 บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส
 จุดประสงค์ของบทเรียน		
เมื่อเรียนจบบทนี้แล้ว นักเรียนจะสามารถ		
1. นำทฤษฎีบทพีทาโกรัสไปใช้ในการแก้ปัญหา		
2. นำบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสไปใช้ในการแก้ปัญหา		



บทที่ 1 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส



“

เทคโนโลยียานยนต์ในปัจจุบันได้รับการพัฒนาในหลายด้าน เพื่อให้เกิดความสะดวกและปลอดภัยสำหรับผู้ขับขี่และผู้คนที่โดยสาร หนึ่งนั้น คือ เทคโนโลยียานยนต์ที่เกี่ยวข้องกับระบบอัตโนมัติ ดังจะเห็นได้จาก รถยนต์รุ่นใหม่หลายรุ่นมีระบบที่จะช่วยให้การจอดรถเป็นไปโดยอัตโนมัติ ระบบนี้จะมีตัวรับรู้ (sensor) คอยตรวจวัดระยะห่างระหว่างตัวรถกับวัตถุที่อยู่ใกล้ ๆ แล้วนำค่าที่ได้ไปประมวลผล เพื่อควบคุมพวงมาลัยให้หมุนไปโดยอัตโนมัติ ผู้ขับขี่เพียงแต่คอยเปลี่ยนเกียร์เดินหน้าหรือถอยหลังเท่านั้น โดยแนวคิดที่ใช้ในการประมวลผลระยะห่างสำหรับการเข้าจอดของรถนี้ได้มาจากการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ซึ่งเป็นทฤษฎีที่มีมานานกว่า 2,500 ปี

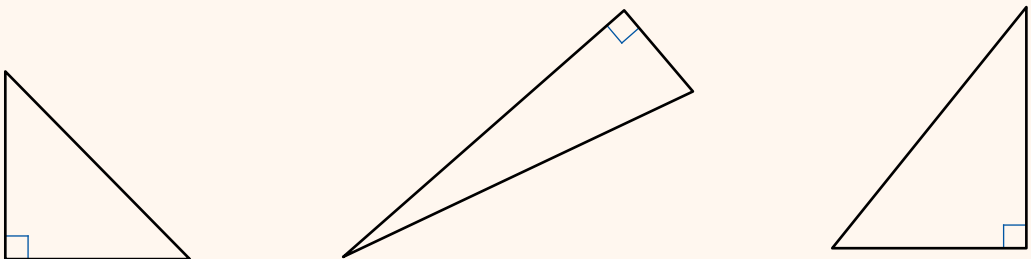
”



ทบทวนความรู้ก่อนเรียน

❖ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

รูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก
ตัวอย่างของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



❖ เลขยกกำลัง

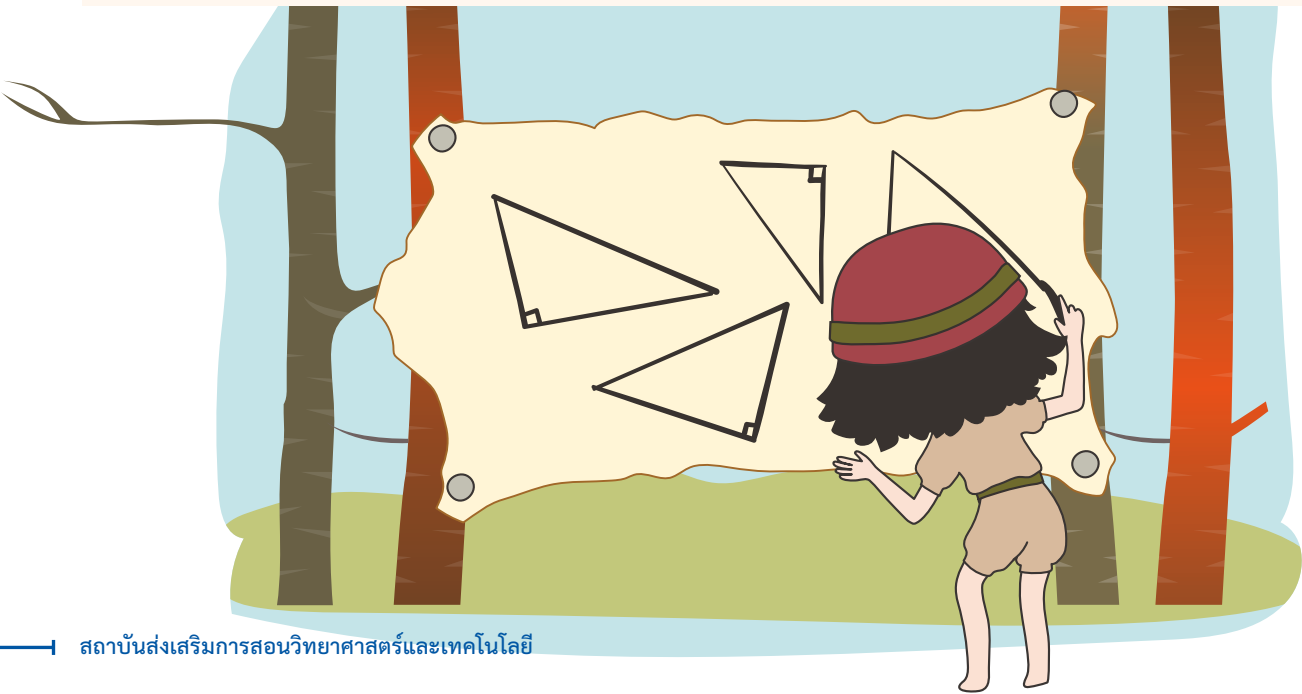
เลขยกกำลังเป็นสัญลักษณ์ที่ใช้เขียนแทนจำนวนที่เกิดจากการคูณตัวเองซ้ำกันหลาย ๆ ตัว เช่น

$5^2 = 5 \times 5$

$8^2 = 8 \times 8$

$a^2 = a \times a$

นักเรียนสามารถทำแบบทดสอบความรู้พื้นฐานก่อนเรียนได้ที่ <http://ipst.me/9050>



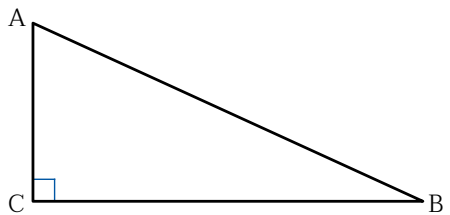
1.1 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

นักเรียนเคยสังเกตหรือไม่ว่า ในชีวิตประจำวันนั้น เราใช้ความรู้เกี่ยวกับสมบัติของรูปเรขาคณิตในการสร้างสิ่งปลูกสร้างมากมาย เช่น การใช้รูปสามเหลี่ยมเป็นส่วนประกอบโครงสร้างของบ้านหรืออาคาร การใช้มุมฉากในการสร้างโครงให้ตั้งฉากกับคานเพื่อเพิ่มความแข็งแรงและรับน้ำหนักได้มากขึ้น การใช้ไม้หรือเหล็กที่ประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเพื่อใช้ยึดชั้นวางของกับผนัง



ต่อไปนี้นักเรียนจะได้เรียนรู้เกี่ยวกับสมบัติที่สำคัญอีกประการหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มี $\angle C$ เป็นมุมฉาก



ข้อสังเกต

ด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านที่ยาวที่สุดเสมอ

เราเรียก $\overline{AB}$ ว่า **ด้านตรงข้ามมุมฉาก (hypotenuse)**
เรียก $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ ว่า **ด้านประกอบมุมฉาก (legs of a right triangle)**

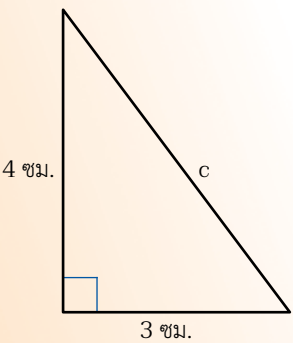
A | กิจกรรม : ด้านไหนยาวเท่าไร

อุปกรณ์
✦ ไม้บรรทัด

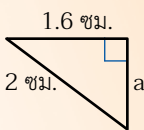


ขั้นตอนการทำกิจกรรม

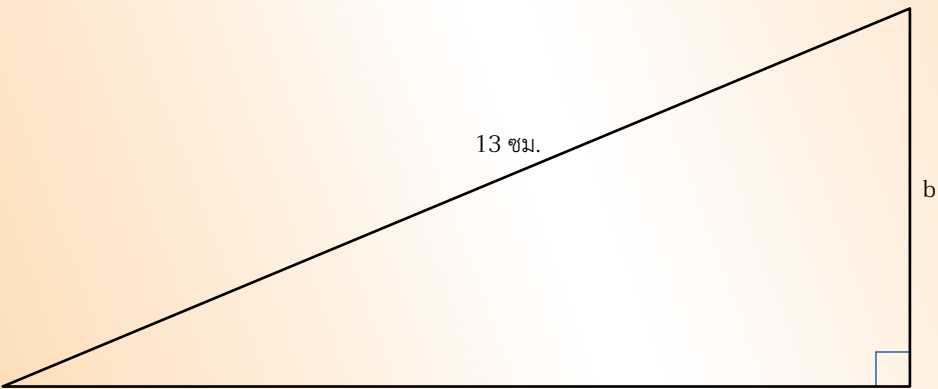
รูปสามเหลี่ยมมุมฉากแต่ละรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ มี a และ b เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉาก และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก ให้นักเรียนวัดความยาวของด้านที่ยังไม่ทราบค่าต่อไปนี้ แล้วเติมค่าลงในตารางให้สมบูรณ์



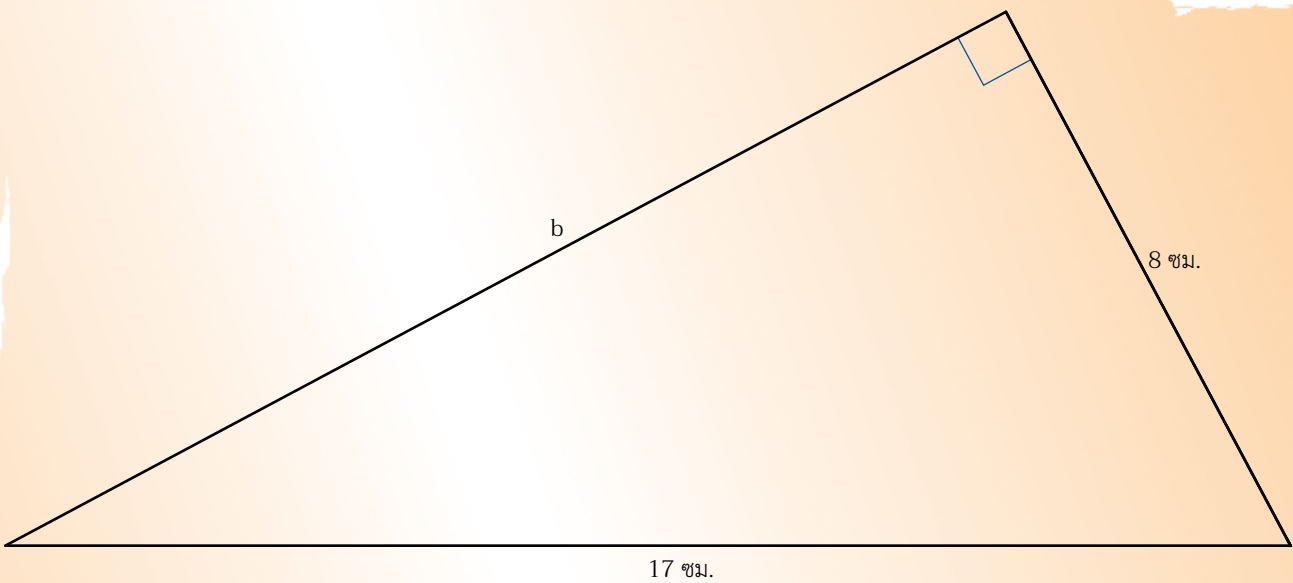
รูปที่ 1



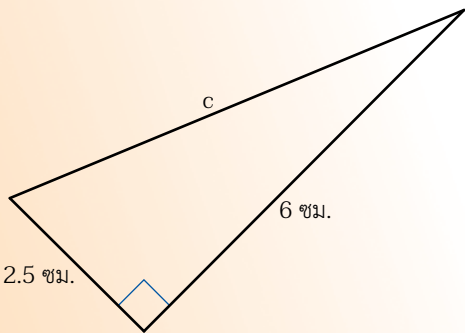
รูปที่ 2



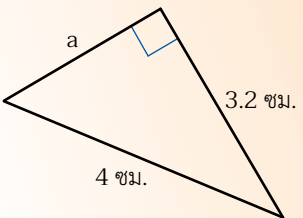
รูปที่ 3



รูปที่ 4

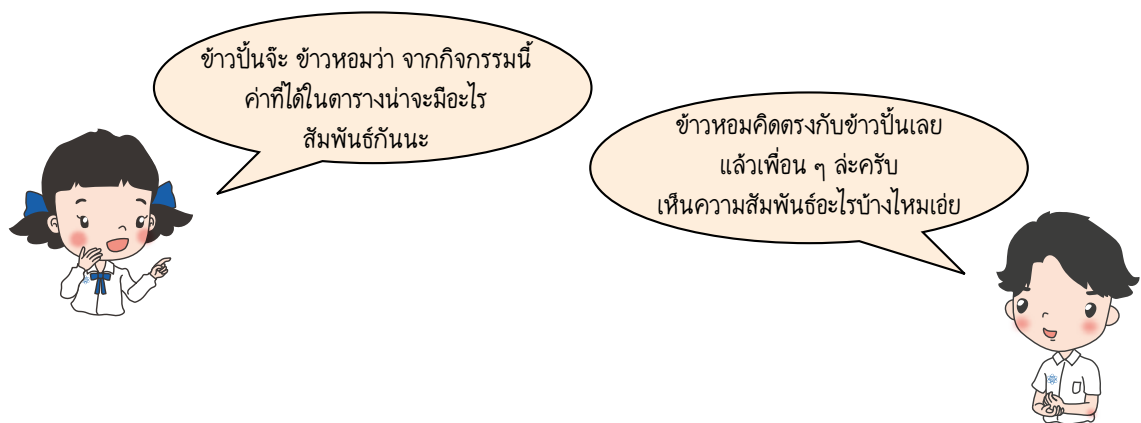


รูปที่ 5



รูปที่ 6

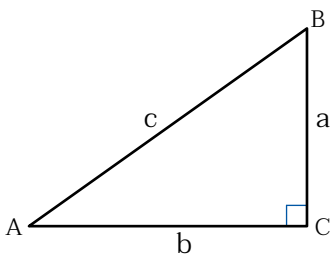
รูปที่	a	b	c	a^2	b^2	c^2	$a^2 + b^2$
1	3	4					
2		1.6	2				
3	12		13				
4	8		17				
5	6	2.5					
6		3.2	4				



ข้อสังเกต

โดยทั่วไป เรานิยมใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็กแทนความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม โดยกำหนดให้สอดคล้องกับตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ที่แทนจุดยอดที่อยู่ตรงข้ามด้านนั้น เช่น ให้ b แทนความยาวของด้านตรงข้ามจุดยอด B

จากกิจกรรมข้างต้น เมื่อกำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $\angle C$ เป็นมุมฉาก ดังรูป



โดยที่ c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก
 a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉากแต่ละด้าน
จะเห็นว่า $c^2 = a^2 + b^2$

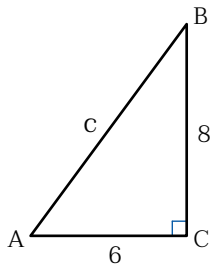
ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากข้างต้น เป็นไปตามสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กล่าวว่า

สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก

สมบัติข้างต้นนี้เรียกว่า **ทฤษฎีบทพีทาโกรัส (Pythagoras' theorem)** เชื่อกันว่านักปราชญ์และนักคณิตศาสตร์ชาวกรีกชื่อพีทาโกรัสเป็นผู้พิสูจน์ทฤษฎีบทดังกล่าวนี้จนเป็นที่ยอมรับเป็นคนแรก

เราสามารถใช้ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากดังกล่าว หาคความยาวของด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่ต้องการทราบได้เสมอ เมื่อทราบความยาวของด้านอีกสองด้าน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

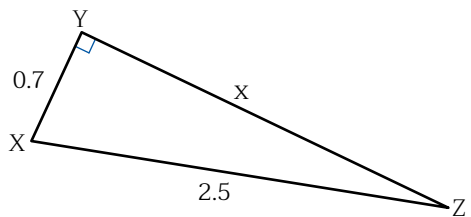
ตัวอย่างที่ 1 จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่กำหนดให้ จงหาค่า c



วิธีทำ จากความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
จะได้ $c^2 = 6^2 + 8^2$
 $= 36 + 64$
 $= 100$
ดังนั้น $c = 10$

ตอบ 10

ตัวอย่างที่ 2 จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก XYZ ที่กำหนดให้ จงหาความยาวของด้านที่เหลือ



วิธีทำ จากความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
จะได้ $2.5^2 = 0.7^2 + x^2$
 $x^2 = 2.5^2 - 0.7^2$
 $= 6.25 - 0.49$
 $= 5.76$
ดังนั้น $x = 2.4$

ตอบ 2.4 หน่วย



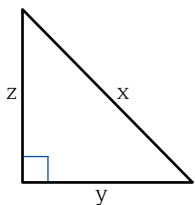
ข้อสังเกต

แม้ว่า $100 = 10^2 = (-10)^2$ แต่ในตัวอย่างที่ 1 เราสรุปว่า c เท่ากับ 10 เพียงค่าเดียว เพราะ c เป็นความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม

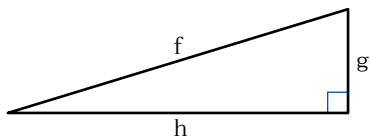
แบบฝึกหัด 1.1 ก

1. จงเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

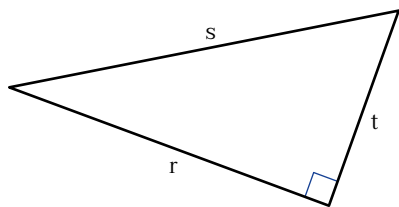
1)



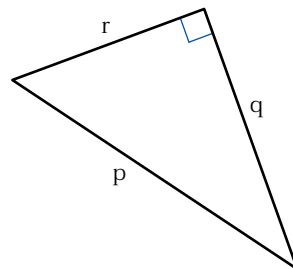
2)



3)



4)



2. จำนวนที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉากแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จงหาความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก

1) 9 และ 12

2) 20 และ 21

3) 3 และ 1.25

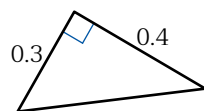
4) 0.8 และ 1.5

5) $2\frac{2}{5}$ และ 7

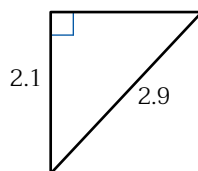
6) 2.4 และ $4\frac{1}{2}$

3. สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาความยาวของด้านที่เหลือ

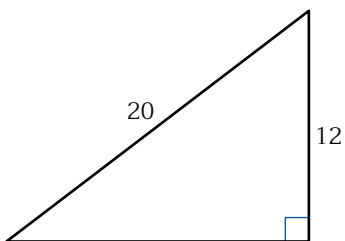
1)



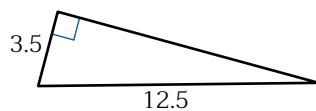
2)



3)

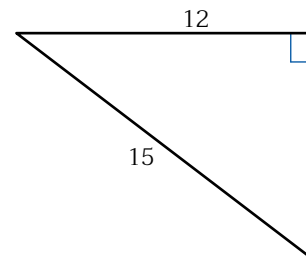


4)

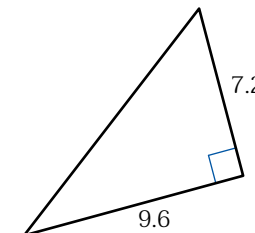


4. สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาความยาวรอบรูป

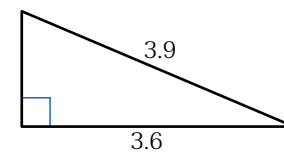
1)



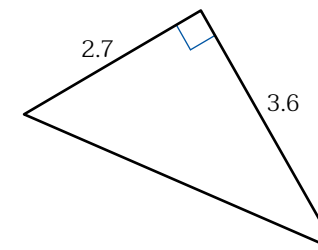
2)



3)

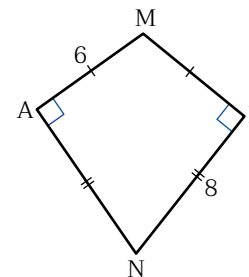


4)

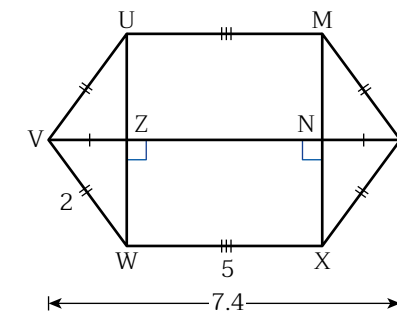


5. จากรูปที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาระยะ MN

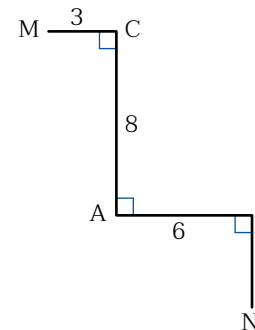
1)



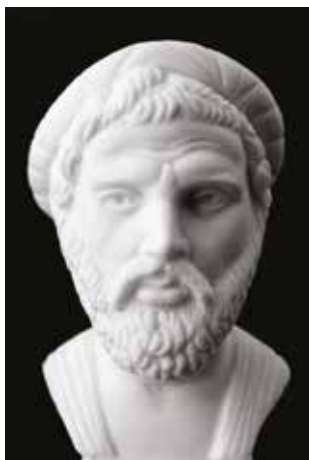
2)



3)



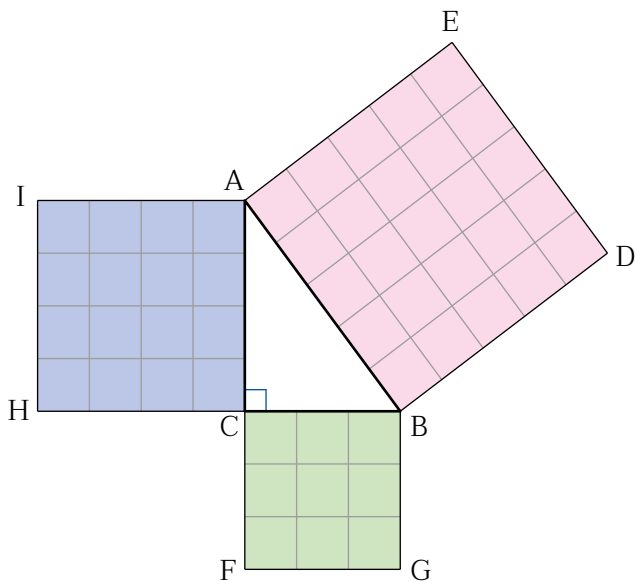
ทฤษฎีบทพีทาโกรัส



เราทราบมาแล้วว่า สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากนี้มีการค้นพบมาแล้วรวม 4,000 ปี ตั้งแต่ยุคสมัยแห่งอารยธรรมของอียิปต์และบาบิโลเนีย โดยเชื่อว่าผู้คนในอดีตใช้ความสัมพันธ์นี้มาช่วยในการออกแบบและสร้างพีระมิด และสิ่งก่อสร้างอื่น ๆ นอกจากนี้ โลกฝั่งตะวันออกก็ได้มีการพบชุดของจำนวนที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์ดังกล่าวในหลายอารยธรรม เช่น ชาวจีนมีการพบชุดของจำนวน 3, 4 และ 5 โดยบันทึกลงในหนังสือโจวปี่ซวนจิง (Zhoubi Suanjing) ซึ่งถือเป็นตำราคณิตศาสตร์ที่เก่าแก่ที่สุดเล่มหนึ่งของจีน พวกเขารู้จักความสัมพันธ์นี้ในนาม ทฤษฎีบทโกวกู (Gougu theorem) และชาวอินเดียเองก็ได้ค้นพบชุดของจำนวนดังกล่าว ซึ่งมีหลักฐานปรากฏอยู่ในตำรา Baudhayana Sulba-sutra อย่างไรก็ตาม พีทาโกรัสแห่งซามอส (Pythagoras of Samos, ประมาณ 580–496 ปีก่อนคริสต์ศักราช) นักปราชญ์และนักคณิตศาสตร์ชาวกรีก ได้พิสูจน์ความสัมพันธ์ดังกล่าวจนเป็นที่ยอมรับเป็นคนแรก ความสัมพันธ์นี้จึงได้รับการขนานนามว่า “ทฤษฎีบทพีทาโกรัส” แต่คนในสมัยนั้นสังเกตเห็นความสัมพันธ์นี้ในลักษณะที่เป็นความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

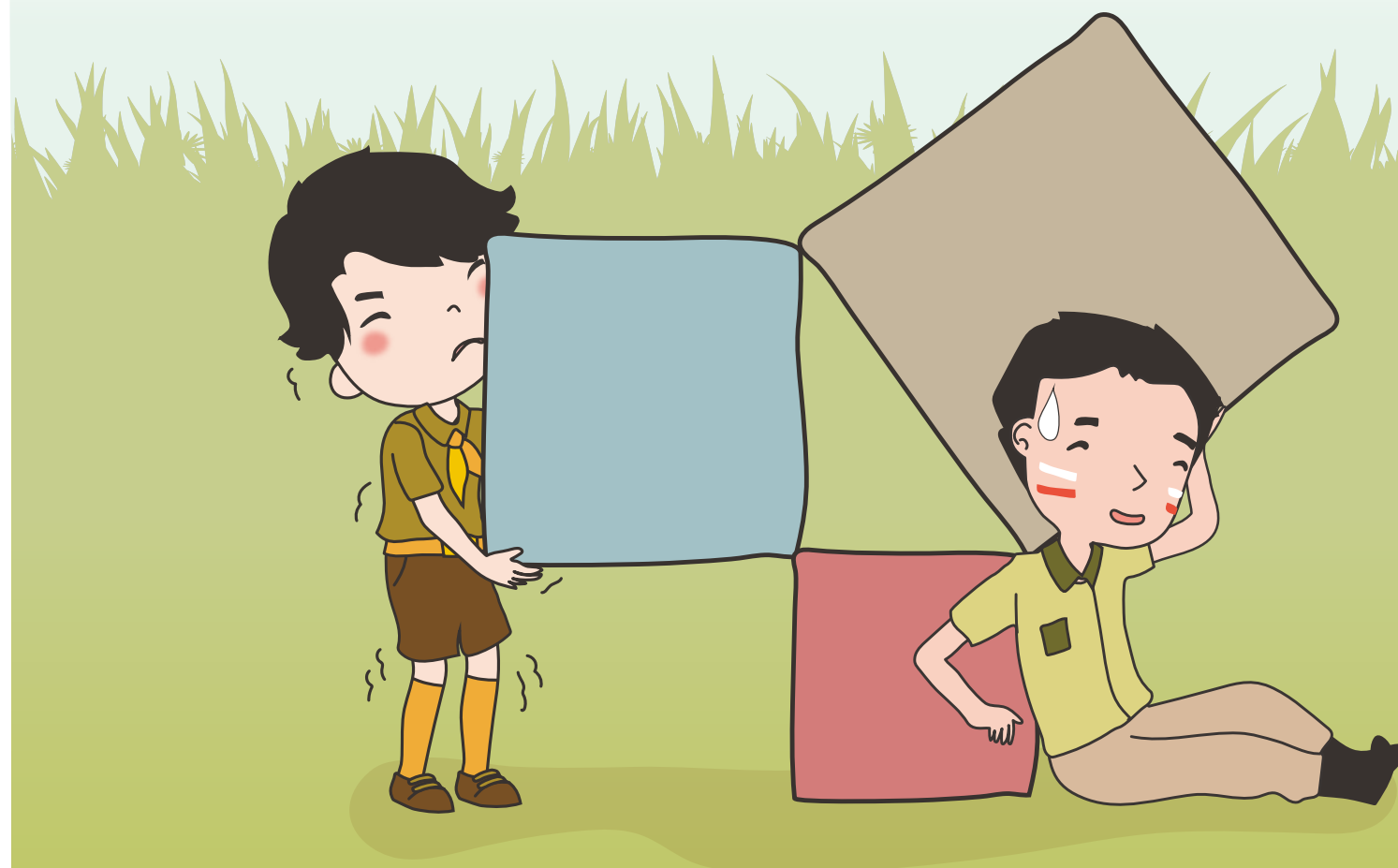


ให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $\angle C$ เป็นมุมฉาก มี $AB = 5$ หน่วย $BC = 3$ หน่วย และ $AC = 4$ หน่วย สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $ABDE$ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $BCFG$ และรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $ACHI$ บนด้าน AB ด้าน BC และด้าน AC ตามลำดับ ดังรูป



จะได้ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $ABDE$ เท่ากับ $5^2 = 25$ ตารางหน่วย
พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $BCFG$ เท่ากับ $3^2 = 9$ ตารางหน่วย
พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $ACHI$ เท่ากับ $4^2 = 16$ ตารางหน่วย
ซึ่ง $25 = 9 + 16$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $ABDE$ เท่ากับ ผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $BCFG$ และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $ACHI$





กิจกรรม : ตัด—ต่อ

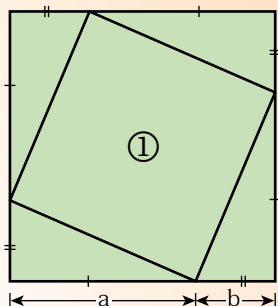
อุปกรณ์

- ❖ กระดาษสี
- ❖ กรรไกร
- ❖ ไม้บรรทัด

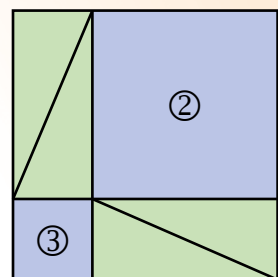


ขั้นตอนการทำกิจกรรม

1. ตัดกระดาษสีให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีขนาดเท่ากันจำนวน 2 ชั้น โดยให้มีความยาวของด้านอย่างน้อยด้านละ 10 เซนติเมตร
2. นำกระดาษสีที่ตัดไว้มาหนึ่งชั้น แล้วตัดกระดาษนั้นให้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก 4 ชิ้น โดยให้แต่ละชิ้นมีความยาวของด้านประกอบมุมฉากเป็น a หน่วย และ b หน่วย เมื่อกำหนดค่าของ a และ b ตามต้องการ ดังรูป เมื่อตัดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากออกไป 4 ชิ้นแล้ว จะเหลือกระดาษรูปสี่เหลี่ยม ①



3. นำกระดาษรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่ตัดได้ในข้อ 2 มาประกอบกันใหม่ โดยวางบนกระดาษสีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ตัดไว้อีกชั้นหนึ่ง ในข้อ 1 ดังรูป เมื่อประกอบกันแล้ว จะปรากฏบริเวณของรูปสี่เหลี่ยม ② และรูปสี่เหลี่ยม ③



คำถามท้ายกิจกรรม

1. จากขั้นตอนที่ 2 ถ้าให้ด้านตรงข้ามมุมฉากของกระดาษรูปสามเหลี่ยมมุมฉากยาว c หน่วย นักเรียนคิดว่า รูปสี่เหลี่ยม ① เป็นรูปสี่เหลี่ยมชนิดใด เพราะเหตุใด และรูปสี่เหลี่ยมนี้มีพื้นที่กี่ตารางหน่วย
2. จากขั้นตอนที่ 3 นักเรียนคิดว่า รูปสี่เหลี่ยม ② และ ③ เป็นรูปสี่เหลี่ยมชนิดใด เพราะเหตุใด และรูปสี่เหลี่ยมแต่ละรูปมีพื้นที่กี่ตารางหน่วย
3. นักเรียนคิดว่า พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ①, ② และ ③ สัมพันธ์กันอย่างไร



มุมเทคโนโลยี

นักเรียนสามารถดาวน์โหลดไฟล์ GSP เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่ตามทฤษฎีบทพีทาโกรัสที่เสนอในรูปแบบอื่น ๆ เพิ่มเติมได้ที่ <http://ipst.me/9051>



มุมเทคโนโลยี

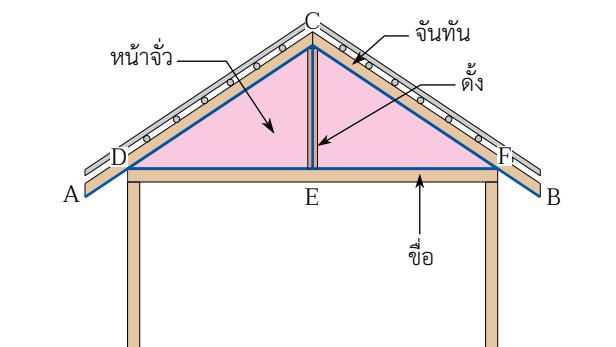
นักเรียนสามารถดาวน์โหลดไฟล์ GSP เพื่อสำรวจพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก



จากตัวอย่างและกิจกรรมข้างต้นเป็นการแสดงความสัมพันธ์ตามทฤษฎีบทพีทาโกรัสที่กล่าวอีกแบบหนึ่ง ดังนี้

สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก

ตัวอย่างที่ 3 โครงหลังคาหน้าจั่วมีส่วนประกอบต่าง ๆ ดังภาพ



จากภาพ

CA และ CB เป็นความยาวของจันทัน
AD และ BF เป็นความยาวของชายคา
DF เป็นความยาวของฝ้า
CE เป็นความยาวของฝ้า (ส่วนที่เป็นฝ้าจะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับฝ้า)
 $\triangle CDE$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
ซึ่งส่วนนี้ของโครงหลังคาเรียกว่า หน้าจั่ว

ถ้าจันทันของโครงหลังคาบ้านหลังหนึ่งยาว 4.6 เมตร ฝ้ายาว 1.6 เมตร และฝ้ายาว 6 เมตร ชายคามีความยาวเท่าใด

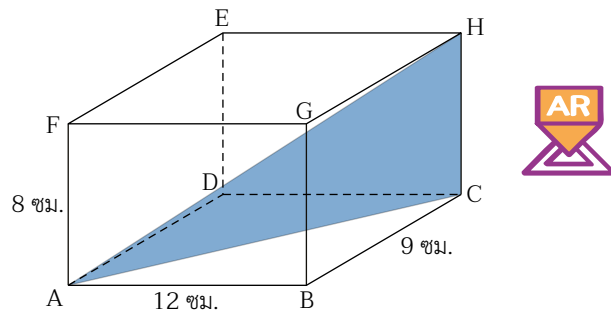
วิธีทำ เนื่องจาก $CA = 4.6$ เมตร $CE = 1.6$ เมตร $DF = 6$ เมตร
ฝ้าแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับฝ้า จึงได้ว่า $DE = EF = 3$ เมตร
เนื่องจาก $\triangle CDE$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมี $\angle CED$ เป็นมุมฉากจะได้
$$CD^2 = DE^2 + EC^2$$
$$= 3^2 + 1.6^2$$
$$= 9 + 2.56$$
$$= 11.56$$
$$CD = 3.4$$
 เนื่องจาก $DA = CA - CD$
$$= 4.6 - 3.4$$
$$= 1.2$$

ดังนั้น ชายคามีความยาว 1.2 เมตร

ตอบ 1.2 เมตร



ตัวอย่างที่ 4 ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABCDEFGH มี $AB = 12$ เซนติเมตร $BC = 9$ เซนติเมตร และ $AF = 8$ เซนติเมตร ดังรูป จงหาความยาวของ $\overline{AH}$



วิธีทำ เนื่องจาก $\triangle ACH$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มี $\angle C$ เป็นมุมฉาก

$$\text{ดังนั้น } AH^2 = AC^2 + CH^2$$

หา AC^2 จาก $\triangle ABC$

เนื่องจาก $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มี $\angle B$ เป็นมุมฉาก

$$\text{ดังนั้น } AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= 12^2 + 9^2$$

$$= 225$$

$$\text{จะได้ } AH^2 = 225 + CH^2$$

$$= 225 + 8^2$$

$$= 289$$

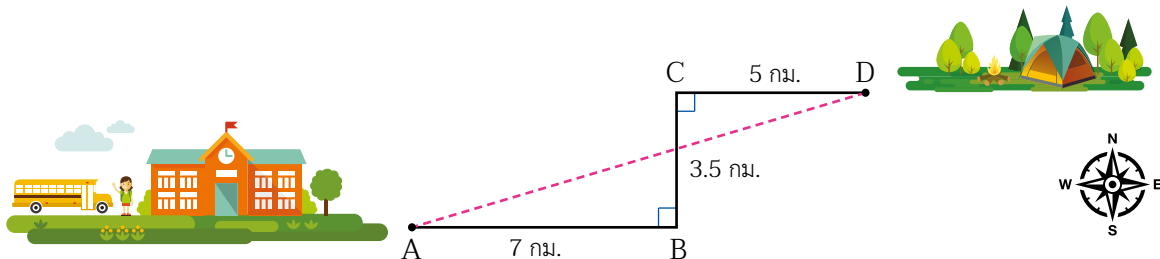
$$AH = 17$$

ดังนั้น $\overline{AH}$ ยาว 17 เซนติเมตร

ตอบ 17 เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 5 ลูกเสือกองหนึ่งออกเดินทางไกลจากโรงเรียนไปยังค่ายพักแรมแห่งหนึ่ง จากแผนที่ที่นายกองได้รับ พวกเขาจะต้องเดินทางจากโรงเรียนไปทางทิศตะวันออก 7 กิโลเมตร แล้วเลี้ยวซ้ายตรงไปทางทิศเหนือ 3.5 กิโลเมตร จากนั้น เลี้ยวขวาตรงไปทางทิศตะวันออกอีก 5 กิโลเมตร จึงจะถึงค่ายพักแรม อยากทราบว่าค่ายพักแรมนี้อยู่ห่างจากโรงเรียนกี่กิโลเมตร

วิธีทำ



กำหนดให้ จุด A และจุด D แทนที่ตั้งโรงเรียน และค่ายพักแรม ตามลำดับ

AB แทนระยะห่างจากโรงเรียนไปทางทิศตะวันออก 7 กิโลเมตร

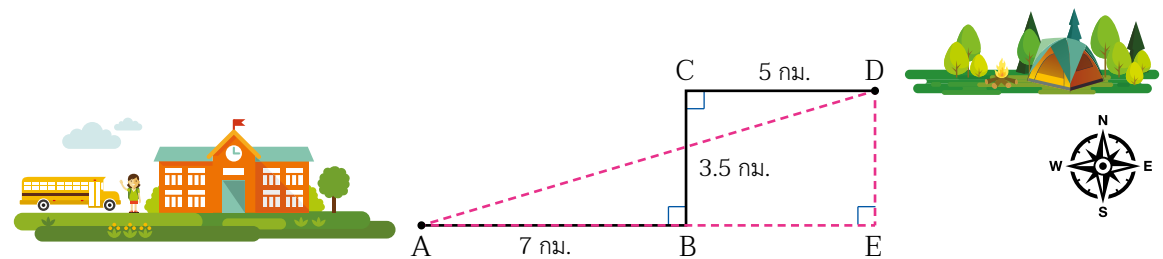
BC แทนระยะห่างจากจุด B ไปทางทิศเหนือ 3.5 กิโลเมตร

CD แทนระยะห่างจากจุด C ไปทางทิศตะวันออก 5 กิโลเมตร

AD แทนระยะห่างจากโรงเรียนถึงค่ายพักแรม

ต่อ $\overline{AB}$ ไปทางจุด B ให้พบกับเส้นตรงที่ลากจากจุด D และขนานกับ $\overline{CB}$ ที่จุด E

จะได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก BEDC และรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก AED ที่มี $\angle E$ เป็นมุมฉาก ดังรูป



จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\text{จะได้ } AD^2 = AE^2 + ED^2$$

$$\text{เนื่องจาก } BE = CD = 5$$

$$\text{จากรูป จะได้ว่า } AE = AB + BE$$

$$= 7 + 5$$

$$= 12$$

$$\text{และจาก } ED = BC = 3.5$$

$$\text{ดังนั้น } AD^2 = 12^2 + 3.5^2$$

$$= 144 + 12.25$$

$$= 156.25$$

$$AD = 12.5$$

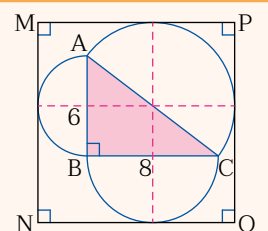
นั่นคือ ค่ายพักแรมนี้อยู่ห่างจากโรงเรียน 12.5 กิโลเมตร

ตอบ 12.5 กิโลเมตร



ชวนคิด 1.1

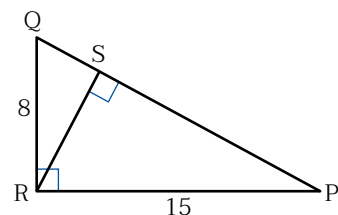
$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มี $\angle B$ เป็นมุมฉาก กำหนด $AB = 6$ หน่วย และ $BC = 8$ หน่วย ส่วนโค้งบนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปครึ่งวงกลมที่สัมผัสกับรูปสี่เหลี่ยม $MNOP$ ดังรูป จงหาว่ารูปสี่เหลี่ยม $MNOP$ มีพื้นที่ประมาณกี่ตารางหน่วย



แบบฝึกหัด 1.1 ข

1. จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 7 เซนติเมตร และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 25 เซนติเมตร

2. กำหนดให้ $\triangle PQR$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยที่ RS ตั้งฉากกับ PQ ที่จุด S ดังรูป ถ้า $RP = 15$ หน่วย และ $QR = 8$ หน่วย จงหา

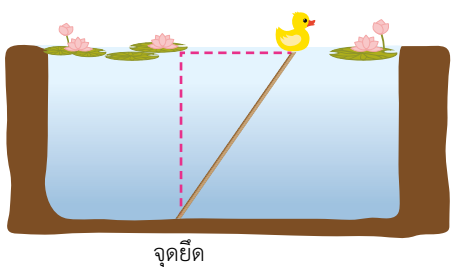


- 1) พื้นที่ของ $\triangle PQR$
- 2) ความยาวของ PQ
- 3) ความยาวของ RS

3. ร้านขายน้ำปั่นแห่งหนึ่ง ต้องการซื้อหลอดมาใช้กับแก้วใส่น้ำปั่นซึ่งมีลักษณะเป็นทรงกระบอก เจ้าของร้านจึงวัดขนาดแก้ว พบว่า แก้วสูง 6 นิ้ว และมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 2.5 นิ้ว อยากทราบว่าเจ้าของร้านจะต้องซื้อหลอดที่มีความยาวไม่น้อยกว่ากี่นิ้ว เพื่อให้หลอดไม่มีโอกาสที่จะอยู่ต่ำกว่าขอบแก้ว

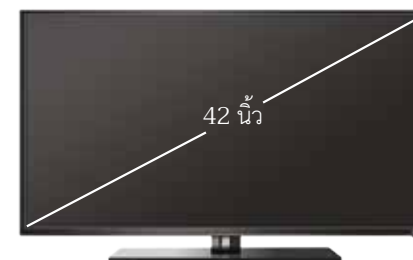


4. บ้านของมาวิน โรงเรียน และร้านอาหารของคุณแม่ อยู่ในตำแหน่งที่เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยร้านอาหารอยู่ห่างจากบ้านของมาวิน 1.5 กิโลเมตร และอยู่ห่างจากโรงเรียน 2 กิโลเมตร ดังรูป ตอนเช้ามาวินขี่จักรยานจากบ้านตรงไปที่โรงเรียนโดยไม่ผ่านร้านอาหาร แต่ทุก ๆ วันหลังเลิกเรียน มาวินต้องไปช่วยคุณแม่เก็บของและทำความสะอาดร้านอาหารก่อนที่จะกลับบ้าน อยากทราบว่าในแต่ละวันมาวินจะขี่จักรยานเป็นระยะทางอย่างน้อยกี่กิโลเมตร

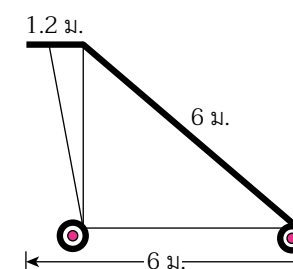


5. บ้านของภาวิณีมีสระบัว ซึ่งลึก 0.80 เมตร คุณพ่อของเธอได้ซื้อโคมไฟลอยน้ำเพื่อมาประดับสระบัวเพิ่มเติม โดยโคมไฟลอยน้ำที่ซื้อมานี้มีเชือกสำหรับรั้งโคมไฟไม่ให้ลอยไปไกล ซึ่งเชือกนี้จะยึดไว้กับพื้นสระบัว ถ้าเชือกสำหรับรั้งโคมไฟนี้ยาว 1 เมตร จงหาว่าโคมไฟลอยน้ำนี้จะลอยห่างจากจุดบนผิวน้ำที่ตรงกับจุดยึดเชือกที่กั้นสระได้ไม่เกินกี่เมตร

6. เราใช้ความยาวของเส้นทแยงมุมของหน้าจอเครื่องรับโทรทัศน์ เพื่อบอกขนาดของเครื่องรับโทรทัศน์ เล็กชื่อเครื่องรับโทรทัศน์แบบไร้ขอบ ขนาดหน้าจอ 42 นิ้ว สูง 20 นิ้ว และมีฐานตั้งเครื่องรับโทรทัศน์สูง 5 นิ้ว มาให้คุณแม่เครื่องหนึ่ง ถ้าที่บ้านของคุณแม่มีชั้นวางของที่มีลักษณะเป็นช่องรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง 35 นิ้ว และสูง 30 นิ้ว อยากทราบว่า เครื่องรับโทรทัศน์เครื่องนี้จะวางที่ชั้นวางของนี้ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด



7. ในการขึ้น-ลงจากเครื่องบิน ถ้าเครื่องบินไม่ได้เข้ามาเทียบท่าที่สะพานเทียบเครื่องบินก็จะมีบันไดเทียบเครื่องบินสำหรับผู้โดยสารขึ้น-ลงจากเครื่องบิน ซึ่งบันไดเทียบเครื่องบินจะมีทางเดินก่อนลงบันได ถ้าบันไดเทียบเครื่องบินอันหนึ่งมีทางเดินก่อนลงบันไดขั้นแรกยาว 1.20 เมตร ความยาวของบันไดเป็น 6 เมตร และบันไดขั้นสุดท้ายอยู่สูงจากพื้น 0.25 เมตร เมื่อเทียบบันไดกับเครื่องบินแล้ว เชิงบันไดจะอยู่ห่างจากแนวประตูเครื่องบิน 6 เมตร ดังรูป อยากทราบว่าทางเดินก่อนลงบันไดนี้จะอยู่สูงจากพื้นกี่เมตร



เกร็ดน่ารู้



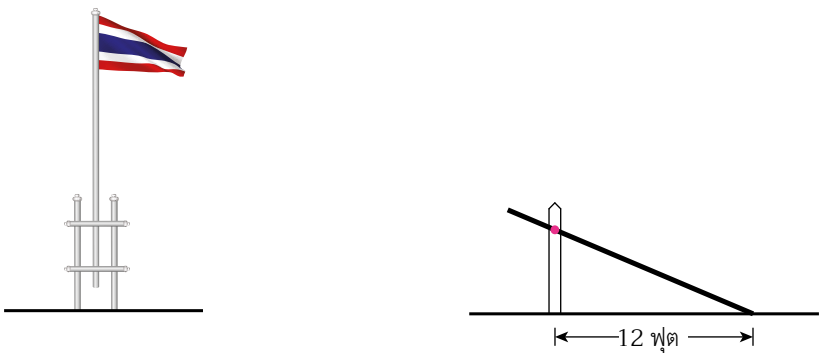
เมื่อผู้โดยสารเครื่องบินเดินออกจากตัวอาคารเพื่อเข้าสู่เครื่องบิน จะต้องเดินผ่านช่องทางเดินที่มีลักษณะคล้ายอุโมงค์ที่ทอดยาวไปจนถึงประตูเครื่องบิน ซึ่งอุโมงค์นี้สามารถยืดออกไปจนถึงประตูเครื่องบินและหดกลับเข้ามาที่เดิมเมื่อไม่มีเครื่องบินจอดเทียบ เรียกว่า สะพานเทียบเครื่องบินหรือวงช้าง

8. บันไดยาว 6.5 เมตร วางพิงผนังตึก ให้เชิงบันไดห่างจากผนัง 2.5 เมตร อยากทราบว่า

- 1) ปลายบนของบันไดอยู่สูงจากพื้นกี่เมตร
- 2) ถ้าต้องการพิงบันไดให้ปลายบนของบันไดอยู่สูงจากพื้นน้อยกว่า 6 เมตร ควรจะวางเชิงบันไดห่างจากผนังตึกมากกว่าหรือน้อยกว่า 2.5 เมตร เพราะเหตุใด



9. เสาธงต้นหนึ่ง ตั้งตรงอยู่ด้วยเสาข้างสองต้นซึ่งมีสลักยึดติดอยู่ 2 ตัว โดยสลักตัวบนอยู่สูงจากพื้นดิน 5 ฟุต นายสะอาดต้องการหาสี่เสาธง จึงถอดสลักตัวล่างแล้วหมุนเสาธงลงมาจนกระทั่งยอดเสาธงแตะพื้น และทำให้ยอดเสาธงห่างจากแนวโคนเสาข้าง 12 ฟุต ดังรูป อยากทราบว่าเสาธงต้นนี้เมื่อตั้งตรง ยอดเสาธงจะอยู่ห่างจากพื้นดินกี่ฟุต



10. โรงเรียนแห่งหนึ่งตั้งอยู่ติดริมน้ำ ทุก ๆ ปีโรงเรียนแห่งนี้จะจัดงานลอยกระทง เพื่อให้ชาวบ้านในชุมชนรอบโรงเรียนได้มาร่วมงาน ในปีนี้ คณะกรรมการจัดงานต้องการประดับธงรวระหว่างหลังคาของอาคารเรียนสองหลัง ซึ่งอาคารเรียนหลังแรกสูง 15 เมตร อาคารเรียนหลังที่สองสูง 10 เมตร และอาคารเรียนทั้งสองหลังห่างกัน 12 เมตร อยากทราบว่า

1) ถ้าต้องการผูกธงราวให้เป็นสายโยงระหว่างอาคารเรียนสองหลัง ดังรูป จะต้องใช้ธงราวที่ยาวอย่างน้อยกี่เมตร



2) ถ้ามีธงราวยาว 33 เมตร อยู่สายหนึ่ง และต้องการผูกธงราวจากมุมของอาคารเรียนหลังหนึ่งไปยังอีกมุมหนึ่งของอาคารเรียนอีกหลังหนึ่ง ดังรูป จะสามารถทำได้หรือไม่ เมื่อทราบว่าอาคารเรียนแต่ละหลังยาว 32 เมตร ถ้าทำได้ จะเหลือธงราวกี่เมตร และถ้าทำไม่ได้ คณะกรรมการจัดงานจะต้องหาธงราวเพิ่มอีกอย่างน้อยกี่เมตร



11. โตได้เป็นนักกีฬาเบสบอลระดับประเทศ เขาได้รับคัดเลือกให้ไปแข่งขันเบสบอลในต่างประเทศ แต่เขายังไม่มีกระเป๋าเดินทาง จึงหาซื้อกระเป๋าเดินทางจากเว็บไซต์ขายของแห่งหนึ่ง ซึ่งประกาศขายกระเป๋าเดินทาง 3 แบบ ดังนี้

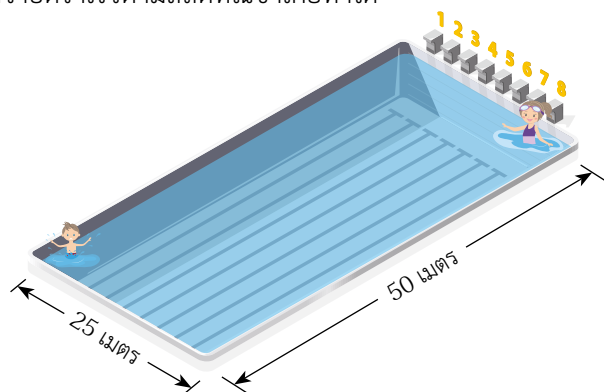


รูปแบบกระเป๋า	 แบบที่ 1	 แบบที่ 2	 แบบที่ 3
ความกว้างภายใน (นิ้ว)	14	15	17
ความยาวภายใน (นิ้ว)	20	22	23
ความลึกภายใน (นิ้ว)	10.5	11	10
ราคา (บาท)	1,990	2,290	2,490

โตได้ต้องนำไม้เบสบอล ซึ่งมีลักษณะคล้ายทรงกระบอกยาว $26\frac{3}{4}$ นิ้ว ผ่านศูนย์กลางประมาณ $2\frac{1}{2}$ นิ้ว ใส่ลงในกระเป๋าใบนี้ด้วย อยากทราบว่า โตได้ควรซื้อกระเป๋าแบบใด จึงจะสามารถบรรจุไม้เบสบอลได้ และมีราคาถูกที่สุด

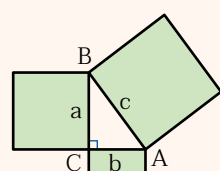


12. จากสถิติการว่ายน้ำของนิชา ซึ่งเป็นนักกีฬาว่ายน้ำของจังหวัด พบว่า อัตราเร็วสูงสุดในการว่ายน้ำที่นิชาเคยทำได้ คือ 6 กิโลเมตรต่อชั่วโมง วันหนึ่ง นิชาไปซ้อมว่ายน้ำที่สระรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งกว้าง 25 เมตร และยาว 50 เมตร และกำลังพักอยู่ที่มุมสระ เธอเห็นเด็กคนหนึ่งกำลังจะจมน้ำอยู่ที่มุมสระฝั่งตรงข้ามกับเธอ นิชาจึงว่ายน้ำไปช่วยเด็กคนนั้น โดยเธอใช้เวลาตั้งแต่ออกว่ายจนถึงตัวเด็กประมาณ 30 วินาที อยากทราบว่าอัตราเร็วในการว่ายน้ำในครั้งนี้น่ามากหรือน้อยกว่าอัตราเร็วตามสถิติที่นิชาเคยทำได้

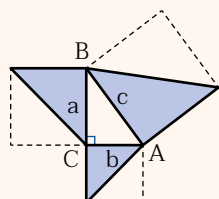


ชวนคิด 1.2

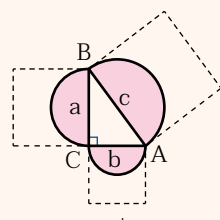
กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มี $\angle C$ เป็นมุมฉาก ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว c หน่วย ด้านประกอบมุมฉากยาว a หน่วย และ b หน่วย ดังรูป



รูปที่ 1



รูปที่ 2



รูปที่ 3

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก หรือ $c^2 = a^2 + b^2$

- จากรูปที่ 1 ถ้าลากเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของ $\triangle ABC$ ดังรูปที่ 2 แล้ว นักเรียนคิดว่าพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากบนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากบนด้านประกอบมุมฉากหรือไม่ จงอธิบาย
- ถ้าสร้างครึ่งวงกลมบนด้านทั้งสามของ $\triangle ABC$ ดังรูปที่ 3 จะได้พื้นที่ของครึ่งวงกลมบนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่ของครึ่งวงกลมบนด้านประกอบมุมฉากหรือไม่ จงอธิบาย
- นักเรียนคิดว่า ยังมีรูปเรขาคณิตอื่น ๆ ที่สร้างบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC แล้วพื้นที่ของรูปเหล่านั้นมีความสัมพันธ์ในลักษณะเดียวกันกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสอีกหรือไม่ ถ้ามี จงยกตัวอย่างมาอย่างน้อย 1 รูป



เกร็ดน่ารู้



พีทาโกรัสแห่งซามอส เป็นนักปราชญ์และนักคณิตศาสตร์ชาวกรีก สันนิษฐานว่าเขาเกิดที่เกาะซามอส แห่งทะเลเอเจียน (Aegean)

ในวัยหนุ่ม พีทาโกรัสได้ศึกษากับปราชญ์ที่มีชื่อเสียงหลายคน รวมทั้งทาเลสแห่งมิลีตุส (Thales of Miletus, ประมาณ 640–546 ปีก่อนคริสต์ศักราช) ซึ่งเป็นผู้แนะนำให้พีทาโกรัสไปศึกษาต่อทางคณิตศาสตร์และแขนงวิชาต่าง ๆ ที่อียิปต์ หลังจากพีทาโกรัสใช้เวลาศึกษาที่อียิปต์อยู่นานพอสมควร เขาก็ได้เดินทางไปศึกษาต่อที่บาบิโลเนีย

พีทาโกรัสได้เดินทางกลับมายังเกาะซามอส เมื่ออายุประมาณ 55 ปี ขณะนั้น เกาะซามอสตกอยู่ภายใต้การปกครองของเปอร์เซีย เขาจึงอพยพไปยังเมืองโครโตนา (Crotona) ซึ่งเป็นเมืองท่าของกรีกโบราณที่ตั้งอยู่ทางตอนใต้ของอิตาลีในปัจจุบัน ที่นั่น พีทาโกรัสได้ก่อตั้งสำนักศึกษาขึ้น โดยมีชื่อว่า “สำนักพีทาโกเรียน (Pythagorean School)” มีตราประจำสำนักเป็นรูปดาวห้าแฉก และมีปรัชญาประจำสำนักคือ จำนวนครอบครองจักรวาล (Numbers rule the universe) ซึ่งในสมัยนั้น จำนวน หมายถึง จำนวนตรรกยะบวกและศูนย์



อนุสาวรีย์พีทาโกรัสที่เกาะซามอส

สำนักพีทาโกเรียนนี้มีชื่อเสียงในด้านปรัชญา คณิตศาสตร์ และธรรมชาติวิทยาหรือวิทยาศาสตร์สมัยใหม่ นอกจากนี้ ยังเป็นที่เชื่อและยอมรับกันว่าพีทาโกรัสเป็นผู้ที่พิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจนเป็นที่ยอมรับเป็นคนแรกถึงแม้ความจริงเกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะมีหลักฐานที่เชื่อกันว่า ทฤษฎีบทดังกล่าวเป็นที่รู้จักกันมาก่อน

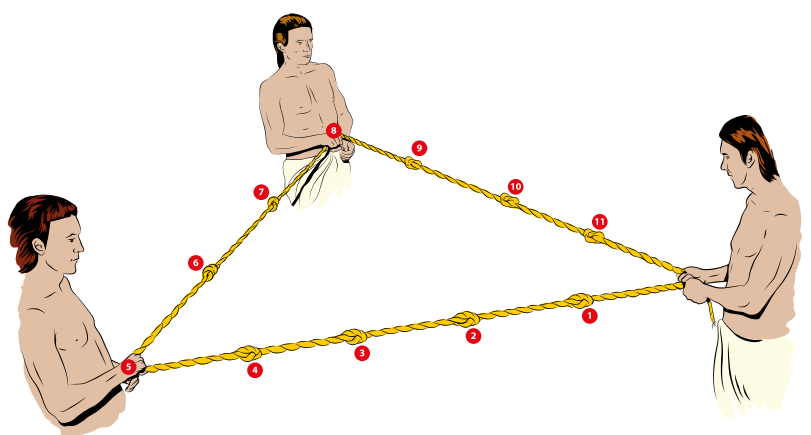
1.2 บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ในสมัยอียิปต์โบราณ ชาวบ้านที่อาศัยอยู่ริมฝั่งแม่น้ำไนล์มักประสบปัญหาน้ำท่วมที่ดิน ซึ่งเมื่อน้ำลดจะไม่สามารถชี้แนวเขตที่ดินเดิมของตนได้ จึงต้องมีการรังวัดที่ดินใหม่อยู่เสมอ ในสมัยนั้น เมื่อต้องการรังวัดที่ดินให้เป็นมุมฉาก ชาวบ้านจะใช้เชือกที่แบ่งออกเป็น 12 ส่วน เท่า ๆ กัน โดยใช้ปม 11 ปม นำมาขึงให้เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาว 3, 4 และ 5 หน่วย ก็จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 5 หน่วย



ชวนคิด 1.3

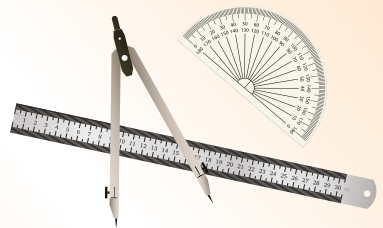
นอกจากเชือก 11 ปม ที่นำมาขึงให้ได้ความยาวของด้านเป็น 3, 4 และ 5 หน่วยแล้วยังมีเชือกที่แบ่งเป็นส่วนที่เท่า ๆ กัน ที่นำมาขึงแล้วทำให้เกิดเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวของด้านเป็นแบบอื่น ๆ ได้อีกหรือไม่ ถ้ามี จงยกตัวอย่าง





กิจกรรม : สำรวจรูปสามเหลี่ยม

- อุปกรณ์
- ❖ โพรแทรกเตอร์
 - ❖ ไม้บรรทัด
 - ❖ วงเวียน



ขั้นตอนการทำกิจกรรม

- จากความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้ ให้เลือกอย่างน้อย 2 ชุด แล้วสร้าง $\triangle ABC$ โดยใช้ไม้บรรทัดและวงเวียน ให้มีความยาวของด้านเป็นไปตามชุดของความยาวของด้านที่เลือก และให้ a , b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A , B และ C ของ $\triangle ABC$ ตามลำดับ
 - ❖ ชุดที่ 1 $a = 12$ เซนติเมตร $b = 9$ เซนติเมตร $c = 15$ เซนติเมตร
 - ❖ ชุดที่ 2 $a = 12$ เซนติเมตร $b = 6$ เซนติเมตร $c = 13$ เซนติเมตร
 - ❖ ชุดที่ 3 $a = 4$ เซนติเมตร $b = 7.5$ เซนติเมตร $c = 8.5$ เซนติเมตร

- ❖ ชุดที่ 4 $a = 12$ เซนติเมตร $b = 12$ เซนติเมตร $c = 18$ เซนติเมตร
- ❖ ชุดที่ 5 $a = 16.5$ เซนติเมตร $b = 7.5$ เซนติเมตร $c = 18$ เซนติเมตร
- ❖ ชุดที่ 6 $a = 3.5$ เซนติเมตร $b = 12$ เซนติเมตร $c = 12.5$ เซนติเมตร

- ใช้โพรแทรกเตอร์วัดขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านที่ยาวที่สุดของรูปสามเหลี่ยม $\triangle ABC$ ที่นักเรียนสร้างขึ้นนี้ จากนั้นให้นักเรียนเติมขนาดของมุมที่วัดได้ลงในตาราง พร้อมทั้งเติมข้อมูลต่างๆที่หาได้ลงในตารางด้วย
- แลกเปลี่ยนผลที่ได้จากการสร้างและการวัดกับเพื่อน แล้วเติมตารางให้สมบูรณ์

ชุดที่	a	b	c	$a^2 + b^2$	c^2	$a^2 + b^2 = c^2$ หรือไม่		ขนาดของ $\angle C$ (องศา)	$\triangle ABC$ เป็น รูปสามเหลี่ยม มุมฉาก หรือไม่	
						เท่า	ไม่เท่า		เป็น	ไม่เป็น
1	12	9	15							
2	12	6	13							
3	4	7.5	8.5							
4	12	12	18							
5	16.5	7.5	18							
6	3.5	12	12.5							



คำถามท้าทายกิจกรรม

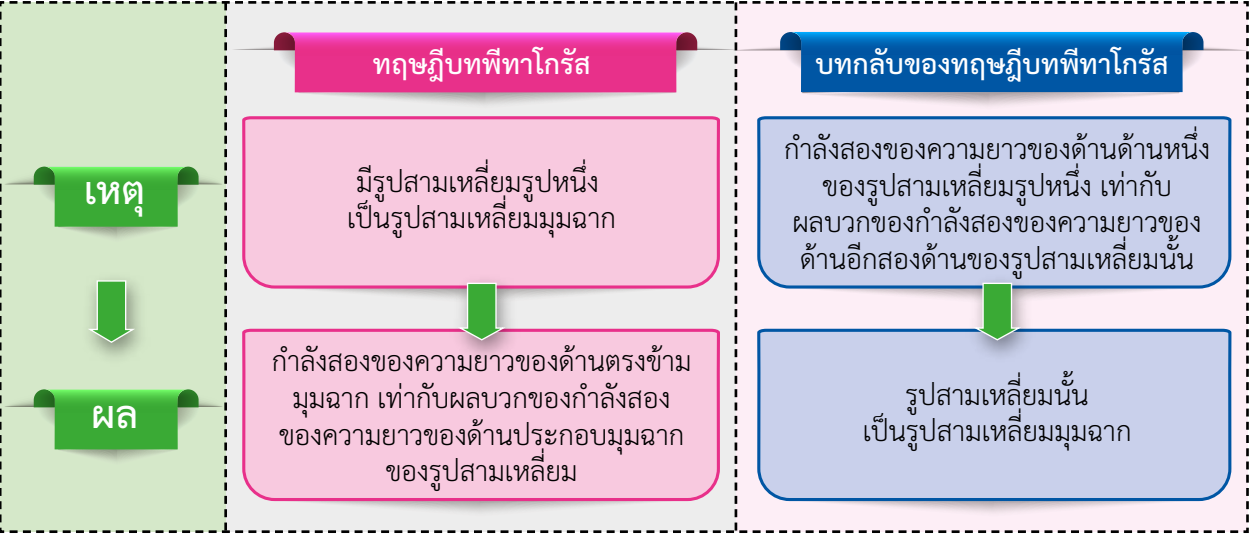
- นักเรียนคิดว่า รูปสามเหลี่ยมทุกรูปที่มีความสัมพันธ์ของความยาวของด้านเป็น $c^2 = a^2 + b^2$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่
- รูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์ของความยาวของด้านเป็น $c^2 = a^2 + b^2$ มีด้านใดยาวที่สุด
- นักเรียนคิดว่า รูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์ของความยาวของด้านเป็น $c^2 = a^2 + b^2$ มุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านที่ยาวที่สุด จะเป็นมุมฉากเสมอหรือไม่

จากกิจกรรมข้างต้น สามารถสร้างข้อความคาดการณ์ได้ว่า ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ และ $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมีด้านที่ยาว c หน่วย เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

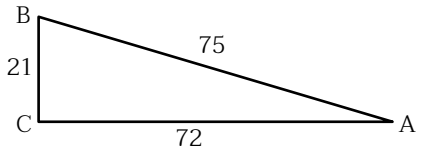
ข้อความคาดการณ์นี้เป็นจริงตาม**บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส (converse of Pythagoras' theorem)** ที่ว่า

สำหรับรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ถ้ากำลังสองของความยาวของด้านด้านหนึ่งเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านอีกสองด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสเป็นการนำผลของทฤษฎีบทพีทาโกรัสมาเป็นเหตุ และนำเหตุมาเป็นผล ซึ่งอธิบายได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 1 $\triangle ABC$ มีด้านยาว 21 เซนติเมตร 72 เซนติเมตร และ 75 เซนติเมตร ดังรูป อยากทราบว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

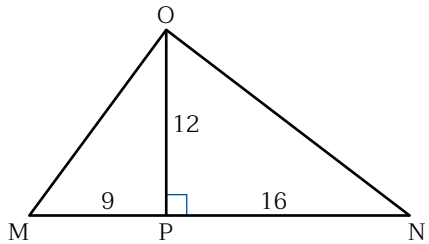


วิธีทำ จากรูป ให้ $a = 21$ $b = 72$ $c = 75$
จะได้ $a^2 = 441$ $b^2 = 5,184$ $c^2 = 5,625$
และ $a^2 + b^2 = 441 + 5,184 = 5,625$
ดังนั้น $c^2 = a^2 + b^2$

โดยบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส สรุปได้ว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ตอบ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดรูปสามเหลี่ยม MNO ดังรูป จงแสดงว่า $\triangle MNO$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



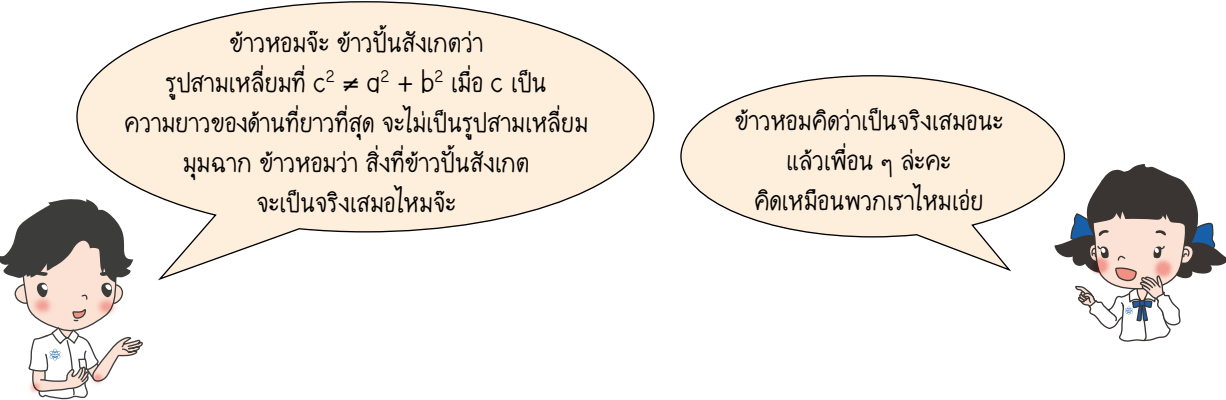
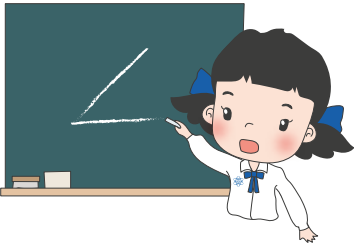
วิธีทำ จากรูป $\triangle OPN$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
จะได้ $NO^2 = OP^2 + PN^2$
 $= 12^2 + 16^2$
 $= 144 + 256$
 $= 400$

จากรูป $\triangle MPO$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
จะได้ $OM^2 = MP^2 + PO^2$
 $= 9^2 + 12^2$
 $= 81 + 144$
 $= 225$

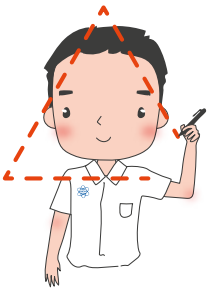
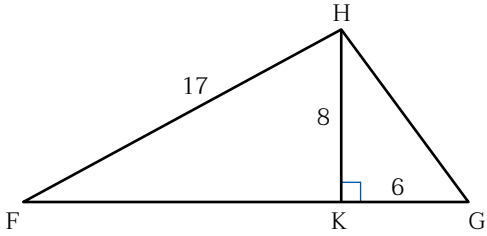
เนื่องจาก $OM^2 + NO^2 = 225 + 400$
 $= 625$

และ $MN^2 = (9 + 16)^2$
 $= 25^2$
 $= 625$

ดังนั้น $MN^2 = OM^2 + NO^2$
โดยบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส สรุปได้ว่า $\triangle MNO$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



ตัวอย่างที่ 3 กำหนดรูปสามเหลี่ยม FGH ดังรูป HK ตั้งฉากกับ FG, HK = 8 หน่วย HF = 17 หน่วย และ KG = 6 หน่วย อยากทราบว่า รูปสามเหลี่ยม FGH เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่



วิธีทำ จากรูป $\triangle HKG$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
จะได้ $GH^2 = HK^2 + KG^2$
 $= 8^2 + 6^2$
 $= 100$
ดังนั้น $GH = 10$ หน่วย
จากรูป $\triangle FKH$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
จะได้ $HF^2 = FK^2 + KH^2$
 $17^2 = FK^2 + 8^2$
 $FK^2 = 17^2 - 8^2$
 $= 225$
ดังนั้น $FK = 15$ หน่วย
เนื่องจาก $FG = FK + KG$
 $= 15 + 6$
 $= 21$
จะได้ $FG^2 = 21^2 = 441$
และจาก $GH^2 + HF^2 = 10^2 + 17^2$
 $= 389$
จะเห็นว่า $FG^2 \neq GH^2 + HF^2$
ดังนั้น $\triangle FGH$ ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
ตอบ $\triangle FGH$ ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

1.2 มุมคณิต

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะทำให้เราได้ข้อสรุปว่า สำหรับรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ถ้ากำลังสองของความยาวของด้านที่ยาวที่สุด ไม่เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านสองด้านที่เหลือ แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ชวนคิด 1.4

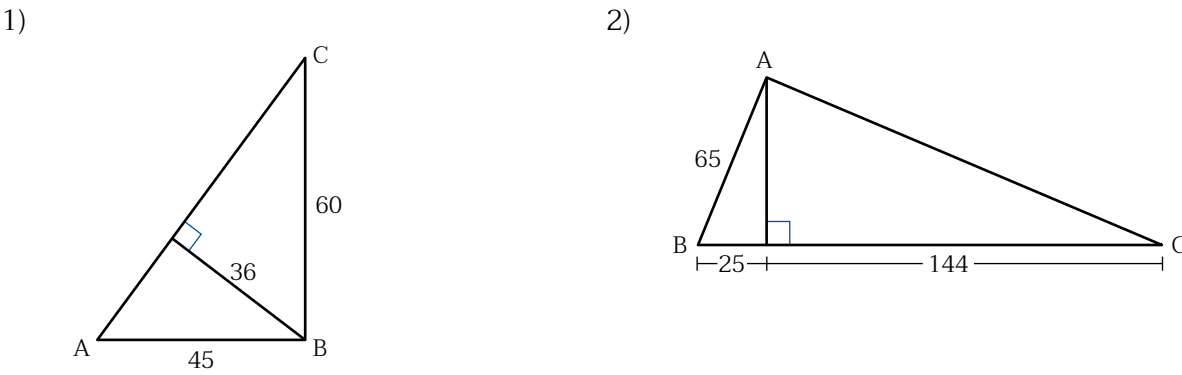
- เมื่อ a, b และ c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ของรูปสามเหลี่ยม ABC ตามลำดับ อยากทราบว่า
1. ถ้า $c^2 < a^2 + b^2$ แล้ว $\angle C$ จะมีขนาดน้อยกว่าหรือมากกว่า 90°
 2. ถ้า $c^2 > a^2 + b^2$ แล้ว $\angle C$ จะมีขนาดน้อยกว่าหรือมากกว่า 90°

แบบฝึกหัด 1.2

1. ถ้าต้องการสร้างรูปสามเหลี่ยมจากความยาวของด้านที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาว่ารูปสามเหลี่ยมที่สร้างได้นี้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

- | | | |
|------------------|---------------|---------------|
| 1) a = 11 หน่วย | b = 60 หน่วย | c = 61 หน่วย |
| 2) d = 20 หน่วย | e = 10 หน่วย | f = 12 หน่วย |
| 3) p = 0.6 หน่วย | q = 1.2 หน่วย | r = 1.4 หน่วย |
| 4) x = 0.5 หน่วย | y = 1.3 หน่วย | z = 1.2 หน่วย |

2. จงแสดงว่า $\triangle ABC$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



3. กำหนดให้ $\triangle ABC$ มี $\overline{CD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด D จงพิจารณาว่าความยาวที่กำหนดให้ในข้อใด ทำให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เพราะเหตุใด

- | | | |
|------------|---------|----------|
| 1) AC = 13 | BC = 15 | CD = 12 |
| 2) AC = 10 | BC = 17 | CD = 8 |
| 3) AC = 3 | BC = 4 | CD = 2.4 |

4. ชายคนหนึ่งต้องการตรวจสอบว่า ผนังบ้านตั้งฉากกับพื้นดินหรือไม่ เขาจึงทำเครื่องหมายที่ผนังบ้านสูงจากพื้นขึ้นไป 8 ฟุต แล้วใช้ปลายข้างหนึ่งของเชือกผูกที่จุดซึ่งทำเครื่องหมายไว้นั้น ปลายเชือกอีกข้างหนึ่งผูกไว้ที่หลักซึ่งปักอยู่บนพื้นดิน ดังรูป ถ้าความยาวของเชือกหลังจากผูกแล้วเป็น 10 ฟุต ระยะระหว่างหลักกับผนังบ้านควรเป็นเท่าไร จึงจะบอกได้ว่าผนังบ้านตั้งฉากกับพื้นดิน



5. พิสูจน์ต้องการจ้างช่างทำโต๊ะวางของสำหรับวางเข้ามุมห้องซึ่งเป็นมุมฉาก แต่คุณแม่บอกว่ามีโต๊ะรูปสามเหลี่ยมอยู่แล้ว โดยโต๊ะดังกล่าวมีความยาวแต่ละด้านเป็น 60 เซนติเมตร 150 เซนติเมตร และ 140 เซนติเมตร อยากทราบว่า โต๊ะตัวนี้จะวางเข้ามุมห้องได้พอดีหรือไม่ เพราะเหตุใด
6. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปหนึ่งมีด้านยาว 7 เซนติเมตร และ 12 เซนติเมตร มีเส้นทแยงมุมเส้นหนึ่งยาว 15 เซนติเมตร รูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นจากเส้นทแยงมุมนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ ถ้าไม่เป็น แล้วเส้นทแยงมุมอีกเส้นหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปนี้จะยาวหรือสั้นกว่า 15 เซนติเมตร



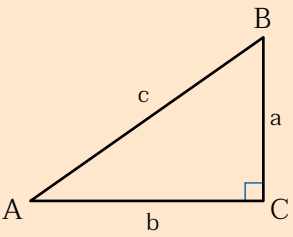
ตรวจสอบความเข้าใจ

รายการ	 สบายมาก	 ขอทบทวนอีกนิด
1. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก		
2. ทฤษฎีบทพีทาโกรัส		
3. บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส		



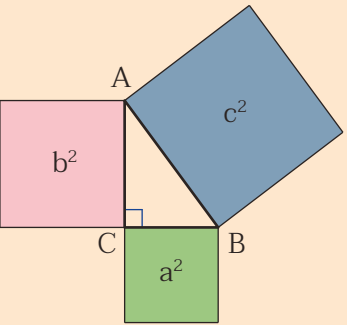
สรุปท้ายบท

- ❖ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส
- ♦ สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก



เมื่อ c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก
 a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉากแต่ละด้าน
จะได้ $c^2 = a^2 + b^2$

- ♦ สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก



- ❖ บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส
- สำหรับรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ถ้ากำลังสองของความยาวของด้านด้านหนึ่งเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านอีกสองด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



กิจกรรมท้ายบท : น้องตัวพลัดหลง

น้องตัวพลัดหลงกับคุณแม่ในสวนสนุกแห่งหนึ่ง คุณแม่จึงแจ้งให้ฝ่ายประชาสัมพันธ์ของสวนสนุกประกาศตามหา โดยหากใครพบเห็นน้องตัว ให้ช่วยพาน้องตัวกลับมาหาคุณแม่ที่วงเวียนน้ำพุของสวนสนุก

ถ้านักเรียนมีแผนผังเส้นทางของสวนสนุกซึ่งระบุมาตราส่วนกำกับไว้ด้วย ดังภาพ และเป็นผู้พบน้องตัวที่จุด A แต่นักเรียนไม่มีบัตรที่ที่จะใช้วัด นักเรียนจะพาน้องตัวไปพบคุณแม่ด้วยเส้นทางใดจึงจะใกล้ที่สุด และมีระยะทางประมาณกี่กิโลเมตร



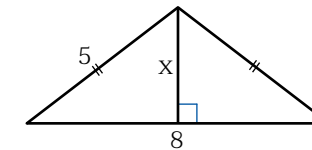
มาตราส่วน 1 หน่วย : 100 เมตร



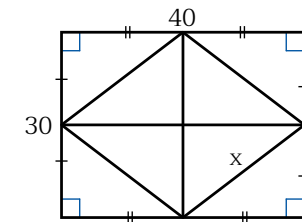
แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหาค่า x จากภาพในแต่ละข้อต่อไปนี้

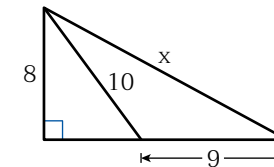
1)



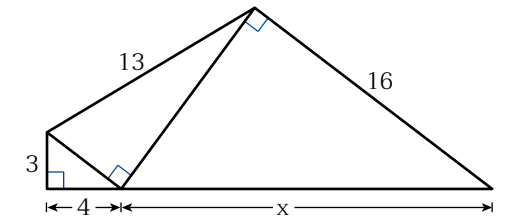
2)



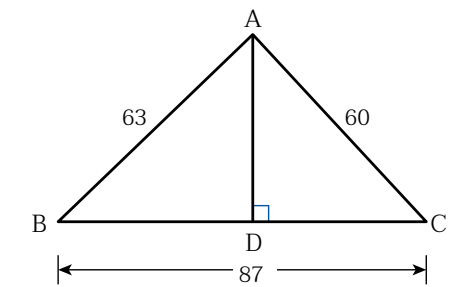
3)



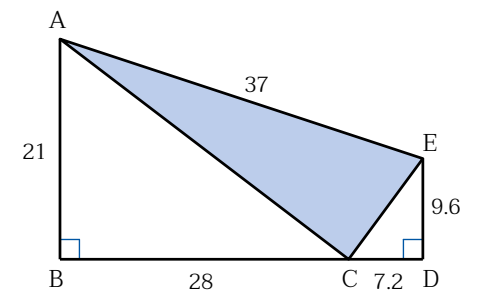
4)



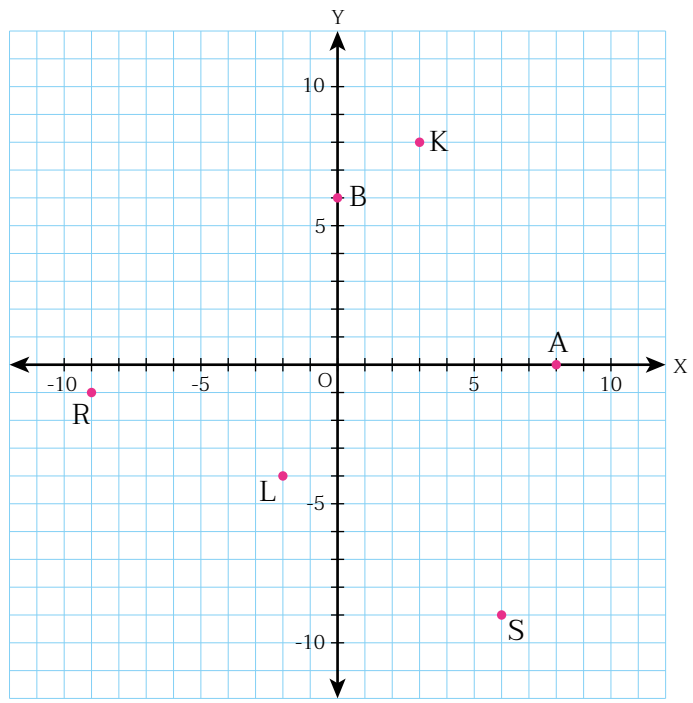
2. $\triangle ABC$ มี $AB = 63$ เซนติเมตร $AC = 60$ เซนติเมตร และ $BC = 87$ เซนติเมตร ดังรูป จงหาความยาวของส่วนสูง AD (ตอบเป็นทศนิยม 2 ตำแหน่ง)



3. จากรูป กำหนดให้ $AB = 21$ นิ้ว $BC = 28$ นิ้ว $CD = 7.2$ นิ้ว $DE = 9.6$ นิ้ว และ $AE = 37$ นิ้ว จงหาว่า $\triangle ACE$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใดและมีพื้นที่เท่าไร



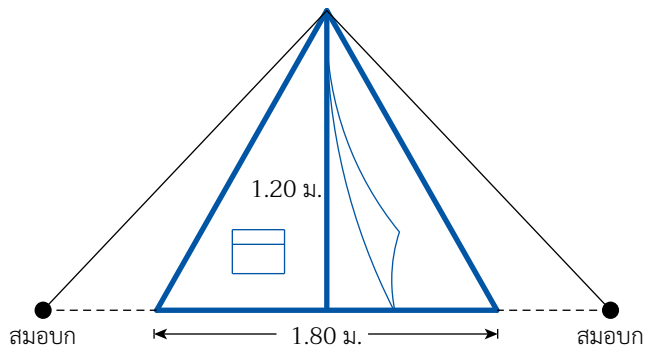
4.



จากกราฟของคู่อันดับที่กำหนดให้ จงหา

- 1) จุด A ห่างจากจุด B กี่หน่วย
- 2) จุด K ห่างจากจุด L กี่หน่วย
- 3) จุด R ห่างจากจุด S กี่หน่วย

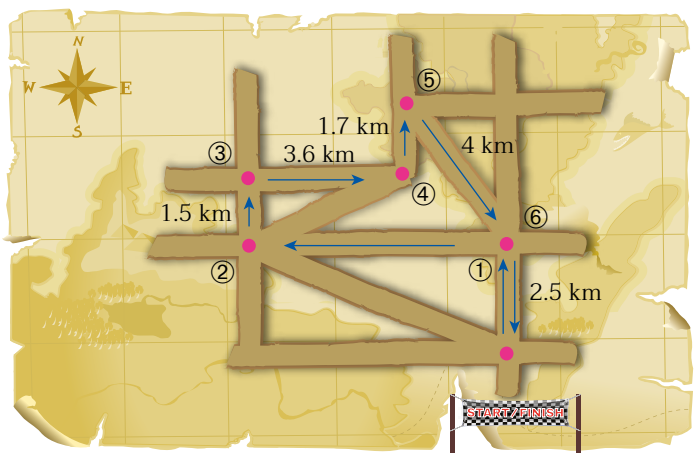
5. ขณะที่แมนกำลังกางเต็นท์สามเหลี่ยมหลังหนึ่ง ซึ่งมีขนาดกว้าง 1.80 เมตร ยาว 2 เมตร และสูง 1.20 เมตร เขาพบว่ามียี่เชือกแต่ละเส้นยาว 2.50 เมตร สำหรับใช้รั้งยอดเต็นท์กับสมอบก โดยต้องใช้เชือกอย่างน้อย 50 เซนติเมตร เพื่อพันกับสมอบก จงหาว่า เมื่อแมนตอกสมอบก ดังรูป สมอบกจะอยู่ห่างจากเต็นท์ได้มากที่สุดกี่เมตร



6. ตะวันเข้าร่วมการแข่งขันวิ่งรายการหนึ่ง ซึ่งมีรายการแข่งขันย่อย 3 รายการ คือ

- ❖ รายการที่ 1 ไม่เกิน 42 กิโลเมตร
- ❖ รายการที่ 2 ไม่เกิน 22 กิโลเมตร
- ❖ รายการที่ 3 ไม่เกิน 12 กิโลเมตร

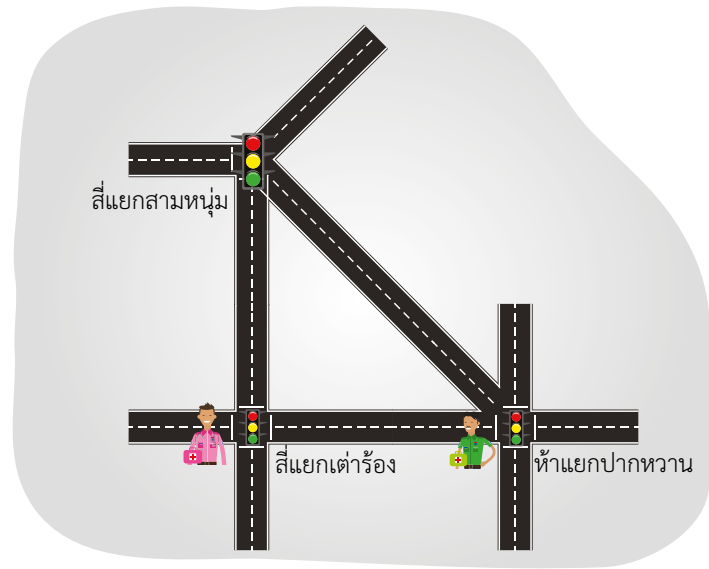
กติกาการแข่งขัน กำหนดให้เขาต้องวิ่งไปรับเหรียญที่จุดเช็กพอยต์ 6 จุด ก่อนที่จะเข้าเส้นชัย เพื่อเป็นการยืนยันว่าเขาได้วิ่งตามระยะทางที่ผู้จัดงานกำหนด ซึ่งรายการที่เขาวิ่งนั้นกำหนดให้เขาวิ่งจากจุดปล่อยตัวขึ้นไปทางทิศเหนือจนถึงจุดเช็กพอยต์ที่ 1 จากนั้น เลี้ยวซ้ายไปทางทิศตะวันตกจนถึงจุดเช็กพอยต์ที่ 2 แล้วจึงเลี้ยวขวาไปทางทิศเหนือ เมื่อถึงจุดเช็กพอยต์ที่ 3 ให้เลี้ยวขวาไปทางทิศตะวันออกจนถึงจุดเช็กพอยต์ที่ 4 จากนั้น เลี้ยวซ้ายไปทางทิศเหนือ เพื่อไปยังจุดเช็กพอยต์ที่ 5 และเลี้ยวกลับมายังจุดเช็กพอยต์ที่ 1 ซึ่งจะนับเป็นจุดเช็กพอยต์ที่ 6 ด้วย ก่อนจะวิ่งเข้าเส้นชัยโดยใช้เส้นทางเส้นเดียวกับตอนปล่อยตัว แผนผังแสดงเส้นทางวิ่ง และจุดเช็กพอยต์เป็นดังรูป



จงหา

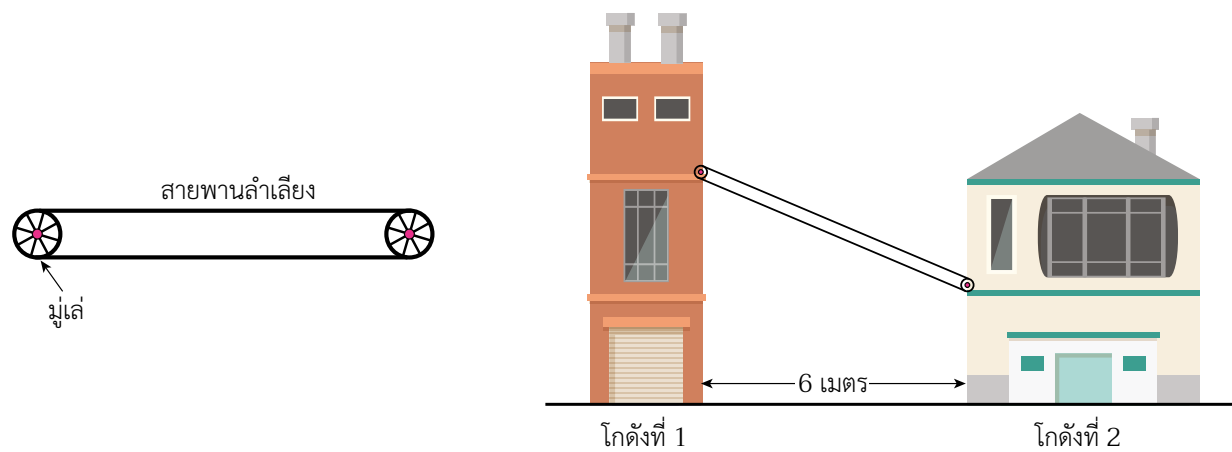
- ❖ 1) เขาหลงแข่งขันวิ่งในรายการย่อยใด และระยะทางที่เขาวิ่งจริงเป็นกี่กิโลเมตร
- 2) ถ้าจุดเช็กพอยต์ที่ 4 มีน้ำดื่มไม่เพียงพอ และเจ้าหน้าที่ที่จุดเช็กพอยต์ที่ 4 ได้รับแจ้งว่าให้ไปปรับน้ำดื่มเพิ่มเติมได้จากจุดเช็กพอยต์ที่ 2 เจ้าหน้าที่จะต้องมารับน้ำเป็นระยะทางอย่างน้อยที่สุดกี่กิโลเมตร
- ❖ 3) ถ้ารถพยาบาลต้องไปรับนักกีฬาที่บาดเจ็บที่จุดเช็กพอยต์ที่ 2 โดยรถพยาบาลจะแล่นจากจุดปล่อยตัวไปยังจุดเช็กพอยต์ดังกล่าว ด้วยอัตราเร็วเฉลี่ย 80 กิโลเมตรต่อชั่วโมง อยากทราบว่ารถพยาบาลจะใช้เวลาอย่างน้อยเท่าไรจึงจะไปถึงที่หมาย

7. หน่วยกู้ชีพสายฟ้าประจำการอยู่บริเวณสี่แยกเต่าร้อง ส่วนหน่วยกู้ชีพรถด่วนประจำการอยู่บริเวณห้าแยกปากหวาน โดยหน่วยกู้ชีพทั้งสองอยู่ห่างกัน 8 กิโลเมตร ดังรูป

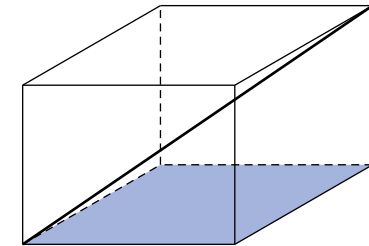
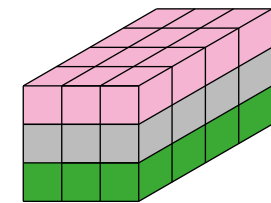


ในเช้าวันหนึ่ง เกิดอุบัติเหตุขึ้น ณ สี่แยกสามหนุม และมีพลเมืองดีโทรศัพท์แจ้งหน่วยกู้ชีพทั้งสองในเวลาเดียวกัน หน่วยกู้ชีพสายฟ้าใช้เวลาเตรียมตัว 2 นาที แล้วรีบขับรถกู้ชีพออกไปยังจุดเกิดเหตุ โดยใช้ระยะทางที่สั้นที่สุด และมีอัตราเร็วเฉลี่ยอยู่ที่ 80 กิโลเมตร/ชั่วโมง พวกเขาถึงจุดเกิดเหตุโดยใช้เวลารวม 13 นาที 15 วินาที ส่วนหน่วยกู้ชีพรถด่วนขับรถกู้ชีพออกไปยังจุดเกิดเหตุในทันที โดยใช้ระยะทางที่สั้นที่สุด และมีอัตราเร็วเฉลี่ยเท่ากับอัตราเร็วเฉลี่ยของรถของหน่วยกู้ชีพสายฟ้า อยากทราบว่า หน่วยกู้ชีพรถด่วนจะไปถึงจุดเกิดเหตุเร็วหรือช้ากว่าหน่วยกู้ชีพสายฟ้าอยู่เท่าไร

8. โรงงานแห่งหนึ่งต้องการที่จะส่งของจากชั้น 2 ของโกดังที่ 2 ไปยังชั้น 3 ของโกดังที่ 1 โดยใช้สายพานลำเลียง ถ้าโกดังที่ 1 และ 2 อยู่ห่างกัน 6 เมตร และความสูงในแต่ละชั้นของทุก ๆ โกดังเป็น 2.5 เมตร อยากทราบว่า โรงงานแห่งนี้จะต้องใช้สายพานลำเลียงที่ยาวอย่างน้อยกี่เมตร ถ้าปลายสายพานลำเลียงทั้งสองฝั่งคล้องอยู่กับมู่เล่ที่มีรัศมียาว 28 เซนติเมตร ดังรูป (กำหนด $\pi \approx \frac{22}{7}$)



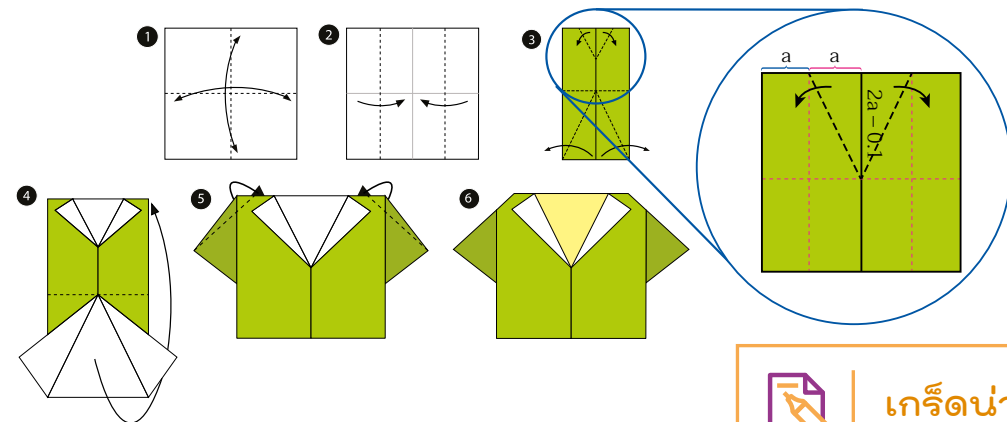
9. ชาวปูนต้องการทำกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากใบหนึ่ง ที่สามารถบรรจุลูกบาศก์ที่ยาวด้านละ 2.5 เซนติเมตร จำนวน 36 ลูก โดยเขาจะวางลูกบาศก์เรียงกันในกล่องดังภาพ



ถ้ากล่องที่ชาวปูนสร้างนั้น กว้าง 9 เซนติเมตร ยาว 12 เซนติเมตร และสูง 9 เซนติเมตร เมื่อวัดเส้นทแยงมุมกล่องเส้นหนึ่ง ปรากฏว่า เส้นทแยงมุมเส้นนี้ยาว 17 เซนติเมตร อยากทราบว่า

- 1) กล่องใบนี้เป็นกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากตามความตั้งใจของชาวปูนหรือไม่ เพราะเหตุใด
- 2) กล่องใบนี้สามารถใส่ลูกบาศก์ตามที่ชาวปูนต้องการได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

10. เอิร์นพับกระดาษรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 6.4×6.4 ตารางเซนติเมตร ให้เป็นรูปเสื้อตามขั้นตอนของศิลปะการพับกระดาษแบบโอริกามิดังรูปต่อไปนี้

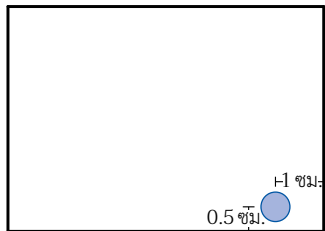


ถ้าในขั้นตอนที่ 3 เอิร์นพับกระดาษในส่วนที่เป็นปกเสื้อให้มีความยาวของแต่ละด้านของปกเสื้อเป็นดังรูป อยากทราบว่า เมื่อพับกระดาษแล้ว ถ้าเอิร์นต้องการนำเทปสีมาติดที่ขอบของพื้นที่ที่แรเงาด้วยสีเหลืองในขั้นตอนที่ 6 ทุกด้าน เอิร์นจะต้องใช้เทปสียาวอย่างน้อยกี่เซนติเมตร

เกร็ดน่ารู้

โอริกามิ (origami) เป็นศิลปะของการพับกระดาษให้เป็นรูปร่างต่าง ๆ ซึ่งคำว่า “โอริกามิ” มาจากภาษาญี่ปุ่น โดย โอริ หมายถึง การพับ และ กามิ หมายถึง กระดาษ ทั้งนี้ กระดาษที่นำมาใช้ในการพับส่วนใหญ่ มักจะใช้กระดาษรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

11. กล่องบรรจุนมสดทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง 3.5 เซนติเมตร ยาว 5 เซนติเมตร และสูง 12 เซนติเมตร มีบริเวณที่เป็นวงกลมสำหรับใช้หลอดเจาะกล่องซึ่งอยู่ห่างจากขอบของด้านกว้าง 1 เซนติเมตร และขอบของด้านยาว 0.5 เซนติเมตร ดังรูป



- 1) ถ้าผู้ผลิตต้องการติดหลอดชนิดที่พอดีกับกล่องในแนวทแยงมุม โดยเมื่อพับหลอดแล้วจะมีความยาวไม่เกินขอบกล่อง อยากทราบว่าหลอดที่พับแล้วยาวได้มากที่สุดกี่เซนติเมตร
- 2) เมื่อนำหลอดในข้อ 1) มายืด จะได้ความยาวของหลอดเป็น 16 เซนติเมตร อยากทราบว่า เมื่อใช้หลอดเจาะกล่องนมแล้ว ความยาวของหลอดในส่วนที่พ้นขอบกล่องขึ้นมาอย่างน้อยที่สุดเป็นกี่เซนติเมตร

