



หนังสือเรียน

รายวิชาพื้นฐาน

คณิตศาสตร์

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ ๓ เล่ม ๒

ตามมาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด และสาระการเรียนรู้แกนกลาง
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

พิมพ์ครั้งที่ ๑

ISBN 978-616-576-405-6

จำนวน ๒๕๐,๐๐๐ เล่ม พ.ศ. ๒๕๖๗

จัดจำหน่ายโดย

องค์การค้าของ สกสค. พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว

๒๒๔๔ ถนนลาดพร้าว วังทองหลาง กรุงเทพมหานคร

❖ มีลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ



ประกาศสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน
เรื่อง อนุญาตให้ใช้สื่อการเรียนรู้ในสถานศึกษา

ด้วยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำหนังสือเรียน รายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓ เล่ม ๒ ตามมาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด และสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
(ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ สำนักงานคณะกรรมการการศึกษา
ขั้นพื้นฐาน ได้พิจารณาแล้วอนุญาตให้ใช้ในสถานศึกษาได้

ประกาศ ณ วันที่ ๑๔ กุมภาพันธ์ พ.ศ. ๒๕๖๗

ว่าที่ร้อยตรี

(ธนุ วงษ์จินดา)

เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) มีอำนาจหน้าที่ในการพัฒนา หลักสูตร วิธีการเรียนรู้ การประเมินผล การจัดทำหนังสือเรียน แบบฝึกหัด และสื่อการเรียนรู้ทุกประเภทที่ใช้ประกอบการเรียนรู้ในกลุ่มสาระการเรียนรู้ ศึกษาศาสตร์ของการจัดการศึกษาขั้นพื้นฐาน

หนังสือเรียน รายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓ เล่ม ๒ นี้ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) จัดทำขึ้นตามมาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด และสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีการปรับปรุงให้มีความทันสมัย คำนึงถึงการส่งเสริมให้นักเรียนมีทักษะที่จำเป็น สอดคล้องกับการเรียนรู้ ในศตวรรษที่ ๒๑ เป็นสำคัญ รวมทั้งเน้นด้านการคิดวิเคราะห์ การแก้ปัญหา การคิดสร้างสรรค์ และการนำไปประยุกต์ใช้เพื่อพัฒนาคุณภาพชีวิตของตนเอง

กระทรวงศึกษาธิการหวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเรียนเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้และเป็นส่วนสำคัญ ในการพัฒนาคุณภาพและมาตรฐานการศึกษา กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนบุคคลและหน่วยงานอื่น ๆ ที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำไว้ ณ โอกาสนี้

ว่าที่ร้อยตรี



(ธนุ วงษ์จินดา)

เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำมาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด และสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีจุดเน้นเพื่อพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถที่ทัดเทียมกับนานาชาติ ได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงความรู้กับ กระบวนการคิด มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผลและเป็นระบบ สามารถคิดวิเคราะห์ปัญหา หรือสถานการณ์ ได้อย่างรอบคอบและถี่ถ้วน ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา ได้อย่างถูกต้องเหมาะสม และสามารถนำไปใช้ ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ สสวท. จึงได้จัดทำหนังสือเรียนที่เป็นไปตามมาตรฐานหลักสูตร เพื่อให้โรงเรียนได้ใช้สำหรับจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน

หนังสือเรียน รายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓ เล่ม ๒ นี้ ประกอบด้วยบทเรียนเรื่อง ระบบสมการเชิงเส้น สองตัวแปร วงกลม พีระมิด กรวย และทรงกลม ความน่าจะเป็น และอัตราส่วนตรีโกณมิติ เนื้อหาสาระในแต่ละบทเรียน สอดคล้องครบถ้วนตามตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้ตามมาตรฐานการเรียนรู้ที่ได้กำหนดไว้ในหลักสูตร และสะท้อนภาพ ความเชื่อมโยงที่คาดหวังระหว่างหลักสูตรแกนกลางกับการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในโรงเรียน ผู้สอนสามารถใช้หนังสือเรียน เล่มนี้เป็นเครื่องมือในการจัดการเรียนรู้ บนพื้นฐานของความเข้าใจเกี่ยวกับธรรมชาติการเรียนรู้ของวัยรุ่น ความเชื่อมั่นในศักยภาพ ของผู้เรียน ความมุ่งหวังให้ผู้เรียนทุกคนมีความรู้และทักษะที่จำเป็นและเพียงพอกับการดำรงชีวิตในโลกอนาคตที่มีการพัฒนา และเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว มีความพร้อมในการศึกษาต่อระดับที่สูงขึ้น และสนับสนุนให้ผู้เรียนมีสิทธิ์ในการเรียนรู้และ ให้โอกาสในการเรียนรู้ในบริบทที่ทำทหาย หนังสือเรียนเล่มนี้นำเสนอรูปแบบการจัดการเรียนรู้ที่หลากหลายตามบริบทที่ เหมาะสมในแต่ละเนื้อหา เช่น การลงมือปฏิบัติเพื่อสร้างข้อมูลและใช้ข้อมูลดังกล่าวสร้างข้อความคาดการณ์จนเกิดเป็นข้อสรุป การใช้คำถามเพื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนคิด วิเคราะห์ และแก้ปัญหาย่างเป็นเหตุเป็นผล เพื่อให้ตอบสนองกับรูปแบบการเรียนรู้ ที่แตกต่างกันของผู้เรียน มีการใช้สื่อการเรียนรู้ที่มีความทันสมัย เช่น ซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัต สื่อวัตถุดิจิทัลเสมือนจริง ด้วยมุ่งหวังที่จะกระตุ้นความสนใจของผู้เรียน ให้เปิดรับโอกาสในการเรียนรู้ ช่วยให้ผู้เรียนเห็นภาพและเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ และเข้าถึงแก่นของวิชาคณิตศาสตร์ที่มีธรรมชาติเป็นนามธรรมได้ในที่สุด โดยยึดหลักการของการเรียนรู้ที่เน้นให้ผู้เรียนสร้าง องค์ความรู้ด้วยตนเองควบคู่กับการชี้แนะของผู้สอน

ในการจัดทำหนังสือเรียนเล่มนี้ สสวท. ได้รับความร่วมมือเป็นอย่างดีจากผู้ทรงคุณวุฒิ คณาจารย์ ครูผู้สอน นักวิชาการ จากสถาบันและสถานศึกษาทั้งภาครัฐและเอกชน จึงขอขอบคุณไว้ ณ ที่นี้ และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์เล่มนี้จะเป็นประโยชน์แก่ผู้เรียนและผู้ที่เกี่ยวข้องทุกฝ่ายในการจัดการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพ และประสิทธิผล หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้หนังสือเรียนเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จะขอบคุณยิ่ง

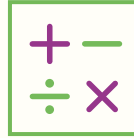


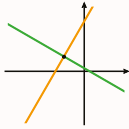
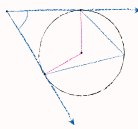
(รองศาสตราจารย์ธีระเดช เจียรสุขสกุล)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

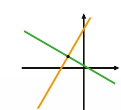
กระทรวงศึกษาธิการ

การสื่อความหมายของรูปภาพและกรอบที่ควรรู้			
1	จุดประสงค์ของบทเรียน	6	ข้อควรระวัง
	ความรู้และทักษะที่นักเรียนควรทำได้เมื่อเรียนจบบทนี้		ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่อาจเข้าใจผิดหรือนำไปใช้โดยไม่ระวัง เพื่อให้เกิดความเข้าใจที่ถูกต้อง และย้ำเตือนให้นักเรียนเกิดความรอบคอบในการนำไปใช้
2	ทบทวนความรู้ก่อนเรียน	7	กิจกรรม
	ทบทวนเนื้อหาหรือความรู้ก่อนเรียน เพื่อเตรียมความพร้อมสำหรับการเรียนเนื้อหาใหม่ ซึ่งจะมีลิงก์ และ QR-code สำหรับเข้าไปทำแบบทดสอบออนไลน์ เพื่อตรวจสอบความรู้พื้นฐานก่อนเข้าสู่บทเรียน		กิจกรรมที่เน้นให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติ เพื่อฝึกการสังเกต ฝึกการคิด และเพื่อให้เกิดการเรียนรู้หรือสร้างองค์ความรู้ใหม่ ๆ ทั้งยังช่วยพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์
3	มุมมอง	8	คำถามท้ายกิจกรรม
	ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เพิ่มเติมจากเนื้อหา เพื่อเสริมความรู้ทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียน		คำถามเพื่อสรุปความรู้ หรือขยายความรู้จากกิจกรรมที่ได้ทำ
4	ชวนคิด	9	มุมเทคโนโลยี
	คำถามเพื่อตรวจสอบความรู้หรือขยายความรู้จากเนื้อหา ตัวอย่าง หรือแบบฝึกหัด โดยเน้นให้เกิดการอภิปรายร่วมกันในชั้นเรียน เพื่อขยายความคิดเพิ่มเติม และแลกเปลี่ยนเรียนรู้ซึ่งกันและกัน		ความรู้หรือกิจกรรมที่ใช้เทคโนโลยีเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เช่น เครื่องคิดเลข หรือซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัต เพื่อให้นักเรียนมีทักษะในการใช้เทคโนโลยีในการแก้ปัญหา
5	ข้อสังเกต	10	สื่อเสริม เพิ่มความรู้
	ข้อมูลหรือความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สังเกตและสรุปได้จากเนื้อหาหรือตัวอย่าง เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนได้ฝึกการสังเกต คาคาการณ์ และลงข้อสรุป		ข้อมูลหรือวีดิทัศน์เสริมความรู้ที่เพิ่มเติมจากเนื้อหา ตัวอย่าง หรือแบบฝึกหัด เพื่อแนะนำแหล่งการเรียนรู้ให้นักเรียนได้ศึกษาเพิ่มเติม

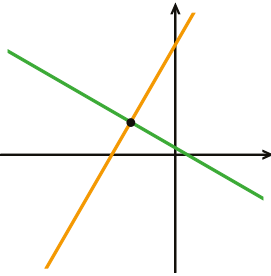
การสื่อความหมายของรูปภาพและกรอบที่ควรรู้			
11	เกร็ดน่ารู้	17	สรุปท้ายบท
	ความรู้ทั่วไปในชีวิตจริงที่สอดคล้องกับเนื้อหา ตัวอย่าง หรือแบบฝึกหัด		สรุปเนื้อหาของบทเรียน เพื่อสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ในบทเรียนนั้น ๆ
12	เครื่องคิดเลข	18	กิจกรรมท้ายบท
	แนะนำให้ใช้เครื่องคิดเลขช่วยในการคำนวณ		กิจกรรมท้ายบทเรียน เพื่อให้นักเรียนได้นำความรู้ในบทเรียนมาใช้ในการแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่หลากหลาย
13	ซอฟต์แวร์ตารางทำงาน	19	แบบฝึกหัดท้ายบท
	แนะนำให้ใช้ซอฟต์แวร์ตารางทำงานในการทำกิจกรรม หรือการแก้ปัญหา		แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน เพื่อให้นักเรียนได้ประยุกต์ใช้ความรู้ที่ได้จากหัวข้อต่าง ๆ ในบทเรียนนี้ รวมทั้งบทเรียนก่อนหน้า มาใช้ในการแก้ปัญหา
14	The Geometer's Sketchpad	20	กิจกรรมคณิตศาสตร์เชิงสะสมเต็ม
	แนะนำให้ใช้ซอฟต์แวร์ The Geometer's Sketchpad ในการทำกิจกรรม การสำรวจ หรือการแก้ปัญหา		กิจกรรมที่เน้นการประยุกต์ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์มาแก้ปัญหาในชีวิตจริง โดยให้นักเรียนได้บูรณาการความรู้ทางคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี หรือกระบวนการออกแบบเชิงวิศวกรรม
15	ท้าทาย	21	สื่อ AR (Augmented Reality)
	แบบฝึกหัดข้อที่มีความยากหรือซับซ้อนมากกว่าตัวอย่างที่มีให้ แต่ยังสามารถใช้เนื้อหาความรู้ที่เรียนมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาได้		สื่อเสริมการเรียนรู้ควานโมลด์แอปพลิเคชัน “AR สสวท. คณิต มัธยม” เพื่อใช้งานได้ที่ http://ipst.me/9075
16	ตรวจสอบความเข้าใจ		
	ตรวจสอบความเข้าใจของตนเองภายหลังจากเรียนจบบทเรียน เพื่อตรวจสอบว่าเนื้อหาใดที่เข้าใจ และเนื้อหาใดต้องทบทวนหรือเรียนรู้เพิ่มเติม		

สารบัญ		บทที่ 1-3	
บทที่	เนื้อหา		หน้า
1	บทที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร		10
	1.1 แนะนำระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร		13
	1.2 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร		24
	1.3 การแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร		30
			
ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร			
2	บทที่ 2 วงกลม		48
	2.1 มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม		52
	2.2 คอร์ดของวงกลม		72
	2.3 เส้นสัมผัสวงกลม		85
			
วงกลม			
3	บทที่ 3 พีระมิด กรวย และทรงกลม		114
	3.1 ปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด		117
	3.2 ปริมาตรและพื้นที่ผิวของกรวย		134
	3.3 ปริมาตรและพื้นที่ผิวของทรงกลม		148
			
พีระมิด กรวย และทรงกลม			

สารบัญ	บทที่ 4-5	
บทที่	เนื้อหา	หน้า
4	บทที่ 4 ความน่าจะเป็น	164
	4.1 โอกาสของเหตุการณ์	167
	4.2 ความน่าจะเป็น	173
	ความน่าจะเป็น	
5	บทที่ 5 อัตราส่วนตรีโกณมิติ	204
	5.1 ความหมายของอัตราส่วนตรีโกณมิติ	207
	5.2 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลม	218
	5.3 การนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา	233
	อัตราส่วนตรีโกณมิติ	
	กิจกรรมคณิตศาสตร์เชิงสะเต็ม	250
บรรณานุกรม		252
ภาคผนวก	ดัชนี	254
	บัญชีสัญลักษณ์	257
	คณะผู้จัดทำ	258



บทที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

บทที่ 	1	ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 1.1 แนะนำระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 1.2 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 1.3 การแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
จุดประสงค์ของบทเรียน เมื่อเรียนจบบทนี้แล้ว นักเรียนจะสามารถ 1. ใช้กราฟเพื่อวิเคราะห์เกี่ยวกับคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 2. แก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 3. นำความรู้เกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรไปใช้ในการแก้ปัญหา		



“ การทราบความสัมพันธ์ของปริมาณสองปริมาณอย่างน้อย 2 ความสัมพันธ์ มีความสำคัญต่อการตัดสินใจในสถานการณ์ต่าง ๆ เช่น การเลือกซื้อสินค้าให้คุ้มค่า การวางแผนการลงทุน การหาอัตราเร็วเพื่อให้ไปถึงที่หมายพร้อมกัน เราสามารถนำความรู้เรื่องระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรไปใช้ในการตัดสินใจหรือใช้ในการแก้ปัญหาได้ ”



ทบทวนความรู้ก่อนเรียน

- ❖ คำตอบของสมการ คือ จำนวนที่แทนตัวแปรในสมการแล้วทำให้ได้สมการที่เป็นจริง
- ❖ การแก้สมการ คือ การหาคำตอบทั้งหมดของสมการ
- ❖ สมบัติของการเท่ากัน
 - ◆ สมบัติสมมาตร
ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$ เมื่อ a และ b แทนจำนวนจริง
 - ◆ สมบัติถ่ายทอด
ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$ เมื่อ a, b และ c แทนจำนวนจริง
 - ◆ สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการบวก
ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$ เมื่อ a, b และ c แทนจำนวนจริง
 - ◆ สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการคูณ
ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$ เมื่อ a, b และ c แทนจำนวนจริง
- ❖ สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เป็นสมการที่สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้เป็น $ax + b = 0$ เมื่อ x เป็นตัวแปร a, b เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$
- ❖ ความสัมพันธ์ของปริมาณสองปริมาณที่มีกราฟอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน เรียกว่า ความสัมพันธ์เชิงเส้น
- ❖ สมการของความสัมพันธ์เชิงเส้นที่แสดงความเกี่ยวข้องระหว่างปริมาณสองปริมาณ จะเรียกว่า สมการเชิงเส้นสองตัวแปร และเมื่อตัวแปรทั้งสองแทนจำนวนจริงใด ๆ กราฟของสมการนี้จะเป็นเส้นตรงที่เรียกว่า กราฟเส้นตรง
- ❖ สมการเชิงเส้นสองตัวแปรเป็นสมการที่สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้เป็น $Ax + By + C = 0$ เมื่อ x และ y เป็นตัวแปร A, B และ C เป็นค่าคงตัว โดยที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน
- ❖ สมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่อยู่ในรูป $y = mx + b$ เมื่อ x และ y เป็นตัวแปรที่แทนจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ m และ b เป็นค่าคงตัว จะมีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ m ซึ่งมีลักษณะของกราฟ ดังนี้

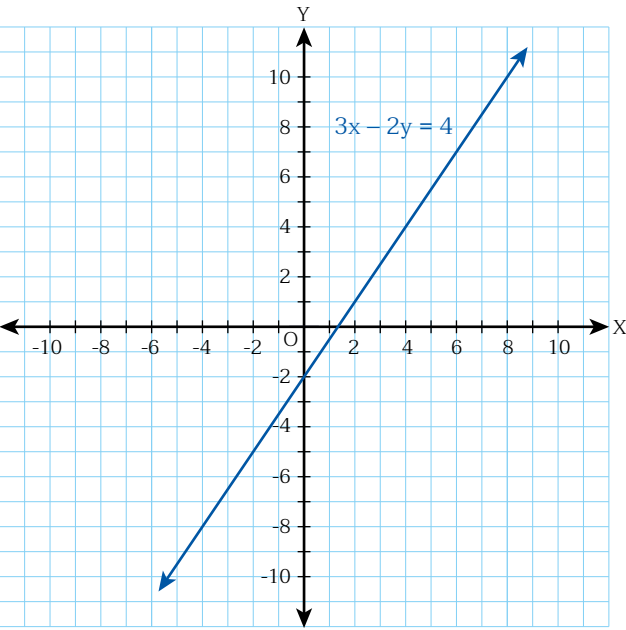
เมื่อ $m > 0$	กราฟจะมีลักษณะเป็นเส้นตรงที่ทำมุมแหลมกับแกน X โดยวัดจากแกน X ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา	
เมื่อ $m < 0$	กราฟจะมีลักษณะเป็นเส้นตรงที่ทำมุมป้านกับแกน X โดยวัดจากแกน X ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา	
เมื่อ $m = 0$	กราฟจะมีลักษณะเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน X	

นักเรียนสามารถทำแบบทดสอบความรู้พื้นฐานก่อนเรียนได้ที่ <http://ipst.me/10710>



1.1 แนะนำระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่าสมการ เช่น $2x + 4y = 5$, $3x - 8 = 2y$, $y = -x + \frac{1}{2}$ และ $5x - 2y - 4 = 0$ เป็นสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่มีรูปทั่วไปเป็น $Ax + By + C = 0$ เมื่อ x และ y เป็นตัวแปรที่แทนจำนวนจริงใด ๆ โดย A, B, C เป็นค่าคงตัว ที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรดังกล่าวจะเป็นเส้นตรง เช่น สมการเชิงเส้นสองตัวแปร $3x - 2y = 4$ เมื่อ x และ y แทนจำนวนจริงใด ๆ จะมีกราฟเป็นเส้นตรง ดังนี้



สำหรับคู่อันดับ (x, y) ใด ๆ จะเป็นคู่อันดับที่สอดคล้องกับสมการ $3x - 2y = 4$ ก็ต่อเมื่อแทนค่า x และค่า y ของแต่ละคู่อันดับนั้น ในสมการ $3x - 2y = 4$ แล้วทำให้ได้สมการที่เป็นจริง เราเรียกคู่อันดับที่สอดคล้องเหล่านั้นว่า คำตอบของสมการ $3x - 2y = 4$

คู่อันดับ (x, y) ที่เป็นคำตอบเหล่านั้นจะเป็นพิกัดของจุดที่อยู่บนเส้นตรง $3x - 2y = 4$ ในทางกลับกันคู่อันดับ (x, y) ที่เป็นพิกัดของจุดที่อยู่บนเส้นตรง $3x - 2y = 4$ ก็จะเป็นคำตอบของสมการ $3x - 2y = 4$ ด้วย

เนื่องจากคู่อันดับที่สอดคล้องกับสมการ $3x - 2y = 4$ มีมากมายไม่จำกัด ดังนั้น สมการ $3x - 2y = 4$ จึงมีคำตอบมากมายไม่จำกัดด้วย

โดยทั่วไปเราเรียกคู่อันดับ (x, y) ที่สอดคล้องกับสมการเชิงเส้นสองตัวแปร $Ax + By + C = 0$ ว่า คำตอบของสมการ และกราฟแสดงคำตอบของสมการ $Ax + By + C = 0$ จะเป็นเส้นตรง เราเรียกเส้นตรงนี้ว่า เส้นตรง $Ax + By + C = 0$



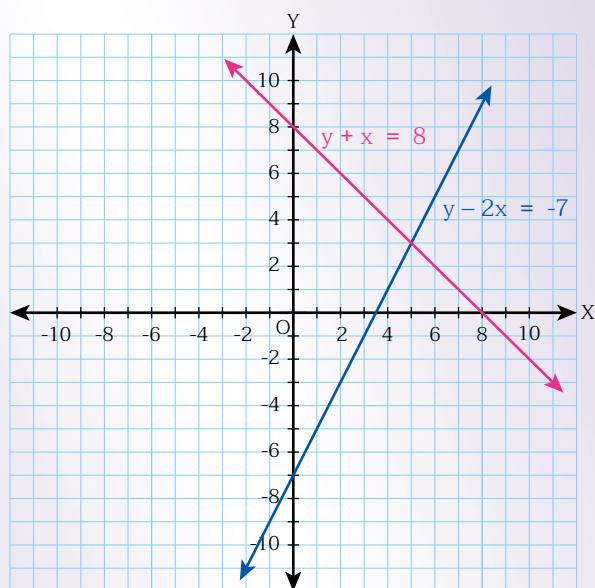
กิจกรรม : ดูกราฟทราบคำตอบ

1. พิจารณาสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 2 สมการ ต่อไปนี้

$$y + x = 8$$

$$y - 2x = -7$$

เมื่อเขียนกราฟของสมการทั้งสองโดยใช้แกนคู่เดียวกัน จะได้กราฟดังรูป



จากกราฟของสมการทั้งสอง

1) ระบุพิกัดของจุดที่เป็นคำตอบของสมการ $y + x = 8$ มา 2 พิกัด

2) ระบุพิกัดของจุดที่เป็นคำตอบของสมการ $y - 2x = -7$ มา 2 พิกัด

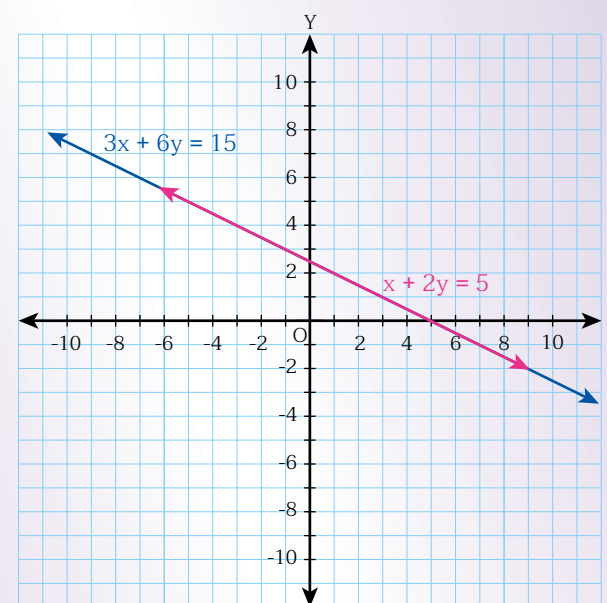
3) ระบุพิกัดของจุดที่เป็นคำตอบของทั้งสมการ $y + x = 8$ และ $y - 2x = -7$

2. พิจารณาสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 2 สมการ ต่อไปนี้

$$x + 2y = 5$$

$$3x + 6y = 15$$

เมื่อเขียนกราฟของสมการทั้งสองโดยใช้แกนคู่เดียวกัน จะได้กราฟดังรูป



จากกราฟของสมการทั้งสอง

1) ระบุพิกัดของจุดที่เป็นคำตอบของสมการ $x + 2y = 5$ มา 2 พิกัด

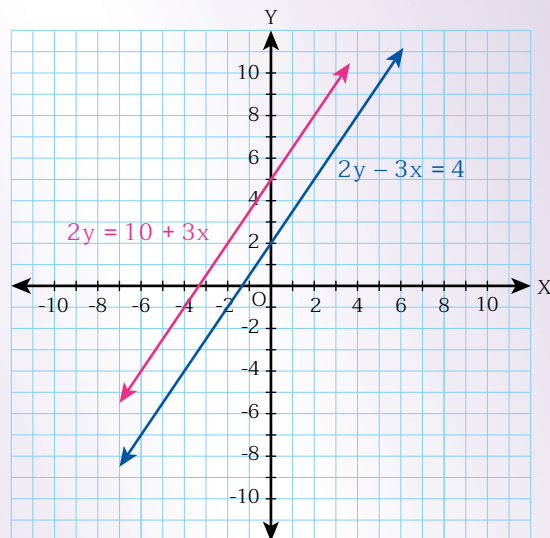
2) ระบุพิกัดของจุดที่เป็นคำตอบของสมการ $3x + 6y = 15$ มา 2 พิกัด

3) ระบุพิกัดของจุดที่เป็นคำตอบของทั้งสมการ $x + 2y = 5$ และ $3x + 6y = 15$

3. พิจารณาสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 2 สมการ ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 2y &= 10 + 3x \\ 2y - 3x &= 4 \end{aligned}$$

เมื่อเขียนกราฟของสมการทั้งสองโดยใช้แกนคู่เดียวกัน จะได้กราฟดังรูป



จากกราฟของสมการทั้งสอง

- 1) ระบุพิกัดของจุดที่เป็นคำตอบของสมการ $2y = 10 + 3x$ มา 2 พิกัด
- 2) ระบุพิกัดของจุดที่เป็นคำตอบของสมการ $2y - 3x = 4$ มา 2 พิกัด
- 3) ระบุพิกัดของจุดที่เป็นคำตอบของทั้งสมการ $2y = 10 + 3x$ และ $2y - 3x = 4$



คำถามท้ายกิจกรรม

จากกิจกรรมในแต่ละข้อ นักเรียนได้ข้อสังเกตจากกราฟเกี่ยวกับคำตอบของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรของทั้งสมการอย่างไรบ้าง



มุมเทคโนโลยี

จากกิจกรรม : ดูกราฟหาคำตอบ
นักเรียนสามารถพิจารณากราฟของสมการ
เชิงเส้นสองตัวแปร 2 สมการอื่น ๆ เพิ่มเติม
โดยดาวน์โหลดไฟล์ GSP ได้ที่
<http://ipst.me/10711>



ให้นักเรียนพิจารณาปัญหาต่อไปนี้

“เศษสามส่วนสี่ของผลบวกของจำนวนสองจำนวนเป็น 57 และสามเท่าของจำนวนน้อย มากกว่าจำนวนมากอยู่ 40 จงหาจำนวนสองจำนวนนั้น”

จากปัญหาดังกล่าว เมื่อกำหนดให้ x แทนจำนวนน้อย และ y แทนจำนวนมาก จะเขียนสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}(x + y) &= 57 && \text{_____} \text{ ①} \\ 3x - y &= 40 && \text{_____} \text{ ②} \end{aligned}$$

เราเรียกชุดของสมการทั้งสองที่พิจารณาคำตอบร่วมกัน ดังตัวอย่างข้างต้นนี้ว่า **ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร (system of linear equations with two variables)**

ให้ a, b, c, d, e และ f เป็นจำนวนจริง ที่ a, b ไม่เป็นศูนย์
พร้อมกัน และ c, d ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ระบบที่ประกอบด้วยสมการ

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

เรียกว่า ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่มี x และ y เป็นตัวแปร
โดยที่ a และ c เป็นสัมประสิทธิ์ของ x

b และ d เป็นสัมประสิทธิ์ของ y

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ คู่อันดับ (x, y)
ที่สอดคล้องกับสมการทั้งสองของระบบสมการ หรือกล่าวได้ว่าคำตอบ
ของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ คู่อันดับ (x, y) ที่ค่า x และ
ค่า y ทำให้ได้สมการที่เป็นจริงทั้งสองสมการ



มุมคณิต

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรจะ
ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
อย่างน้อย 2 สมการ ที่มีตัวแปรชุดเดียวกัน

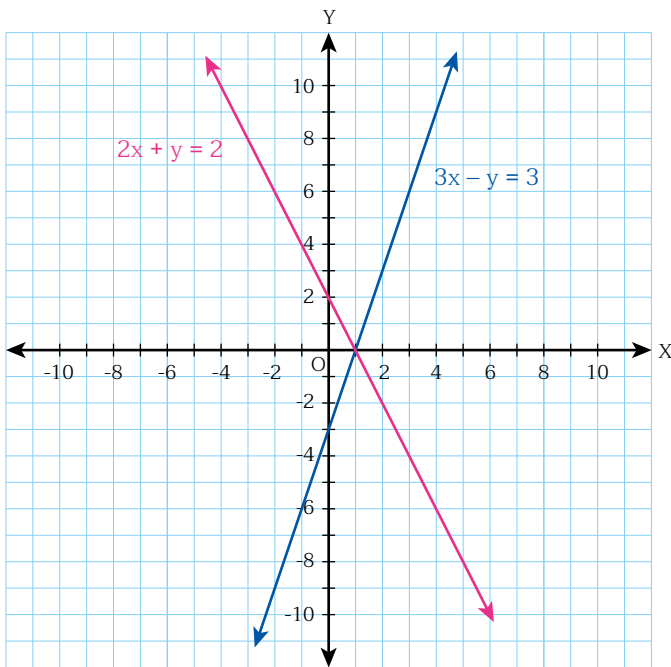
ให้นักเรียนพิจารณาการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรด้วยการเขียนกราฟของแต่ละสมการบนระนาบ โดยใช้แกนคู่เดียวกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

1. กำหนดให้

$3x - y = 3$ _____ ①

$2x + y = 2$ _____ ②

เขียนกราฟของสมการทั้งสอง ได้ดังนี้



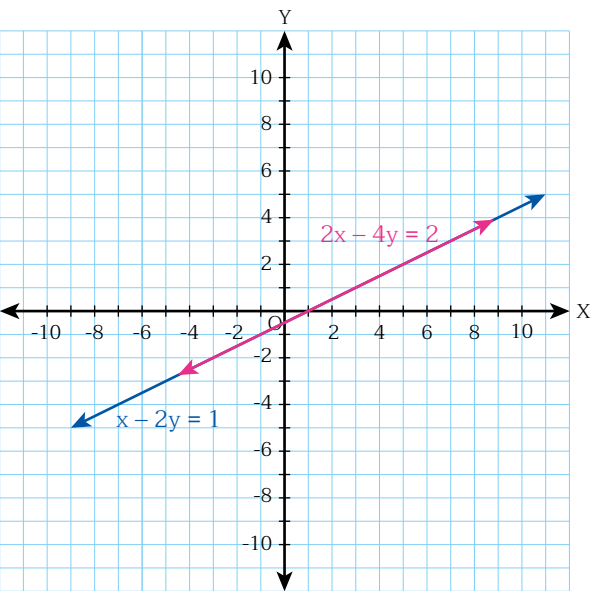
จากกราฟ จะเห็นว่ามีคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $3x - y = 3$ และมีคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $2x + y = 2$ เนื่องจากกราฟของสมการทั้งสองเป็นเส้นตรงสองเส้นซึ่งตัดกันที่จุด $(1, 0)$ เพียงจุดเดียว แสดงว่ามีคู่อันดับเพียงคู่เดียว คือ $(1, 0)$ ที่เป็นคำตอบของทั้งสองสมการ ดังนั้น ระบบสมการนี้จึงมีคำตอบเพียงคำตอบเดียว คือ $(1, 0)$

2. กำหนดให้

$x - 2y = 1$ _____ ①

$2x - 4y = 2$ _____ ②

เขียนกราฟของสมการทั้งสอง ได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่ามีคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $x - 2y = 1$ และมีคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $2x - 4y = 2$ เนื่องจากกราฟของสมการทั้งสองเป็นเส้นตรงสองเส้นซึ่งทับกันหรือเป็นเส้นตรงเดียวกัน แสดงว่าคู่อันดับทุกคู่อันดับที่เป็นพิกัดของจุดบนเส้นตรงที่ทับกันนี้ เป็นคำตอบของทั้งสองสมการ ดังนั้น ระบบสมการนี้จึงมีคำตอบมากมายไม่จำกัด โดยทุกคู่อันดับที่เป็นคำตอบต้องสอดคล้องกับสมการ $x - 2y = 1$ หรือสมการ $2x - 4y = 2$



จากกราฟและสมการที่แสดงข้างต้น ข้าวหอมสังเกตเห็นอะไรไหมจ๊ะ



ใช่จ๊ะ หรือเราอาจกล่าวได้ว่า สมการทั้งสองสมมูลกันนั่นเอง

เห็นจ๊ะ... เห็นว่ากราฟที่สร้างจากสมการทั้งสองที่ทับกันสนิทนั้น สัมประสิทธิ์และค่าคงตัวของสมการทั้งสองก็ยังคงมีความสัมพันธ์กันด้วย โดยสัมประสิทธิ์และค่าคงตัวในสมการที่ 2 เป็นสองเท่าของสัมประสิทธิ์ และค่าคงตัวในสมการที่ 1 จ๊ะ

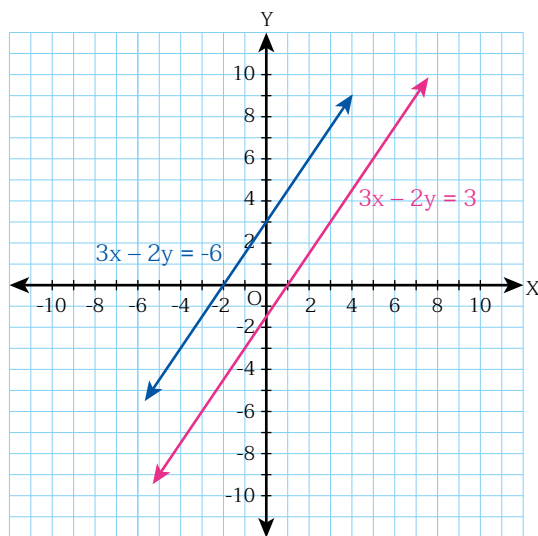


3. กำหนดให้

$$3x - 2y = -6 \quad \text{_____} \text{ ①}$$

$$3x - 2y = 3 \quad \text{_____} \text{ ②}$$

เขียนกราฟของสมการทั้งสอง ได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่าคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $3x - 2y = -6$ และคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $3x - 2y = 3$

เนื่องจากกราฟของสมการทั้งสองเป็นเส้นตรงสองเส้นซึ่งขนานกัน จึงไม่ตัดกัน ทำให้ไม่มีจุดตัด ดังนั้นจึงไม่มีคู่อันดับใดเป็นคำตอบของทั้งสองสมการ ระบบสมการนี้จึงไม่มีคำตอบ



กราฟและสมการที่แสดงข้างต้นนี้ก็น่าสนใจนะ
ข้าวหอมสังเกตเห็นอะไรไหมจ๊ะ

อืม... เห็นว่ากราฟที่สร้างขึ้นจากสมการทั้งสองที่มีลักษณะขนานกันนั้น
สัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวเดียวกันในสมการทั้งสองนั้นก็เท่ากันด้วย
แต่ค่าคงตัวของสมการทั้งสองไม่เท่ากันจ๊ะ



จากตัวอย่างในข้อ 1 ถึง 3 ข้างต้น จะเห็นว่าระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรอาจมีคำตอบเดียว มีคำตอบมากมายไม่จำกัด หรือไม่มีคำตอบเลยก็ได้



ถ้าระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
มีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวเดียวกันไม่เท่ากัน เช่น
 $3x - 2y = 3$ กับ $9x - 6y = 10$
ระบบสมการนี้จะมีคำตอบไหมจ๊ะ

ไม่มีคำตอบเหมือนกันจ๊ะ
เพราะถ้านำ 3 ไปหารทั้งสองข้างของสมการ $9x - 6y = 10$
จะได้สมการใหม่เป็น $3x - 2y = \frac{10}{3}$
ซึ่งจะมีลักษณะเดียวกันกับตัวอย่างในข้อ 3 ไงล่ะ



แบบฝึกหัด 1.1

1. จงเขียนกราฟของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรในแต่ละข้อต่อไปนี้ แล้วพิจารณาว่าแต่ละระบบสมการนั้นมีคำตอบเดียว หรือ มีคำตอบมากมายไม่จำกัด หรือ ไม่มีคำตอบ

1) $x + 2y = 4$

$$2x + 3y = 7$$

3) $x - 3y = 6$

$$2x - 6y = 8$$

5) $-x + 2y = 6$

$$2y - 4 = x$$

2) $y + x = -2$

$$2y + 2x = -4$$

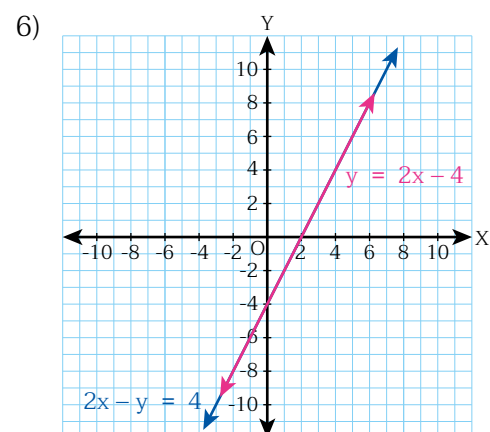
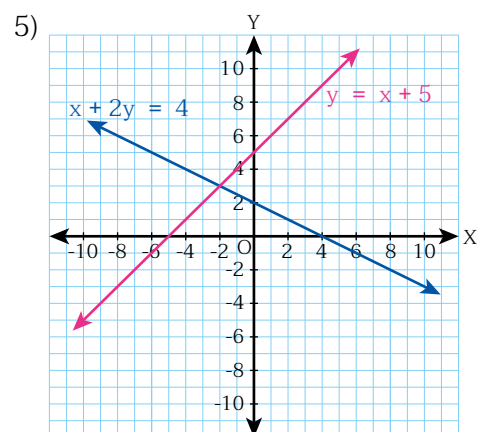
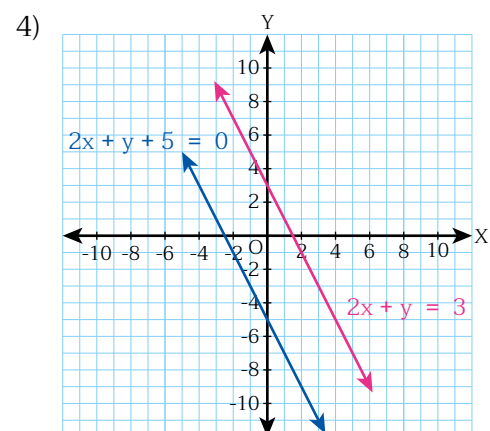
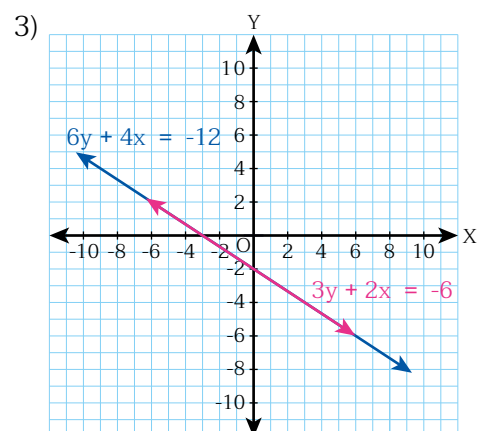
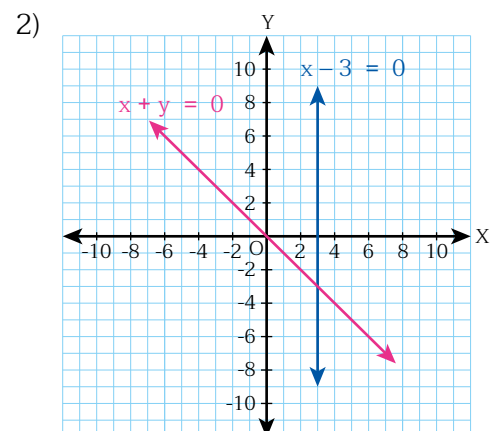
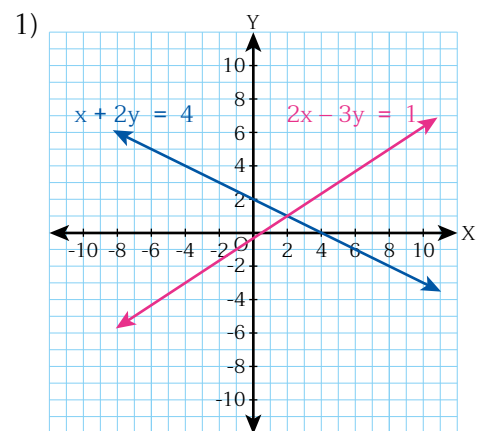
4) $2x - y = -3$

$$-4x + 2y = 6$$

6) $2x - 3y - 14 = 0$

$$3x + 2y = 8$$

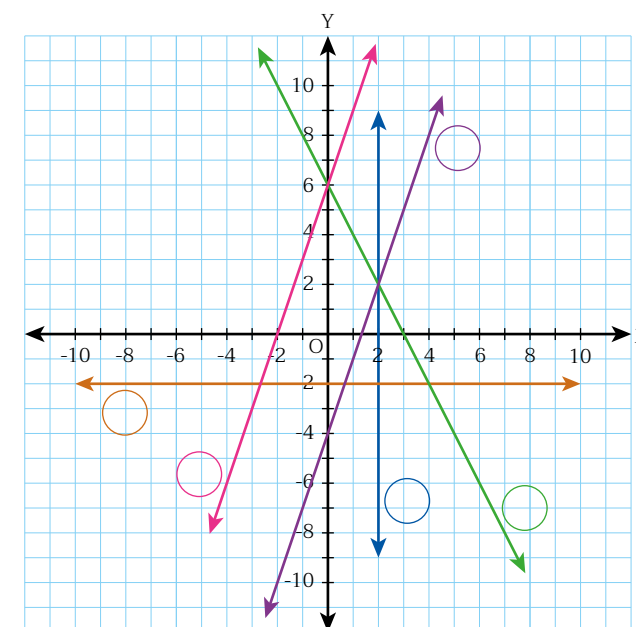
2. จากกราฟของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าแต่ละระบบสมการมีคำตอบหรือไม่ ในกรณีที่ มีคำตอบเดียวให้ระบุคำตอบนั้น



3. กำหนดสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ดังนี้

$$\begin{array}{ll} y + 2x = 6 & \text{_____ ①} \\ x = 2 & \text{_____ ②} \\ y = 3x - 4 & \text{_____ ③} \\ y - 3x = 6 & \text{_____ ④} \\ y = -2 & \text{_____ ⑤} \end{array}$$

1) จงเติมหมายเลขของสมการลงใน ☐ ให้สอดคล้องกับกราฟของสมการที่กำหนดให้



- 2) ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่ประกอบด้วยสมการ ① และ ④ มีคำตอบหรือไม่ ในกรณีที่ มีคำตอบเดียวให้ระบุคำตอบนั้น
- 3) ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่ประกอบด้วยสมการ ③ และ ④ มีคำตอบหรือไม่ ในกรณีที่ มีคำตอบเดียวให้ระบุคำตอบนั้น
- 4) ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่ประกอบด้วยสมการ ② และ ⑤ มีคำตอบหรือไม่ ในกรณีที่ มีคำตอบเดียวให้ระบุคำตอบนั้น
- 5) ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่ประกอบด้วยสมการ ① และ ⑤ มีคำตอบหรือไม่ ในกรณีที่ มีคำตอบเดียวให้ระบุคำตอบนั้น
- 6) ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่ประกอบด้วยสมการ ①, ② และ ③ มีคำตอบหรือไม่ ในกรณีที่ มีคำตอบเดียวให้ระบุคำตอบนั้น



ชวนคิด 1.1

เมื่อเขียนกราฟของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่ประกอบด้วยสมการ $2x + 3y = 1$ และ $3x - 2y = 18$ คำตอบที่นักเรียนอ่านได้จากกราฟจะเป็นคำตอบที่ถูกต้องหรือไม่ จงอธิบาย

1.2 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า การแก้สมการเป็นการหาคำตอบทั้งหมดของสมการ ในทำนองเดียวกัน การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรเป็นการหาคำตอบทั้งหมดของระบบสมการนั้น

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่กล่าวมาแล้ว เราใช้วิธีพิจารณาจากกราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร วิธีดังกล่าวอาจมีปัญหาเพราะการอ่านพิกัดที่เป็นคำตอบของสมการอาจคลาดเคลื่อนจากค่าที่แท้จริงเพื่อความถูกต้องในการหาคำตอบของระบบสมการ เราอาจใช้สมบัติของการเท่ากัน เช่น สมบัติสมมาตร สมบัติถ่ายทอด สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการบวก และสมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการคูณ มาช่วยในการหาคำตอบ การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีนี้ ในทางคณิตศาสตร์ถือว่า เมื่อใช้สมบัติดังกล่าวแล้วจะได้ระบบสมการเชิงเส้นชุดใหม่ที่มีคำตอบเดียวกันกับคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่โจทย์กำหนดให้ หรือกล่าวว่ระบบสมการทั้งสองสมมูลกัน ดังนั้นถ้าการคำนวณในแต่ละขั้นตอนถูกต้อง ก็ไม่มีความจำเป็นต้องตรวจสอบคำตอบ ตัวอย่างการหาคำตอบของระบบสมการโดยใช้สมบัติของการเท่ากันต่อไปนี้ จึงไม่มีการตรวจสอบคำตอบ อย่างไรก็ตามนักเรียนอาจตรวจสอบคำตอบ เพื่อยืนยันความถูกต้องของการคำนวณก็ได้

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้

วิธีทำ

$$\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 1 \\ x - 2y & = & 5 \end{array}$$
$$\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 1 \quad \text{--- ①} \\ x - 2y & = & 5 \quad \text{--- ②} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{①} + \text{②}; & (x + 2y) + (x - 2y) & = & 1 + 5 \\ & x + 2y + x - 2y & = & 6 \\ & 2x & = & 6 \\ & x & = & 3 \end{array}$$

① + ② หมายถึง นำจำนวนที่อยู่ข้างเดียวกันของเครื่องหมายเท่ากับของสมการ ① และสมการ ② มาบวกกัน การกระทำดังกล่าวเพื่อทำให้ได้สมการที่มี x เป็นตัวแปรเพียงตัวเดียว

หรือ อาจจะใช้ ① - ② ก็ได้ ซึ่งจะทำให้ได้สมการที่มี y เป็นตัวแปรเพียงตัวเดียว

$$\begin{array}{rcl} (x + 2y) - (x - 2y) & = & 1 - 5 \\ x + 2y - x + 2y & = & -4 \\ 4y & = & -4 \\ y & = & -1 \end{array}$$

แทน x ด้วย 3 ในสมการ ① จะได้

$$\begin{array}{rcl} 3 + 2y & = & 1 \\ 2y & = & -2 \\ y & = & -1 \end{array}$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ (3, -1)

หรืออาจจะแทน x ด้วย 3 ในสมการ ② ก็ได้

$$\begin{array}{rcl} 3 - 2y & = & 5 \\ -2y & = & 2 \\ y & = & -1 \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 2

จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y - 2 & = & 0 \\ 2x + 2y + 1 & = & 0 \end{array}$$

วิธีทำ

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y - 2 & = & 0 \quad \text{--- ①} \\ 2x + 2y + 1 & = & 0 \quad \text{--- ②} \end{array}$$

① - ② ;

$$\begin{array}{rcl} (3x + 2y - 2) - (2x + 2y + 1) & = & 0 \\ 3x + 2y - 2 - 2x - 2y - 1 & = & 0 \\ x - 3 & = & 0 \\ x & = & 3 \end{array}$$

แทน x ด้วย 3 ในสมการ ① จะได้

$$\begin{array}{rcl} 3(3) + 2y - 2 & = & 0 \\ 2y + 7 & = & 0 \\ y & = & -\frac{7}{2} \end{array}$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ $(3, -\frac{7}{2})$

ตัวอย่างที่ 3

จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{array}{rcl} 0.2x - 0.3y & = & -0.5 \\ 0.5x - 0.2y & = & -0.7 \end{array}$$

วิธีทำ

$$\begin{array}{rcl} 0.2x - 0.3y & = & -0.5 \quad \text{--- ①} \\ 0.5x - 0.2y & = & -0.7 \quad \text{--- ②} \\ 2x - 3y & = & -5 \quad \text{--- ③} \\ 5x - 2y & = & -7 \quad \text{--- ④} \\ 4x - 6y & = & -10 \quad \text{--- ⑤} \\ 15x - 6y & = & -21 \quad \text{--- ⑥} \end{array}$$

① × 10 ;
② × 10 ;
③ × 2 ;
④ × 3 ;
⑤ - ⑥ ;

$$\begin{array}{rcl} (4x - 6y) - (15x - 6y) & = & -10 - (-21) \\ 4x - 6y - 15x + 6y & = & -10 + 21 \\ -11x & = & 11 \\ x & = & -1 \end{array}$$

① × 10 หมายถึง นำ 10 มาคูณพจน์ทุกพจน์ของสมการ ①

③ × 2 และ ④ × 3 เพื่อทำให้สัมประสิทธิ์ของ y เท่ากัน

แทน x ด้วย -1 ในสมการ ③ จะได้

$$2(-1) - 3y = -5$$

$$-2 - 3y = -5$$

$$-3y = -3$$

$$y = 1$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ $(-1, 1)$

สามารถแทน x ด้วย -1 ในสมการ ① หรือ ②
หรือ สมการอื่นที่สมมูลกับสมการ ① หรือ ② ก็ได้

ตัวอย่างที่ 4

จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$2x + 4y = 3$$

$$3x + 6y = 8$$

วิธีทำ

$$2x + 4y = 3 \quad \text{--- ①}$$

$$3x + 6y = 8 \quad \text{--- ②}$$

$$\text{①} \times 3 ; \quad 6x + 12y = 9 \quad \text{--- ③}$$

$$\text{②} \times 2 ; \quad 6x + 12y = 16 \quad \text{--- ④}$$

$$\text{③} - \text{④} ; \quad (6x + 12y) - (6x + 12y) = 9 - 16$$

$$6x + 12y - 6x - 12y = -7$$

$$0 = -7 \text{ ซึ่งเป็นสมการที่ไม่เป็นจริง}$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

แสดงว่าไม่มีค่า x และค่า y
ที่สอดคล้องกับทั้งสองสมการ

ตัวอย่างที่ 5

จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$x - 2y = -3$$

$$-3x + 6y = 9$$

วิธีทำ

$$x - 2y = -3 \quad \text{--- ①}$$

$$-3x + 6y = 9 \quad \text{--- ②}$$

$$\text{②} \div (-3) ; \quad x - 2y = -3 \quad \text{--- ③}$$

จะเห็นว่าสมการ ③ ที่ได้จากสมการ ② เป็นสมการเดียวกันกับสมการ ①

แสดงว่า สมการ ① และสมการ ② มีคำตอบเหมือนกัน และมีคำตอบมากมายไม่จำกัด

หาคู่อันดับที่เป็นคำตอบของระบบสมการนี้ได้จากสมการใดสมการหนึ่ง ดังนี้

$$\text{จากสมการ ① ; } 2y = x + 3$$

$$y = \frac{x + 3}{2}$$

เขียนตัวแปร y ให้อยู่ในรูปของตัวแปร x
เพื่อให้สะดวกต่อการหาคู่อันดับที่เป็นคำตอบ

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบมากมายไม่จำกัดอยู่ในรูป $(x, \frac{x + 3}{2})$ เมื่อ x แทนจำนวนจริงใด ๆ

123 | มุมคณิต

การแก้ระบบสมการตามตัวอย่างข้างต้น เรียกว่า การแก้ระบบสมการด้วยวิธีการกำจัดตัวแปร (elimination method) ซึ่งเป็นการทำ
สัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งให้เป็นจำนวนตรงข้ามกันหรือเป็นจำนวนที่เท่ากัน จากนั้นจึงนำจำนวนที่อยู่ข้างเดียวกันของเครื่องหมายเท่ากับ
ของสมการทั้งสองมาบวกหรือลบกัน เพื่อให้ได้สมการใหม่ที่มีตัวแปรเพียงตัวเดียว แล้วจึงแก้สมการนี้เพื่อให้ได้ค่าของตัวแปรนั้น หลังจากนั้น
นำค่าของตัวแปรที่ได้นี้ไปแทนในสมการที่เหมาะสม เพื่อให้ได้ค่าของตัวแปรอีกตัวหนึ่งที่เหลือ

ตัวอย่างที่ 6

จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$2x = 5y + 1$$

$$24 - 7x = 3y$$

วิธีทำ

$$2x = 5y + 1 \quad \text{--- ①}$$

$$24 - 7x = 3y \quad \text{--- ②}$$

จากสมการ ① จะได้

$$x = \frac{5y + 1}{2} \quad \text{--- ③}$$

แทน x ด้วย $\frac{5y + 1}{2}$ ในสมการ ② จะได้

$$24 - 7\left(\frac{5y + 1}{2}\right) = 3y$$

$$48 - 7(5y + 1) = 6y$$

$$48 - 35y - 7 = 6y$$

$$41 = 41y$$

$$y = 1$$

แทน y ด้วย 1 ในสมการ ③ จะได้

$$x = \frac{5(1) + 1}{2}$$

$$= \frac{6}{2}$$

$$= 3$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ $(3, 1)$

เขียนตัวแปร x ให้อยู่ในรูปของ
ตัวแปร y เป็นการกระทำเพื่อให้ได้
สมการที่มี y เป็นตัวแปรเพียงตัวเดียว



123 | มุมคณิต

การแก้ระบบสมการด้วยวิธีตามตัวอย่างที่ 6 เรียกว่า **การแก้ระบบสมการด้วยวิธีการแทนค่า (substitution method)** ซึ่งเป็นการจัดรูปสมการใดสมการหนึ่ง เพื่อให้ตัวแปรตัวหนึ่งในรูปของตัวแปรอีกตัวหนึ่ง แล้วแทนตัวแปรที่ได้ลงในอีกสมการ เพื่อให้ได้สมการใหม่ที่มีตัวแปรเพียงตัวเดียว จากนั้นจึงแก้สมการนี้เพื่อให้ได้ค่าของตัวแปรนั้น แล้วนำค่าของตัวแปรที่ได้นี้ไปแทนในสมการที่เหมาะสม เพื่อให้ได้ค่าของตัวแปรอีกตัวหนึ่งที่เหลือ

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรต่อไปนี้

- 1) $3x - 4y = 0$

$3x + 4y = -24$

3) $x + 7y = 8$

$3x + 2y = 5$

5) $4x = 3y + 12$

$x = \frac{3}{4}y + 3$

7) $5x + 3y = 10$

$4x - 2y = 8$

9) $2x - 3y = 5$

$-6x + 9y = -12$
- 2) $3x - y = 7$

$4x - 3y - 11 = 0$

4) $x + 2y - 1 = 0$

$2x + 4y - 5 = 0$

6) $x + y = \frac{1}{2}$

$x - 3y = \frac{1}{6}$

8) $-2x - 5y = 5$

$2y = 4 - 2x$

10) $x - \frac{1}{2}y = 2$

$y - 2x = -4$

2. จงแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรต่อไปนี้

- 1) $5x - 4y = 1$

$x - y = -7$

3) $-2x = 2(y - 2)$

$2x + 2y = 4$

5) $4x - 3y = 12$

$\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = 1$

7) $0.2x + 0.3y = 0.7$

$0.5x - 0.2y = 0.8$

9) $4x + 9y - 7 = 0$

$12x - 27y + 21 = 0$

11) $2x - 3y = -9$

$3(x - 1) = 5(y - 4) + 2$
- 2) $x = \frac{3}{2}y - 5$

$12y - 8x = -12$

4) $11x + 8y = 31$

$13x - 6y = 83$

6) $2x + 3y = 1.6$

$3x - 4y = 4.1$

8) $3x + 3 = 23 - 4y$

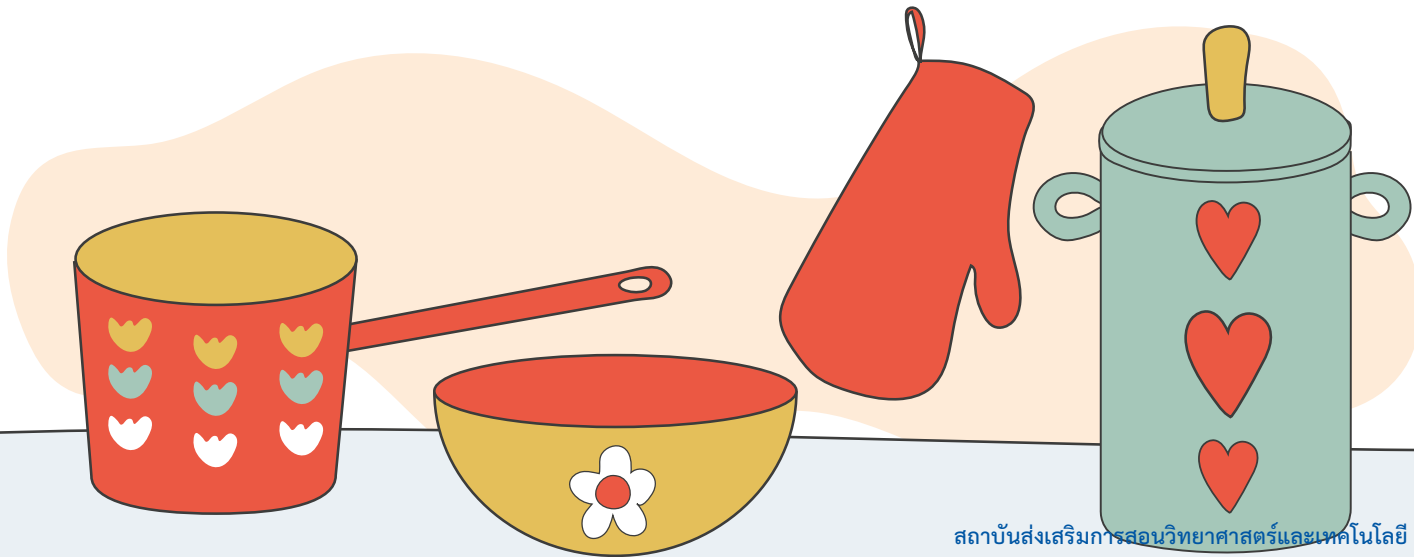
$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 4$

10) $26x + 3y + 4 = 0$

$\frac{1}{5}(x - 2) = \frac{1}{4}(1 - y)$

12) $5(y - 2) - 6x = 7$

$2(x + 5) - (y - 1) = 4$



1.3 การแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

นักเรียนเคยแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับจำนวน อัตราส่วนและร้อยละ ระยะทาง อัตราเร็วและเวลา โดยใช้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวมาแล้ว สำหรับในเรื่องระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร จะมีลักษณะของโจทย์ปัญหาที่มีความซับซ้อนมากขึ้น ดังนั้น ในการแก้โจทย์ปัญหาจึงควรทำอย่างเป็นขั้นตอนเพื่อช่วยลดความผิดพลาดในการหาคำตอบ โดยนักเรียนควรอ่านโจทย์ให้เข้าใจ วิเคราะห์สิ่งที่โจทย์ถามและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ คิดวางแผนการแก้ปัญหา กำหนดตัวแปรให้เหมาะสมกับเงื่อนไขของโจทย์ รวมทั้งแก้สมการอย่างรอบคอบและตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบกับเงื่อนไขในโจทย์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ถ้าครึ่งหนึ่งของผลบวกของจำนวนสองจำนวนเป็น 43 และสามเท่าของจำนวนน้อย มากกว่าสองเท่าของจำนวนมากอยู่ 23 จงหาจำนวนสองจำนวนนั้น

วิธีทำ ให้ x แทนจำนวนมาก

y แทนจำนวนน้อย

จากโจทย์ ครึ่งหนึ่งของผลบวกของจำนวนสองจำนวนนี้เป็น 43

$$\text{จะได้สมการเป็น} \quad \frac{1}{2}(x + y) = 43 \quad \text{_____} \text{ ①}$$

จากโจทย์ สามเท่าของจำนวนน้อย มากกว่าสองเท่าของจำนวนมากอยู่ 23

$$\text{จะได้สมการเป็น} \quad 3y - 2x = 23 \quad \text{_____} \text{ ②}$$

$$\text{①} \times 2 ; \quad x + y = 86 \quad \text{_____} \text{ ③}$$

$$\text{③} \times 2 ; \quad 2x + 2y = 172 \quad \text{_____} \text{ ④}$$

$$\text{②} + \text{④} ; \quad (3y - 2x) + (2x + 2y) = 23 + 172$$

$$3y - 2x + 2x + 2y = 195$$

$$5y = 195$$

$$y = 39$$

แทน y ด้วย 39 ในสมการ ③ จะได้

$$x + 39 = 86$$

$$x = 47$$

ดังนั้น จำนวนสองจำนวนนั้น คือ 47 และ 39

ตรวจสอบกับเงื่อนไขในโจทย์

ถ้าสองจำนวนนั้น คือ 47 และ 39 จะได้

$$\text{ครึ่งหนึ่งของผลบวกเป็น} \quad \frac{1}{2}(47 + 39) = 43$$

และสามเท่าของ 39 มากกว่าสองเท่าของ 47

$$\text{อยู่เท่ากับ} \quad 3(39) - 2(47) = 117 - 94 = 23$$

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์



เอ... แล้วถ้าเราสลับให้ x แทนจำนวนน้อย และ y แทนจำนวนมาก
ข้าวหอมคิดว่าจะได้คำตอบเหมือนกันไหมนะ

คิดว่าได้คำตอบเหมือนกันนะ
เดี๋ยวลองทำดูก่อนนะจ๊ะ



ชวนคิด 1.2

“ครอบครัวหนึ่งมีลูกสาวสองคน พี่สาวและน้องสาวอายุรวมกันเท่ากับ 20 ปี

ถ้าพี่สาวอายุมากกว่าน้องสาว 6 ปี แต่ละคนจะมีอายุเท่าไร”

ข้าวปั้นเสนอแนวทางการแก้โจทย์ปัญหาข้างต้นกับข้าวหอมว่า ต้องใช้ความรู้เรื่องสมการเชิงเส้นสองตัวแปรเดียว แต่ข้าวหอมบอกว่า ถ้าใช้ความรู้เรื่องระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรจะง่ายกว่า นักเรียนเห็นด้วยกับใคร เพราะเหตุใด



ตัวอย่างที่ 2 อัตราค่าเข้าชมการแข่งขันฟุตบอลนัดพิเศษนัดหนึ่งเป็นดังนี้ ผู้ใหญ่คนละ 200 บาท เด็กคนละ 100 บาท ปรากฏว่ามีผู้เข้าชมทั้งหมด 10,000 คน และขายบัตรเข้าชมได้เงิน 1,739,200 บาท อยากทราบว่า มีผู้ใหญ่และเด็กเข้าชมการแข่งขันฟุตบอลครั้งนี้อย่างละกี่คน



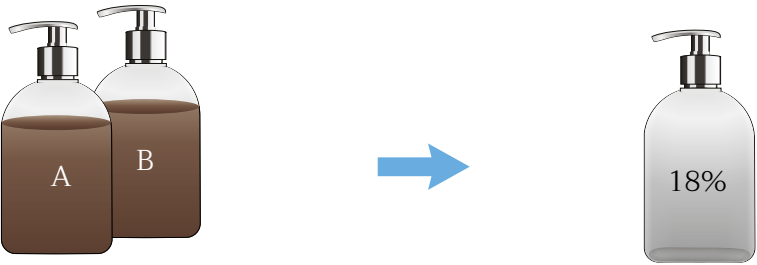
วิธีทำ ให้ x แทนจำนวนผู้ใหญ่ที่เข้าชมฟุตบอล
 y แทนจำนวนเด็กที่เข้าชมฟุตบอล
มีผู้เข้าชมทั้งหมด 10,000 คน
จะได้สมการเป็น $x + y = 10,000$ _____ ①
ผู้ใหญ่จ่ายค่าเข้าชมคนละ 200 บาท คิดเป็นเงิน $200x$ บาท
เด็กจ่ายค่าเข้าชมคนละ 100 บาท คิดเป็นเงิน $100y$ บาท
เนื่องจาก ขายบัตรเข้าชมได้เงิน 1,739,200 บาท
จะได้สมการเป็น $200x + 100y = 1,739,200$ _____ ②
② ÷ 100 ; $2x + y = 17,392$ _____ ③
③ - ① ; $(2x + y) - (x + y) = 17,392 - 10,000$
 $2x + y - x - y = 7,392$
 $x = 7,392$
แทน x ด้วย 7,392 ในสมการ ① จะได้
 $7,392 + y = 10,000$
 $y = 2,608$
ดังนั้น มีผู้เข้าชมเป็นผู้ใหญ่ 7,392 คน
และเป็นเด็ก 2,608 คน

ตรวจสอบกับเงื่อนไขในโจทย์

ถ้ามีผู้ใหญ่เข้าชม 7,392 คน
ขายบัตรได้เงิน $200 \times 7,392 = 1,478,400$ บาท
มีเด็กเข้าชม 2,608 คน
ขายบัตรได้เงิน $100 \times 2,608 = 260,800$ บาท
รวมผู้เข้าชม $7,392 + 2,608 = 10,000$ คน
ขายบัตรได้เงิน $1,478,400 + 260,800 = 1,739,200$ บาท
ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

นักเรียนเคยพบการใช้ร้อยละเพื่อระบุถึงส่วนผสมต่าง ๆ มาแล้ว เช่น น้ำผลไม้กล่องหนึ่ง บอกส่วนผสมว่าเป็นน้ำผลไม้ 40% หมายถึง ถ้ามีน้ำผลไม้ 100 ลูกบาศก์เซนติเมตร จะมีน้ำผลไม้แท้อยู่ 40 ลูกบาศก์เซนติเมตร และอีก 60 ลูกบาศก์เซนติเมตร เป็นน้ำหรือส่วนผสมอื่น ๆ โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับของผสมบางอย่างสามารถหาคำตอบได้โดยใช้ความรู้เรื่องระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3 มีน้ำเชื่อมอยู่สองชนิด น้ำเชื่อมชนิด A มีน้ำตาล 25% น้ำเชื่อมชนิด B มีน้ำตาล 15% ถ้าต้องการนำน้ำเชื่อมทั้งสองชนิดนี้มาผสมกันให้ได้น้ำเชื่อมที่มีน้ำตาล 18% จำนวน 600 ลูกบาศก์เซนติเมตร จะต้องใช้น้ำเชื่อมแต่ละชนิดในปริมาณเท่าใด



วิธีทำ ให้น้ำเชื่อมชนิด A ที่มีน้ำตาล 25% จำนวน x ลูกบาศก์เซนติเมตร
จะมีน้ำตาลอยู่ $\frac{25}{100}x = 0.25x$ ลูกบาศก์เซนติเมตร
ให้น้ำเชื่อมชนิด B ที่มีน้ำตาล 15% จำนวน y ลูกบาศก์เซนติเมตร
จะมีน้ำตาลอยู่ $\frac{15}{100}y = 0.15y$ ลูกบาศก์เซนติเมตร
ถ้าต้องการน้ำเชื่อมผสมที่มีน้ำตาล 18% จำนวน 600 ลูกบาศก์เซนติเมตร
จะมีน้ำตาลอยู่ $\frac{18}{100} \times 600 = 108$ ลูกบาศก์เซนติเมตร
น้ำตาลในน้ำเชื่อมชนิด A รวมกับน้ำตาลในน้ำเชื่อมชนิด B จะเท่ากับน้ำตาลในน้ำเชื่อมผสม
จะได้สมการเป็น $0.25x + 0.15y = 108$ _____ ①
เมื่อนำน้ำเชื่อมชนิด A และชนิด B มาผสมกัน จะได้น้ำเชื่อมผสม 600 ลูกบาศก์เซนติเมตร
จะได้สมการเป็น $x + y = 600$ _____ ②
จากสมการ ② จะได้ $y = 600 - x$ _____ ③

แทน y ด้วย $600 - x$ ในสมการ ① จะได้

$$0.25x + 0.15(600 - x) = 108$$

$$0.25x + 90 - 0.15x = 108$$

$$0.1x = 18$$

$$x = 180$$

แทน x ด้วย 180 ในสมการ ③ จะได้

$$y = 600 - 180$$

$$y = 420$$

ดังนั้น ใช้น้ำเชื่อมชนิด A และน้ำเชื่อมชนิด B 180 และ 420 ลูกบาศก์เซนติเมตร ตามลำดับ

ตรวจสอบกับเงื่อนไขในโจทย์

ถ้าใช้น้ำเชื่อมชนิด A 180 ลบ.ซม.

จะใช้น้ำเชื่อมชนิด B 420 ลบ.ซม.

น้ำเชื่อมชนิด A 180 ลบ.ซม.

มีน้ำตาล $\frac{25}{100} \times 180 = 45$ ลบ.ซม.

น้ำเชื่อมชนิด B 420 ลบ.ซม.

มีน้ำตาล $\frac{15}{100} \times 420 = 63$ ลบ.ซม.

จะได้น้ำเชื่อมผสม $180 + 420 = 600$ ลบ.ซม.

มีน้ำตาล $45 + 63 = 108$ ลบ.ซม.

คิดเป็นน้ำตาล $\frac{108}{600} = 18\%$

ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์

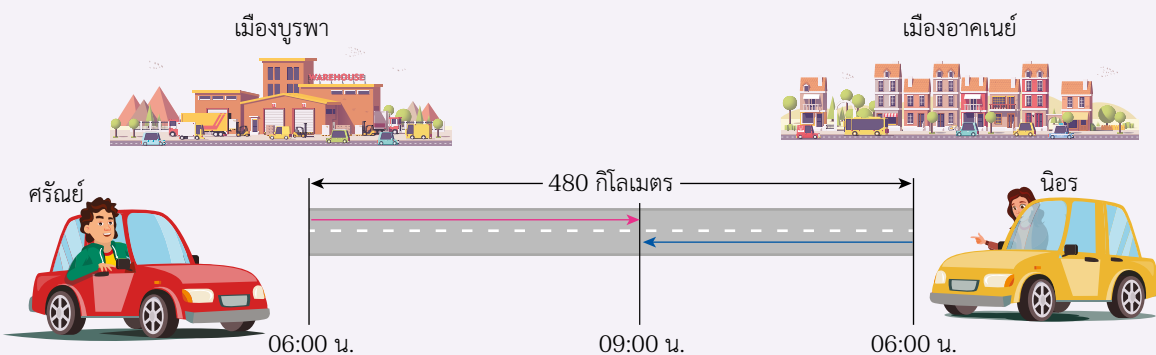
โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับระยะทาง อัตราเร็ว และเวลา เป็นอีกเรื่องหนึ่งที่สามารถหาคำตอบได้โดยใช้ความรู้เรื่องระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร สำหรับความสัมพันธ์ระหว่างระยะทาง อัตราเร็ว และเวลา เป็นดังนี้

$$\text{ระยะทาง} = \text{อัตราเร็ว} \times \text{เวลา}$$

อัตราเร็วที่กล่าวถึงข้างต้น จะหมายถึง อัตราเร็วเฉลี่ย

ตัวอย่างที่ 4 เมืองบุรีพาและเมืองอาคเนย์อยู่ห่างกัน 480 กิโลเมตร ศรัณย์ขับรถยนต์จากเมืองบุรีพาไปเมืองอาคเนย์ ส่วนนิอรขับรถยนต์จากเมืองอาคเนย์ไปเมืองบุรีพาบนเส้นทางเดียวกัน ทั้งสองคนออกเดินทางเวลา 06:00 น. พร้อมกัน และพบกันเวลา 09:00 น. โดยศรัณย์ขับรถได้ระยะทางมากกว่านิอร 30 กิโลเมตร จงหาว่าแต่ละคนขับรถด้วยอัตราเร็วเท่าไร

แนวคิด



วิธีทำ ให้ศรัณย์ขับรถด้วยอัตราเร็ว x กิโลเมตรต่อชั่วโมง

นิอรขับรถด้วยอัตราเร็ว y กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ทั้งสองคนขับรถตั้งแต่วันที่ 06:00 น. และพบกันเวลา 09:00 น. คิดเป็นเวลาขับรถคนละ 3 ชั่วโมง

ได้ระยะทางรวมกัน 480 กิโลเมตร

$$\text{จะได้สมการเป็น} \quad 3x + 3y = 480 \quad \text{_____ ①}$$

เวลา 3 ชั่วโมง ศรัณย์ขับรถได้ระยะทางมากกว่านิอร 30 กิโลเมตร

$$\text{จะได้สมการเป็น} \quad 3x - 3y = 30 \quad \text{_____ ②}$$

$$\text{①} + \text{②}; \quad 6x = 510$$

$$x = 85$$

แทน x ด้วย 85 ในสมการ ① จะได้

$$3(85) + 3y = 480$$

$$255 + 3y = 480$$

$$3y = 225$$

$$y = 75$$

ดังนั้น ศรัณย์และนิอรขับรถยนต์ด้วยอัตราเร็ว

85 และ 75 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ตามลำดับ

ตรวจสอบกับเงื่อนไขในโจทย์

ถ้าศรัณย์ขับรถด้วยอัตราเร็ว 85 กม./ชม.

ในเวลา 3 ชม. ได้ระยะทาง $3 \times 85 = 255$ กม.

นิอรขับรถด้วยอัตราเร็ว 75 กม./ชม.

ในเวลา 3 ชม. ได้ระยะทาง $3 \times 75 = 225$ กม.

ในเวลา 3 ชม. ทั้งสองคนขับรถเข้าหากันได้ระยะทาง

$255 + 225 = 480$ กม.

และศรัณย์ขับรถได้ระยะทางมากกว่านิอรอยู่

$255 - 225 = 30$ กม. ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์





ชวนคิด 1.3



ช่วงปิดภาคเรียน ครอบครัวข้าวปั้นและข้าวหอมไปเที่ยวสวนสัตว์เปิดแห่งหนึ่ง ข้าวปั้นเห็นยีราฟและนกกระจอกเทศเลี้ยงอยู่ด้วยกันที่ลานดินด้านหน้าสวนสัตว์ จึงนึกอยากเล่นเกมทายจำนวนยีราฟและนกกระจอกเทศกับข้าวหอม โดยให้คำใบ้ว่า “ถ้าลานดินข้างหน้ามียีราฟและนกกระจอกเทศรวมกัน 35 ตัว แต่ถ้านับขาของสัตว์ทั้งสองชนิดจะรวมกันได้ 90 ขา” ข้าวหอมจะมีวิธีคิดเพื่อตอบคำถามข้าวปั้นได้แบบใดบ้าง



มุมคณิต

เมื่อปริมาณสองปริมาณมีความสัมพันธ์เชิงเส้น ในทางคณิตศาสตร์เราสามารถเขียนแสดงความสัมพันธ์ดังกล่าวในรูปของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรเป็น $y = ax + b$ เมื่อ x และ y แทนปริมาณสองปริมาณ a และ b แทนค่าคงตัว ถ้าเราไม่ทราบค่า a และ b ของสมการ ก็จะทำให้ไม่ทราบว่าสมการที่แท้จริงของความสัมพันธ์คืออะไร แต่ถ้าเราทราบปริมาณที่สัมพันธ์กันเป็นคู่ ๆ อย่างน้อยสองคู่ เราก็สามารถหาค่า a และ b จากปริมาณที่สัมพันธ์กันเหล่านั้นได้

ตัวอย่าง นักเรียนโรงเรียนหนึ่งต้องการทำหนังสือที่ระลึกประจำปี จำนวน 100 หน้า จึงไปตกลงราคากับโรงพิมพ์ ซึ่งคิดค่าใช้จ่ายทั้งหมดจากค่าแม่พิมพ์ที่คิดเพียงครั้งเดียวและค่าจ้างพิมพ์ที่คิดเป็นรายเล่ม โรงพิมพ์เสนอราคาว่า ถ้าพิมพ์ 100 เล่ม จะเสียค่าใช้จ่ายทั้งหมด 23,000 บาท และถ้าพิมพ์ 300 เล่ม จะเสียค่าใช้จ่ายทั้งหมด 56,000 บาท

- 1) จงหาสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าใช้จ่ายทั้งหมดในการพิมพ์กับจำนวนเล่มที่พิมพ์
- 2) ถ้าต้องการพิมพ์หนังสือ 1,500 เล่ม นักเรียนจะต้องเสียค่าใช้จ่ายทั้งหมดเท่าไร



มุมคณิต (ต่อ)

- วิธีทำ**
- 1) ให้ x แทนจำนวนเล่มที่พิมพ์
 y แทนค่าใช้จ่ายทั้งหมดในการพิมพ์
 a แทนค่าจ้างพิมพ์ต่อเล่ม
 b แทนค่าแม่พิมพ์

จากสิ่งที่กำหนดให้ข้างต้น เขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าใช้จ่ายทั้งหมดในการพิมพ์กับจำนวนเล่มที่พิมพ์ ได้เป็น $y = ax + b$

เมื่อพิมพ์ 100 เล่ม เสียค่าใช้จ่ายทั้งหมด 23,000 บาท

จะได้ $23,000 = 100a + b$ _____ ①

และเมื่อพิมพ์ 300 เล่ม เสียค่าใช้จ่ายทั้งหมด 56,000 บาท

จะได้ $56,000 = 300a + b$ _____ ②

② - ①; $33,000 = 200a$

$a = 165$

แทน a ด้วย 165 ในสมการ ① จะได้

$b = 23,000 - (100 \times 165)$
 $= 6,500$

แทน a ด้วย 165 และแทน b ด้วย 6,500 ในสมการ $y = ax + b$

จะได้ $y = 165x + 6,500$

ดังนั้น สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าใช้จ่ายทั้งหมดในการพิมพ์กับจำนวนเล่มที่พิมพ์เป็น

$y = 165x + 6,500$

- 2) เมื่อพิมพ์ 1,500 เล่ม

แทน x ด้วย 1,500 ในสมการ $y = 165x + 6,500$

จะได้ $y = 165(1,500) + 6,500 = 254,000$

ดังนั้น เมื่อพิมพ์ 1,500 เล่ม จะเสียค่าใช้จ่ายทั้งหมด 254,000 บาท



ชวนคิด 1.4



พนักงานขายคนหนึ่งของร้านขายเครื่องใช้ไฟฟ้า มีรายได้แต่ละเดือนเป็นผลรวมของสองส่วน ส่วนหนึ่งเป็นเงินเดือน อีกส่วนหนึ่งเป็นเงินที่คิดจากเปอร์เซ็นต์ของยอดขายตลอดเดือนของตนเอง ปรากฏว่าพนักงานขายคนนี้มีรายได้สองเดือนที่ผ่านมาเป็นดังนี้

- * เดือนแรกมีรายได้ 15,000 บาท
จากยอดขายตลอดเดือน 156,000 บาท
- * เดือนที่สองมีรายได้ 17,200 บาท
จากยอดขายตลอดเดือน 200,000 บาท

จงหาสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างรายได้แต่ละเดือนกับยอดขายตลอดเดือนของพนักงานขายคนนี้ และถ้าคาดว่าจะยอดขายตลอดเดือนนี้เป็น 250,500 บาท เขาจะมีรายได้เท่าไร



แบบฝึกหัด 1.3

1. ถ้าครึ่งหนึ่งของจำนวนหนึ่งเป็นสามเท่าของจำนวนอีกจำนวนหนึ่ง และสี่เท่าของผลต่างของสองจำนวนนั้นเป็น 50 จงหาจำนวนสองจำนวนนั้น
2. จำนวนที่มีสองหลักจำนวนหนึ่ง มีเลขโดดในหลักสิบมากกว่าเลขโดดในหลักหน่วยอยู่ 4 และผลบวกของจำนวนนี้กับจำนวนที่ได้จากการสลับที่เลขโดดเป็น 154 จงหาจำนวนนั้น
3. ถ้าผลบวกของขนาดของมุมภายในสองมุมของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็น 137 องศา และผลต่างของขนาดของมุมสองมุมนี้เป็น 73 องศา จงหาขนาดของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมนี้

4. ดึงสะสมเหรียญชนิด 10 บาท และ 1 บาท รวมกันได้ 200 เหรียญ คิดเป็นเงินรวมกัน 920 บาท อยากทราบว่าดึกมีเหรียญแต่ละชนิดอย่างละกี่เหรียญ
5. ด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่งยาวกว่าด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่งอยู่ 4 เซนติเมตร ถ้าความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมากกว่าความยาวรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าอยู่ 24 เซนติเมตร จงหาความยาวรอบรูปของแต่ละรูป
6. เมื่อเฝ้าดูนกกระจาบบินจับดอกบัวในสระน้ำแห่งหนึ่ง พบว่าถ้านกจับดอกบัวดอกละตัว จะเหลือนก 1 ตัว ที่ไม่มีดอกบัวให้จับ และถ้านกจับดอกบัวดอกละ 2 ตัว จะเหลือนดอกบัว 1 ดอก ที่ไม่มีนกจับ อยากทราบว่าในสระนี้มีดอกบัวกี่ดอกและนกกี่ตัว
7. หนูนากับหนูนิดเป็นเด็กดี ขยันเรียน และมัธยัสถ์ ทั้งสองตกลงกันว่าจะออมเงินที่เหลือจากค่าขนมไว้ซื้อเครื่องดนตรีที่ชอบคนละชิ้น สิ้นภาคเรียนที่หนึ่ง พวกเขาพบว่า $\frac{2}{3}$ ของเงินที่หนูนาออมได้ มากกว่าครึ่งหนึ่งของเงินที่หนูนิดออมได้อยู่ 10 บาท แต่เมื่อหนูนิดนำเงินรางวัลที่ได้จากการตอบปัญหาคณิตศาสตร์ 1,000 บาท มารวมกับเงินที่ออมไว้ เธอก็กลับมีเงินเป็นสามเท่าของเงินของหนูนา จงหาว่าเดิมแต่ละคนออมเงินไว้ได้คนละเท่าใด
8. วิมลมีเงินเก็บอยู่ 120,000 บาท ส่วนหนึ่งนำไปฝากธนาคารเพื่อรับดอกเบี้ย 2% อีกส่วนหนึ่งนำไปลงทุนเพื่อรับเงินปันผล 4% สิ้นปีมีรายได้รวมกัน 4,000 บาท อยากทราบว่าวิมลนำเงินไปลงทุนแต่ละประเภทเท่าใด



9. เมื่อเวลา 08:30 น. ก้องขับรถยนต์ออกจากเมืองดาหลาไปตามถนนสายหนึ่งด้วยอัตราเร็ว 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง อีก 1 ชั่วโมงต่อมาพอขับรถยนต์ออกจากที่เดียวกันและไปตามเส้นทางเดียวกับก้องด้วยอัตราเร็วมากกว่าก้อง 20 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จงหาว่าปอจะตามก้องทันในเวลาอะไร



10. สมณิกซ์ขับรถกอล์ฟจากปากทางสวนสัตว์เปิดแห่งหนึ่งไปดูลสัตว์ที่
สองเขตพื้นที่ คือ เขตพื้นที่ช้าง และเขตพื้นที่ยีราฟ โดยเขตพื้นที่ช้าง
อยู่ไกลกว่าเขตพื้นที่ยีราฟ 5 กิโลเมตร เขาใช้เวลาขับรถกอล์ฟไป
เขตพื้นที่ยีราฟ 45 นาที หลังจากนั้นขับไปเขตพื้นที่ช้างโดยใช้
อัตราเร็วลดลง 10 กิโลเมตรต่อชั่วโมง และใช้เวลา 12 นาที
อยากทราบว่า



- 1) สมณิกซ์ขับไปเขตพื้นที่ยีราฟด้วยอัตราเร็วเท่าไร
 - 2) ระยะทางระหว่างปากทางสวนสัตว์เปิดแห่งนั้นกับเขตพื้นที่ยีราฟเป็นเท่าไร
11. ก้อยขับรถยนต์จากเมืองนครบุรี ส่วนตูนขับรถยนต์จากเมืองพรรณสีมา ไปพบกันที่ร้านอาหาร “อร่อยเหาะ” ซึ่ง
อยู่กึ่งกลางของระยะทางระหว่างเมืองนครบุรี และเมืองพรรณสีมา ถ้าตูนขับรถยนต์ด้วยอัตราเร็วมากกว่าก้อย 10
กิโลเมตรต่อชั่วโมง ตูนจะใช้เวลาเพียง 40 นาที ก็ถึงจุดนัดพบ ส่วนก้อยไปถึงช้ากว่าตูน 5 นาที จงหา
- 1) อัตราเร็วของรถยนต์ทั้งสองคัน
 - 2) ระยะทางระหว่างเมืองนครบุรี และเมืองพรรณสีมา

12. กรกัณฑ์คิด “เครื่องดื่มประจำสัปดาห์” สำหรับร้านของเขา โดยต้องการผสมเครื่องดื่มที่มีชาวม 80% กับเครื่องดื่ม
ที่มีชาวม 50% เพื่อให้ได้เครื่องดื่มสูตรพิเศษเป็นเครื่องดื่มประจำสัปดาห์ 5 ลิตร ที่มีชาวม 60% กรกัณฑ์ต้องใช้
เครื่องดื่มแต่ละอย่างกี่ลิตร

13. ข้าวปั้นขายอาหารผสมสูตรใหม่สำหรับนกขุนทอง โดยผสมจากอาหารนก
สำเร็จรูปและเมล็ดทานตะวัน ซึ่งเขาซื้อมาราคากิโลกรัมละ 50 บาท และ 65 บาท
ตามลำดับ จงหาว่าต้องใช้อัตราส่วนของอาหารนกสำเร็จรูปต่อเมล็ดทานตะวัน
โดยน้ำหนักเป็นเท่าไร เมื่อขายอาหารผสมสูตรใหม่นี้ในราคากิโลกรัมละ 70 บาท
แล้วจะได้กำไร 10%



14. ฐานกรซื้อขนมมาสองชนิด ชนิดที่หนึ่งราคาถุงละ 30 บาท ชนิดที่สองราคาถุงละ 20 บาท จากนั้นเขาจัดขนม
สองชนิดนี้แบ่งใส่ถุงในอัตราส่วนโดยน้ำหนัก 1 : 4 แล้วขายราคาถุงละ 40 บาท เมื่อขายหมดได้กำไร 360 บาท
ถ้าขนมที่ซื้อมาและขนมที่ขายไปหนักเท่ากันทุกถุง อยากทราบว่าฐานกรซื้อขนมชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สองมา
อย่างละกี่ถุง



ตรวจสอบความเข้าใจ

รายการ	 สบายมาก	 ขอทบทวนอีกนิด
1. การใช้กราฟเพื่อวิเคราะห์เกี่ยวกับคำตอบของ ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร		
2. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร		
3. การนำความรู้เกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ไปใช้ในการแก้ปัญหา		



สรุปท้ายบท

❖ เมื่อกำหนดให้ a, b, c, d, e และ f เป็นจำนวนจริงที่ a, b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และ c, d ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน
ระบบที่ประกอบด้วยสมการ

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

เรียกว่า ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่มี x และ y เป็นตัวแปร

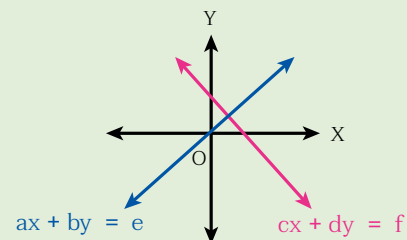
โดยที่ a และ c เป็นสัมประสิทธิ์ของ x

b และ d เป็นสัมประสิทธิ์ของ y

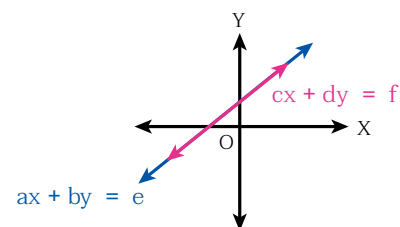
คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ คู่อันดับ (x, y) ที่สอดคล้องกับสมการทั้งสองของระบบสมการ
หรือกล่าวได้ว่า คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ คู่อันดับ (x, y) ที่ค่า x และค่า y ทำให้ได้สมการ
ที่เป็นจริงทั้งสองสมการ

❖ คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรมี 3 แบบ คือ

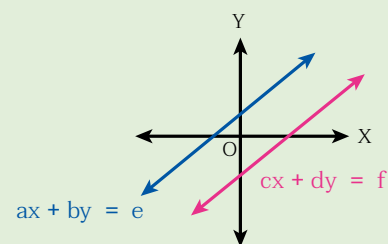
มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว



มีคำตอบมากมายไม่จำกัด



ไม่มีคำตอบ



❖ การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร สามารถทำได้โดยการใช้กราฟ หรือการใช้สมบัติของการเท่ากัน เช่น สมบัติสมมาตร สมบัติถ่ายทอด สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการบวก และสมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการคูณ



กิจกรรมท้ายบท : ระบบสมการสร้างรูปตามจินตนาการ

อุปกรณ์

- ❖ กระดาษกราฟ 1 แผ่น
- ❖ ชุดโจทย์ระบบสมการ (ชุดละ 6 ระบบสมการ)

ขั้นตอนการทำกิจกรรม

1. ให้นักเรียนหาคำตอบของระบบสมการแต่ละระบบ จากชุดโจทย์ระบบสมการที่กำหนดให้
2. นำคำตอบของแต่ละระบบสมการมาลงจุด โดยใช้แกนคู่เดียวกัน
3. ลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดที่มีพิกัดเป็นคำตอบของระบบสมการข้างต้น เพื่อให้ได้รูปที่มีความหมายตามจินตนาการของนักเรียน
4. ระบายสีและตั้งชื่อรูปที่ได้ให้สอดคล้องกัน

ชุดโจทย์ระบบสมการ		คำตอบของระบบสมการ
ระบบสมการที่ 1	$2x + y = 7$ $-2x + y = -1$	(..... ,)
ระบบสมการที่ 2	$2x + y = 19$ $-2x + y = -1$	(..... ,)
ระบบสมการที่ 3	$-2x + y = -13$ $2x + y = 19$	(..... ,)
ระบบสมการที่ 4	$2x + y = 15$ $y = 1$	(..... ,)
ระบบสมการที่ 5	$2x + y = 7$ $y = 1$	(..... ,)
ระบบสมการที่ 6	$x = 5$ $y = 3$	(..... ,)

นักเรียนสามารถดาวน์โหลดไฟล์ของชุดโจทย์ระบบสมการเพิ่มเติมได้ที่ <http://ipst.me/10712>





แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรต่อไปนี้ว่ามีคำตอบเดียว มีคำตอบมากมายไม่จำกัด หรือ ไม่มีคำตอบ ถ้ามีคำตอบเดียวให้ระบุคำตอบ

ระบบสมการ	มีคำตอบเดียว	มีคำตอบมากมายไม่จำกัด	ไม่มีคำตอบ
1) $3x - y = 3$ $2x + y = 2$			
2) $2y + 4x = 8$ $2x = 10 - y$			
3) $3x + y = 4$ $-5x - 3y = 12$			
4) $5y - 3x - 6 = 0$ $-6x = 12 - 10y$			

2. ถ้า $(3, -1)$ เป็นคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{aligned} ax + by &= 5 \\ -bx + ay &= -15 \end{aligned}$$

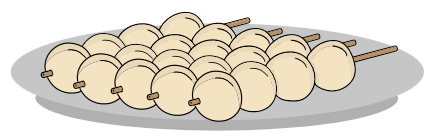
จงหาค่าของ $a + b$

3. ถ้าผลต่างของจำนวนสองจำนวนเป็น 70 และสองเท่าของจำนวนที่มีค่ามาก เป็นสี่เท่าของจำนวนที่มีค่าน้อย จงหาจำนวนทั้งสอง

4. ออมและอ้อยซื้อสินค้าจากร้านสะดวกซื้อเอเอ็มมินิมาร์ท ดังนี้
ออมซื้อนมสด 1 ขวด และไข่ไก่ 3 กล่อง จ่ายเงิน 65 บาท
อ้อยซื้อนมสด 3 ขวด และไข่ไก่ 2 กล่อง จ่ายเงิน 90 บาท
จงหาว่าออมและอ้อยซื้อนมสดขวดละเท่าไร และไข่ไก่กล่องละเท่าไร

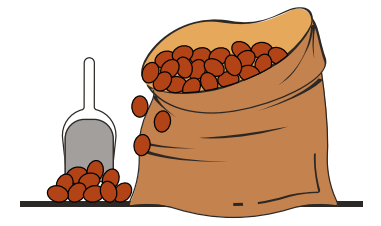


5. ในงานปีใหม่ คุณแม่ซื้อลูกชิ้นมาเลี้ยงเด็ก ๆ ถ้าแจกลูกชิ้นให้เด็กคนละ 4 ไม้ จะเหลือลูกชิ้น 3 ไม้ แต่ถ้าแจกให้คนละ 5 ไม้ จะมีเด็กที่ไม่ได้ลูกชิ้น 2 คน อยากทราบว่าในงานเลี้ยงมีเด็กกี่คน และคุณแม่ซื้อลูกชิ้นมาทั้งหมดกี่ไม้



6. ร้านค้าขายเครื่องเขียนแห่งหนึ่งขายปากกาด้ามละ 40 บาท และดินสอแท่งละ 25 บาท ถ้าขายสินค้าทั้งสองชนิดได้หมด จะได้เงิน 1,200 บาท เมื่อเวลาผ่านไป 2 สัปดาห์ ร้านค้าขายปากกาได้หมด แต่ขายดินสอได้เพียงครึ่งหนึ่ง ปรากฏว่าได้เงินรวม 900 บาท จงหาว่าเดิมร้านค้านี้อีกปากกาและดินสออย่างละเท่าไร

7. พ่อค้าซื้อกาแฟชนิด A ราคา กิโลกรัมละ 170 บาท กับกาแฟชนิด B ราคา กิโลกรัมละ 150 บาท มาผสมขาย จงหาว่าพ่อค้าจะต้องใช้กาแฟชนิดละกี่กิโลกรัม มาผสมเพื่อให้ได้กาแฟผสม 30 กิโลกรัม และเมื่อขายกาแฟ กิโลกรัมละ 200 บาท จะได้กำไร 20%



8. นิกรจ้างผู้รับเหมาปูกระเบื้องในราคา 24,000 บาท โดยคิดเป็นค่ากระเบื้อง 9,000 บาท ที่เหลือเป็นค่าแรงของช่างปูกระเบื้องและค่าแรงของผู้ช่วย ถ้าค่าแรงของผู้ช่วยคิดเป็นครึ่งหนึ่งของค่าแรงของช่าง อยากทราบว่าช่างปูกระเบื้องและผู้ช่วยจะได้ค่าแรงคนละกี่บาท

9. แม่ค้าขายลำไยสองสายพันธุ์ดังนี้

❖ ลำไยสายพันธุ์กะโหลก กิโลกรัมละ 25 บาท

❖ ลำไยสายพันธุ์สีชมพู กิโลกรัมละ 30 บาท



ถ้าแม่ค้าขายลำไยทั้งสองสายพันธุ์ไป 70 กิโลกรัม ได้เงิน 1,780 บาท จงหาว่าแม่ค้าขายลำไยได้สายพันธุ์ละกี่กิโลกรัม

10. ในการทดลองผสมสารละลายชนิดหนึ่ง บริษัทเคมีภัณฑ์ต้องการสารละลายที่มีแอลกอฮอล์ 50% จำนวน 100 ลิตร โดยมีสารละลายตั้งต้นชนิดที่หนึ่งที่มีแอลกอฮอล์ 30% และ สารละลายตั้งต้นชนิดที่สองที่มีแอลกอฮอล์ 80% บริษัทต้องใช้สารละลายตั้งต้นชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สองชนิดละกี่ลิตร

- ✎ 11. ในการตัดหญ้าที่สนามแห่งหนึ่ง ถ้าใช้คนงานชาย 3 คน และคนงานหญิง 4 คน ช่วยกันตัดจะเสร็จภายใน 14 วัน แต่ถ้าใช้คนงานชาย 10 คน และคนงานหญิง 15 คน ช่วยกันตัดจะเสร็จภายใน 4 วัน ถ้าคนงานชาย 7 คน คนงานหญิง 6 คน ช่วยกันตัดหญ้า จะตัดเสร็จภายในกี่วัน
- ✎ 12. วิษณุพายเรือตามน้ำและทวนน้ำในระยะทาง 1 กิโลเมตร ใช้เวลา 30 นาที และ 50 นาที ตามลำดับ อยากทราบว่า วิษณุพายเรือในน้ำนิ่งด้วยอัตราเร็วกี่กิโลเมตรต่อชั่วโมง และกระแสน้ำมีอัตราเร็วกี่กิโลเมตรต่อชั่วโมง

123 | มุมคณิต

อัตราเร็วของการพายเรือตามน้ำ และอัตราเร็วของการพายเรือทวนน้ำ มีความสัมพันธ์กับอัตราเร็วของการพายเรือในน้ำนิ่ง และอัตราเร็วของกระแสน้ำ ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{อัตราเร็วของการพายเรือตามน้ำ} &= \text{อัตราเร็วของการพายเรือในน้ำนิ่ง} + \text{อัตราเร็วของกระแสน้ำ} \\ \text{อัตราเร็วของการพายเรือทวนน้ำ} &= \text{อัตราเร็วของการพายเรือในน้ำนิ่ง} - \text{อัตราเร็วของกระแสน้ำ} \end{aligned}$$

 เกร็ดน่ารู้

ระบบนิเวศน้ำจืด แบ่งตามลักษณะของแหล่งน้ำเป็น 2 ประเภท คือ

1. แหล่งน้ำนิ่ง เช่น ทะเลสาบ หนอง บึง เป็นแหล่งที่ไม่มี การไหลของกระแสน้ำ

2. แหล่งน้ำไหล เช่น แม่น้ำ ลำธาร เป็นแหล่งที่มีการไหลของ กระแสน้ำ โดยมีอัตราเร็วของการไหลแตกต่างกันตามสภาพธรรมชาติ

ในแหล่งน้ำนิ่ง ถ้าเราอยู่ในเรือโดยไม่ออกแรงพายเรือ เรือจะ อยู่กับที่ แต่ถ้าเราออกแรงพายเรือ เรือจะเคลื่อนที่ไปด้วยอัตราเร็วหนึ่ง เรียกอัตราเร็วนี้ว่า **อัตราเร็วของการพายเรือในน้ำนิ่ง**

ในแหล่งน้ำไหล ถ้าเราอยู่ในเรือโดยไม่ออกแรงพายเรือ เรือจะ เคลื่อนที่ไปตามทิศทางของกระแสน้ำที่ไหลด้วยอัตราเร็วหนึ่ง เรียกอัตราเร็ว นี้ว่า **อัตราเร็วของกระแสน้ำ** แต่ถ้าเราออกแรงพายเรือไปในทิศทางเดียวกับ กระแสน้ำที่ไหล เรือจะเคลื่อนที่ได้เร็วขึ้น เพราะมีกระแสน้ำมาช่วย เรียกอัตราเร็วของเรือที่เคลื่อนที่นี้ว่า **อัตราเร็วของการพายเรือตามน้ำ** ซึ่งเท่ากับอัตราเร็วของการพายเรือในน้ำนิ่งบวกกับอัตราเร็วของกระแสน้ำ ในทางกลับกัน ถ้าเราออกแรงพายเรือไปในทิศทางตรงข้ามกับ กระแสน้ำที่ไหล เรือจะเคลื่อนที่ได้ช้าลง เพราะมีกระแสน้ำมาต้าน เรียกอัตราเร็วของเรือที่เคลื่อนที่นี้ว่า **อัตราเร็วของการพายเรือทวนน้ำ** ซึ่งเท่ากับ อัตราเร็วของการพายเรือในน้ำนิ่งลบด้วยอัตราเร็วของกระแสน้ำ

