



หนังสือเรียน

รายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ ๔ เล่ม ๒

ตามผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

พิมพ์ครั้งที่ ๑

ISBN 978-616-576-408-7

จำนวน ๙๐,๐๐๐ เล่ม พ.ศ. ๒๕๖๗

จัดจำหน่ายโดย

องค์การค้าของ สกสค. พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว

๒๒๔๙ ถนนลาดพร้าว วังทองหลาง กรุงเทพมหานคร

❖ มีลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ



ประกาศสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน
เรื่อง อนุญาตให้ใช้สื่อการเรียนรู้ในสถานศึกษา

ด้วยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำหนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ เล่ม ๒ ตามผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน ได้พิจารณาแล้วอนุญาตให้ใช้ในสถานศึกษาได้

ประกาศ ณ วันที่ ๑๔ กุมภาพันธ์ พ.ศ. ๒๕๖๗

ว่าที่ร้อยตรี 
(ธนุ วงษ์จินดา)

เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) มีอำนาจหน้าที่ในการพัฒนาหลักสูตร วิธีการเรียนรู้ การประเมินผล การจัดทำหนังสือเรียน แบบฝึกหัด และสื่อการเรียนรู้ทุกประเภทที่ใช้ประกอบการเรียนรู้ในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของการจัดการศึกษาขั้นพื้นฐาน

หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ เล่ม ๒ นี้ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) จัดทำตามผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยให้มีความลุ่มลึกขึ้นสำหรับการศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษาในด้านวิทยาศาสตร์ และมีเนื้อหาสาระที่ทัดเทียมกับนานาชาติ เน้นการคิดวิเคราะห์ การคิดอย่างมีวิจารณญาณ การแก้ปัญหา การคิดสร้างสรรค์ การใช้เทคโนโลยี การสื่อสารและการร่วมมือ รวมทั้งเชื่อมโยงความรู้สู่การนำไปใช้ในชีวิตจริง

กระทรวงศึกษาธิการหวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเรียนเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้ และเป็นส่วนสำคัญในการพัฒนาคุณภาพและมาตรฐานการศึกษา กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนบุคคลและหน่วยงานอื่น ๆ ที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำไว้ ณ โอกาสนี้

ว่าที่ร้อยตรี 
(ธนุ วงษ์จินดา)

เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีจุดเน้นเพื่อต้องการพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถที่ทัดเทียมกับนานาชาติ ได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงความรู้กับกระบวนการคิด ใช้กระบวนการสืบเสาะหาความรู้และแก้ปัญหาที่หลากหลาย มีการทำกิจกรรมด้วยการลงมือปฏิบัติ เพื่อให้ผู้เรียนได้ใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และทักษะแห่งศตวรรษที่ ๒๑ ซึ่งในปีการศึกษา ๒๕๖๑ เป็นต้นไปนี้ โรงเรียนจะต้องใช้ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ สสวท. จึงได้จัดทำหนังสือเรียนที่เป็นไปตามมาตรฐานหลักสูตรเพื่อให้โรงเรียนได้ใช้สำหรับจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ เล่ม ๒ นี้ มีผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมที่ครอบคลุมเนื้อหาบางส่วนที่ปรากฏตามตัวชี้วัดรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ โดยเมื่อผู้เรียนเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ทั้ง ๖ เล่ม ครบทุกชั้นปีในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ – ๖ แล้วจะสามารถบรรลุผลสัมฤทธิ์ตามตัวชี้วัดของรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ได้ และในขณะเดียวกันก็สามารถต่อยอดเนื้อหาจากรายวิชาพื้นฐานไปสู่เนื้อหาในรายวิชาเพิ่มเติมได้โดยไม่ต้องเสียเวลาเรียนซ้ำซ้อน ทั้งนี้ หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม ๒ นี้ มีเนื้อหาที่จำเป็นที่ต้องเรียน ประกอบด้วยเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม และเรขาคณิตวิเคราะห์ ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญและเพียงพอสำหรับการศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษาในด้านวิทยาศาสตร์ หรือประกอบอาชีพในสาขาที่ใช้วิทยาศาสตร์เป็นฐาน เช่น แพทย์ ทันตแพทย์ สัตวแพทย์ เทคโนโลยีชีวภาพ วิศวกรรม สถาปัตยกรรม เศรษฐศาสตร์ พาณิชยศาสตร์ ฯลฯ โดยเน้นกระบวนการคิดวิเคราะห์และการแก้ปัญหา เชื่อมโยงความรู้สู่การนำไปใช้ในชีวิตจริง ตลอดจนมีกิจกรรมที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนทำงานร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีประสิทธิภาพ รวมทั้งสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง อันเป็นรากฐานในการพัฒนาทรัพยากรบุคคลของชาติให้มีคุณภาพและพัฒนาเศรษฐกิจของประเทศ

การจัดทำหนังสือเรียนเล่มนี้ ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากผู้ทรงคุณวุฒิ นักวิชาการอิสระ คณาจารย์ทั้งหลาย รวมทั้งครูผู้สอน นักวิชาการ จากสถาบันและสถานศึกษาทั้งภาครัฐและเอกชน จึงขอขอบคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้ หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้หนังสือเรียนเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จะขอบคุณยิ่ง

(รองศาสตราจารย์ธีระเดช เจียรสุขสกุล)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

แนะนำการใช้หนังสือเรียน

ส่วนนี้เป็นส่วนแนะนำโครงสร้างของหนังสือเรียนเพื่อการใช้หนังสือเรียนอย่างมีประสิทธิภาพ

ในหนังสือเล่มนี้จะแบ่งบทเรียนเป็น 3 บท โดยแต่ละบทจะมีส่วนประกอบ ดังนี้

“

.....

.....

”

ส่วนนำของบท

เกริ่นนำบทด้วยข้อมูลที่น่าสนใจ รวมถึงการนำไปใช้ในชีวิตจริง เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนตระหนักถึงความสำคัญของการเรียนเนื้อหาในบท

จุดมุ่งหมาย

เป้าหมายที่นักเรียนควรไปถึงหลังจากเรียนจบบทนี้



จุดมุ่งหมาย

ความรู้ก่อนหน้า

ความรู้ที่นักเรียนจำเป็นต้องมีก่อนที่จะเรียนบทนี้



ความรู้ก่อนหน้า

เสริมสมอง

เกร็ดความรู้หลากหลายรูปแบบเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน เช่น ประวัตินักคณิตศาสตร์ ตัวอย่างการนำเนื้อหาคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริง การเชื่อมโยงเนื้อหาในบทกับวิชาอื่น



เสริมสมอง

กิจกรรม

กิจกรรมที่นักเรียนสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ด้วยตนเอง เพื่อช่วยพัฒนาทักษะการเรียนรู้และนวัตกรรม (learning and innovation skills) ที่จำเป็นสำหรับศตวรรษที่ 21 อันได้แก่ การคิดสร้างสรรค์และนวัตกรรม (creativity and innovation) การคิดแบบมีวิจารณญาณและการแก้ปัญหา (critical thinking and problem solving) การสื่อสาร (communication) และการร่วมมือ (collaboration)



กิจกรรม



เทคโนโลยี

โจทย์ที่มีไอคอนนี้สามารถใช้เทคโนโลยีช่วยในการคิดได้ โดยอาจใช้เครื่องคิดเลข โปรแกรมสำเร็จรูปในคอมพิวเตอร์ โปรแกรมประยุกต์ในโทรศัพท์สมาร์ทโฟน การค้นหาข้อมูลทางอินเทอร์เน็ต และอื่น ๆ ตามความเหมาะสม



โจทย์ท้าทาย

โจทย์ที่มีไอคอนนี้เป็นโจทย์ที่ค่อนข้างยากและซับซ้อนกว่าโจทย์แบบฝึกหัดทั่วไป เพื่อท้าทายความสามารถของนักเรียนที่ต้องการพัฒนาทักษะเพิ่มเติม นอกเหนือจากการเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท

แบบฝึกหัด

โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้ระหว่างเรียน มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาการเรียนรู้ของนักเรียน ช่วยให้นักเรียนสามารถตรวจสอบความรู้ความเข้าใจของตนเองได้



แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัดท้ายบท

แบบฝึกหัดท้ายบทแบ่งประเภทได้เป็น

- โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียนจบบท มีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท โดยจะมีแถบสี
- โจทย์ท้าทาย
- โจทย์เพื่อฝึกทักษะ ที่มีความน่าสนใจ โดยจะไม่มีแถบสีและไม่มีไอคอนหน้าเลขข้อ



แบบฝึกหัดท้ายบท

1.
2.
3.

บทที่ 1 จะใช้สี



บทที่ 2 จะใช้สี



บทที่ 3 จะใช้สี



สารบัญ

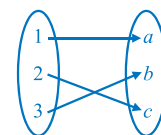
บทที่ 1 – 2

บทที่

เนื้อหา

หน้า

1



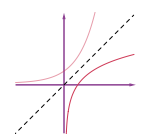
ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

บทที่ 1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

1

1.1 ความสัมพันธ์	3
1.2 ฟังก์ชัน	16
1.3 การใช้ฟังก์ชันในชีวิตจริง	39
1.4 กราฟของฟังก์ชัน	53
1.5 การดำเนินการของฟังก์ชัน	67
1.6 ฟังก์ชันผกผัน	80

2

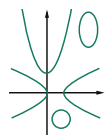


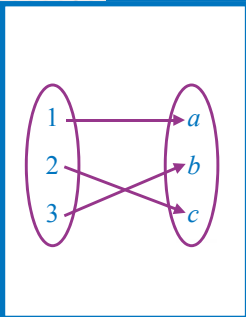
ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิทึม

บทที่ 2 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

99

2.1 เลขยกกำลัง	101
2.1.1 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม	101
2.1.2 รากที่สองในระบบจำนวนจริง รากที่ n	104
ในระบบจำนวนจริง และจำนวนจริงในรูปกรณฑ์	
2.1.3 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ	116
2.2 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	130
2.3 ฟังก์ชันลอการิทึม	149
2.4 การหาค่าลอการิทึม	159
2.5 การเปลี่ยนฐานของลอการิทึม	162
2.6 สมการและอสมการลอการิทึม	166
2.7 การประยุกต์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	174

สารบัญ	บทที่ 3	
บทที่	เนื้อหา	หน้า
3	บทที่ 3 เรขาคณิตวิเคราะห์	195
		
เรขาคณิตวิเคราะห์		
	3.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์	197
	3.1.1 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด	197
	3.1.2 จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง	206
	3.1.3 ความชันของเส้นตรง	212
	3.1.4 เส้นขนาน	218
	3.1.5 เส้นตั้งฉาก	223
	3.1.6 ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง	228
	3.1.7 ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด	239
	3.2 ภาคตัดกรวย	248
	3.2.1 วงกลม	251
	3.2.2 วงรี	262
	3.2.3 พาราโบลา	276
	3.2.4 ไฮเพอร์โบลา	292
	3.2.5 การเลื่อนกราฟ	308
	บรรณานุกรม	334
	ภาคผนวก	338
	คณะผู้จัดทำ	343

บทที่	1	ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
		1.1 ความสัมพันธ์ 1.2 ฟังก์ชัน 1.3 การใช้ฟังก์ชันในชีวิตจริง 1.4 กราฟของฟังก์ชัน 1.5 การดำเนินการของฟังก์ชัน 1.6 ฟังก์ชันผกผัน
		จุดมุ่งหมาย
		1. หาโดเมน เรนจ์ และตัวผกผัน และเขียนกราฟของความสัมพันธ์ 2. จำแนกความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันและไม่เป็นฟังก์ชัน 3. หาโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชัน 4. ตรวจสอบฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ฟังก์ชันทั่วถึง ฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด 5. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ และการหารของฟังก์ชัน 6. หาฟังก์ชันประกอบ 7. หาฟังก์ชันผกผัน 8. ใช้ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชันในการแก้ปัญหา

“

ในชีวิตจริง นักเรียนมักพบปริมาณสองปริมาณ ที่อยู่ในรูปแบบตัวเลขหรือสัญลักษณ์อื่น ๆ ที่มีความสัมพันธ์กัน กล่าวคือ เมื่อปริมาณหนึ่งเปลี่ยนไป อีกปริมาณจะเปลี่ยนแปลงตามไปด้วย เช่น เมื่อสังเกตหน้าปัดบนตู้จ่ายน้ำมัน ณ สถานีบริการน้ำมันแห่งหนึ่ง จะพบว่าบนหน้าปัดมีตัวเลขบอกปริมาณ 3 ชนิด ได้แก่ จำนวนเงิน (บาท) จำนวน (ลิตร) และราคาต่อลิตร (บาท) โดยในขณะที่เติมน้ำมัน ตัวเลขบนหน้าปัดในช่องจำนวนและจำนวนเงินจะมีการเปลี่ยนแปลงเพื่อแสดงจำนวนลิตรของน้ำมันที่เติมในขณะนั้น และจำนวนเงินที่ลูกค้าจะต้องจ่ายในการเติมน้ำมัน ซึ่งได้จากผลคูณของจำนวนลิตรและราคาต่อลิตรของน้ำมันที่เติม ความสัมพันธ์ของจำนวนลิตรและจำนวนเงินดังกล่าวเป็นตัวอย่างหนึ่งของฟังก์ชัน



”



ความรู้ก่อนหน้า

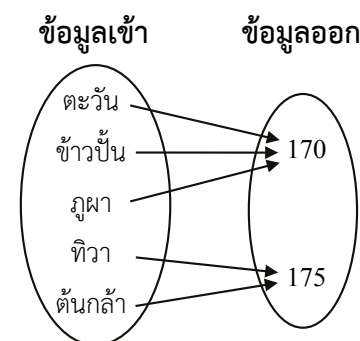
- ความรู้เกี่ยวกับสมการและกราฟในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
- เซต
- จำนวนจริง


goo.gl/Hu9Stk

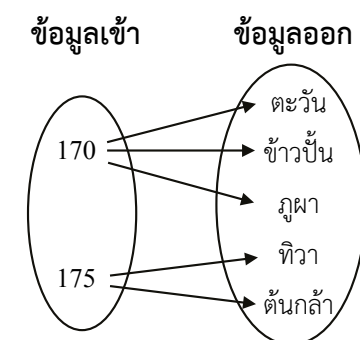
1.1 ความสัมพันธ์

ความหมายของความสัมพันธ์

เมื่อนักเรียนสอบถามความสูงของเพื่อนทุกคนในห้องเรียน จากนั้นสร้างเซตของข้อมูลขึ้นมาสองเซต คือ เซตของเพื่อนทุกคนในห้องเรียน และเซตของความสูงของเพื่อนทุกคนในห้องเรียน จะเห็นว่าเซตของข้อมูลทั้งสองมีความเกี่ยวข้องกัน นั่นคือ เมื่อกำหนดชื่อของเพื่อน จะทราบความสูงของเพื่อนคนนั้น เช่น



ในทางกลับกันเมื่อกำหนดความสูง จะทราบว่าใครมีความสูงตามที่กำหนดบ้าง ดังนี้



ในทางคณิตศาสตร์ การจับคู่ระหว่างสองสิ่งที่มีความสัมพันธ์กัน เขียนแทนได้ด้วยคู่อันดับ โดยแต่ละคู่อันดับจะประกอบด้วยสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลัง เช่น คู่อันดับ (a, b) มี a เป็นสมาชิกตัวหน้า และ b เป็นสมาชิกตัวหลัง คู่อันดับสองคู่อันดับใด ๆ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อสมาชิกตัวหน้าเท่ากัน และสมาชิกตัวหลังเท่ากัน นั่นคือ

$$(a, b) = (c, d) \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = c \text{ และ } b = d$$

เรียกเซตของคู่อันดับ (a, b) โดยที่ a และ b มีความเกี่ยวข้องกันบางประการว่า **ความสัมพันธ์ (relation)** จากสถานการณ์ข้างต้น ความสัมพันธ์ที่สมาชิกตัวหลังเป็นความสูงของสมาชิกตัวหน้า คือ $\{(170, \text{ตะวัน}), (170, \text{ข้าวปั้น}), (170, \text{ภูผา}), (175, \text{ทิวา}), (175, \text{ต้นกล้า})\}$

ในทางกลับกัน ความสัมพันธ์ที่สมาชิกตัวหลังคือชื่อเพื่อนที่มีความสูงเป็นสมาชิกตัวหน้า คือ $\{(170, \text{ตะวัน}), (170, \text{ข้าวปั้น}), (170, \text{ภูผา}), (175, \text{ทิวา}), (175, \text{ต้นกล้า})\}$

บทนิยาม 1

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือ เซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมดโดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย $A \times B$ (อ่านว่า เอ คูณ บี) เขียน $A \times B$ ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้ $A = \{1, 3, 5\}$ และ $B = \{a, b\}$ จงหา $A \times B$ และ $B \times A$

วิธีทำ $A \times B = \{(1, a), (1, b), (3, a), (3, b), (5, a), (5, b)\}$
 $B \times A = \{(a, 1), (a, 3), (a, 5), (b, 1), (b, 3), (b, 5)\}$

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่า $A \times B \neq B \times A$

เนื่องจากความสัมพันธ์คือเซตของคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้า (จากเซต A) และสมาชิกตัวหลัง (จากเซต B) มีความเกี่ยวข้องกันบางประการ จึงอาจกล่าวได้ว่า ความสัมพันธ์เป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B หรือเขียนได้ว่า $r \subset A \times B$ และเรียก r ว่า **ความสัมพันธ์จาก A ไป B**

บทนิยาม 2

r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

ถ้า $r \subset A \times A$ แล้วเรียก r ว่า **ความสัมพันธ์บนเซต A**

จากบทนิยามจะเห็นว่า ความสัมพันธ์เป็นเซตที่มีสมาชิกเป็นคู่อันดับ สามารถเขียนแบบแจกแจงสมาชิกหรือแบบบอกเงื่อนไขก็ได้ เช่น

$$\begin{aligned} \text{ให้ } A &= \{3, 5, 8, 10\} \text{ และ } B = \{2, 6, 9\} \\ A \times B &= \{(3, 2), (3, 6), (3, 9), (5, 2), (5, 6), (5, 9), \\ &\quad (8, 2), (8, 6), (8, 9), (10, 2), (10, 6), (10, 9)\} \end{aligned}$$

ถ้า r_1 เป็นความสัมพันธ์ “น้อยกว่า” จาก A ไป B

$$\text{จะได้ว่า } r_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid x < y\}$$

$$\text{หรือ } r_1 = \{(3, 6), (3, 9), (5, 6), (5, 9), (8, 9)\}$$

ถ้า r_2 เป็นความสัมพันธ์ “เท่ากับ” จาก A ไป B

$$\text{จะได้ว่า } r_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid x = y\}$$

$$\text{หรือ } r_2 = \emptyset$$

หมายเหตุ ในกรณีที่ A และ B เป็นเซตของจำนวนจริง อาจละการเขียน $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ไว้ในฐานที่เข้าใจว่า r เป็นความสัมพันธ์บนเซตของจำนวนจริง เช่น

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\} \text{ อาจเขียนเป็น } r = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

หรือเขียนเฉพาะเงื่อนไขซึ่งบรรยายลักษณะของความสัมพันธ์ เช่น $x^2 + y^2 = 1$

กราฟของความสัมพันธ์

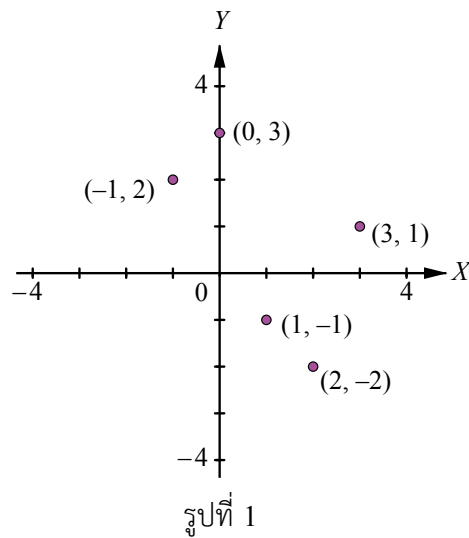
ในระบบพิกัดฉาก สามารถจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งระหว่างคู่อันดับของจำนวนจริง (x, y) กับจุดในระนาบ โดยให้ x เป็นพิกัดแรก และ y เป็นพิกัดหลัง

บทนิยาม 3

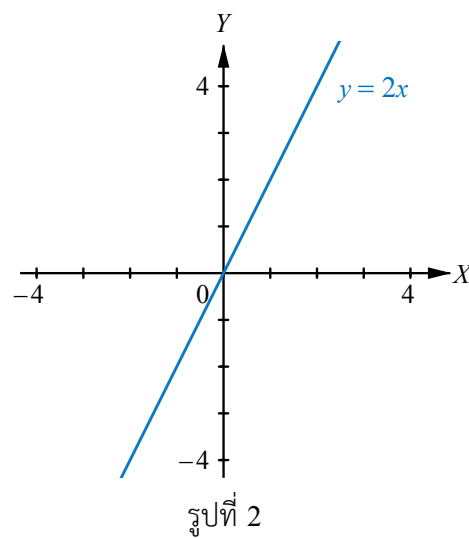
ให้ r เป็นสับเซตของ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ กราฟของความสัมพันธ์ r คือ เซตของจุดในระนาบที่แสดงคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ r

จากบทนิยามของกราฟของความสัมพันธ์ เมื่อทราบความสัมพันธ์แล้วจะเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่าง ๆ ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

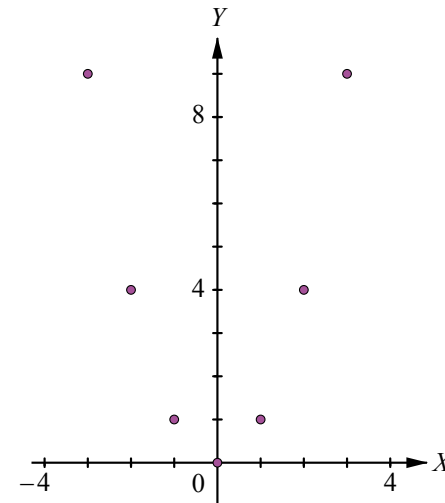
$$r_1 = \{(-1, 2), (0, 3), (1, -1), (2, -2), (3, 1)\}$$



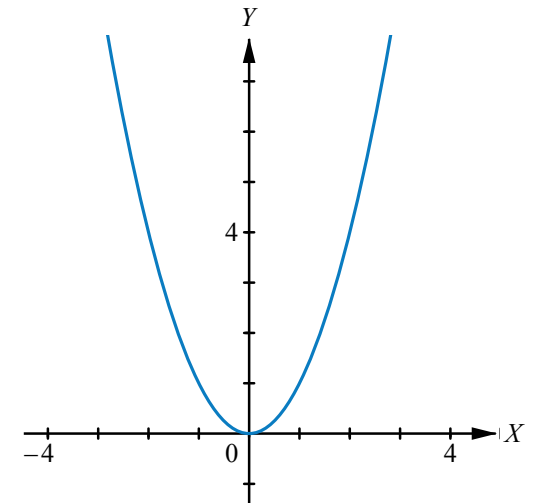
$$r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x\}$$



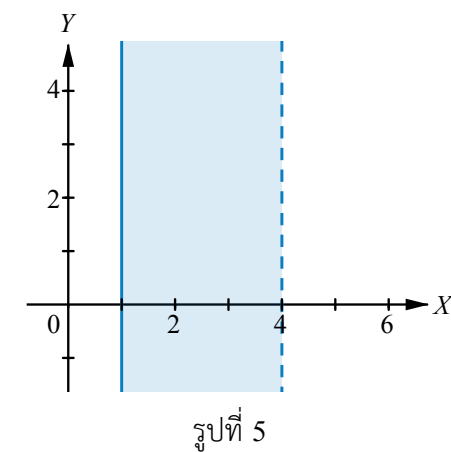
$$r_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x^2\}$$



$$r_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$$



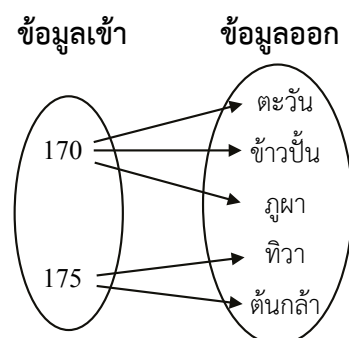
$$r_5 = \{(x, y) \mid 1 \leq x < 4\}$$



หมายเหตุ จากรูปที่ 5 กราฟของ r_5 เป็นส่วนหนึ่งของระนาบที่แรเงาในรูป ส่วนที่เป็นเส้นทึบแสดงว่าจุดทุกจุดบนเส้นนั้นรวมอยู่ในกราฟ ส่วนที่เป็นเส้นประแสดงว่าจุดทุกจุดบนเส้นประนั้นไม่รวมอยู่ในกราฟ

โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

พิจารณา



ความสัมพันธ์ r คือ $\{(170, \text{ตะวัน}), (170, \text{ข้าวปั้น}), (170, \text{ภูเขา}), (175, \text{ทิวา}), (175, \text{ต้นกล้า})\}$ จะเห็นว่า เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมดใน r คือ $\{170, 175\}$ เรียกเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมดในความสัมพันธ์ r ว่า **โดเมน (domain)** ของ r และเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดใน r คือ $\{\text{ตะวัน}, \text{ข้าวปั้น}, \text{ภูเขา}, \text{ทิวา}, \text{ต้นกล้า}\}$ เรียกเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดในความสัมพันธ์ r ว่า **เรนจ์ (range)** ของ r

บทนิยาม 4

ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

โดเมนของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมดใน r

เรนจ์ของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดใน r

โดเมนของ r เขียนแทนด้วย D_r และเรนจ์ของ r เขียนแทนด้วย R_r เมื่อ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

เขียน D_r และ R_r ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข ได้ดังนี้

$$D_r = \{x \in A \mid \text{มี } y \in B \text{ ซึ่ง } (x, y) \in r\}$$

$$R_r = \{y \in B \mid \text{มี } x \in A \text{ ซึ่ง } (x, y) \in r\}$$

ตัวอย่างที่ 2

ให้ $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ และกำหนดให้ความสัมพันธ์ r บนเซต A คือ $\{(x, y) \in A \times A \mid y = x^2\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์นี้

วิธีทำ r เป็นความสัมพันธ์บนเซต A หมายถึง $r \subset A \times A$

จะได้ $r = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$

ดังนั้น $D_r = \{-1, 0, 1\}$

$R_r = \{0, 1\}$

ตัวอย่างที่ 3

กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{16 - x^2}\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r

วิธีทำ พิจารณา $\sqrt{16 - x^2}$ จะเห็นว่า $16 - x^2$ ต้องไม่เป็นจำนวนลบ เพราะรากที่สองของจำนวนลบไม่เป็นจำนวนจริง

นั่นคือ $16 - x^2 \geq 0$ ซึ่งเป็นอสมการที่มีเซตคำตอบ คือ $\{x \mid -4 \leq x \leq 4\}$

ดังนั้น $D_r = \{x \mid -4 \leq x \leq 4\} = [-4, 4]$

เนื่องจาก $\sqrt{16 - x^2}$ ไม่เป็นจำนวนลบ และเมื่อแทน x ด้วย 0 จะได้ค่ามากที่สุดเป็น 4

ดังนั้น $R_r = \{y \mid 0 \leq y \leq 4\} = [0, 4]$

ตัวผกผันของความสัมพันธ์

พิจารณาความสัมพันธ์

$$r = \{(170, \text{ตะวัน}), (170, \text{ข้าวปุ้น}), (170, \text{ภูเขา}), (175, \text{ทิวา}), (175, \text{ต้นกล้า})\}$$

ถ้าสลับที่สมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับ จะได้ความสัมพันธ์

$$s = \{(\text{ตะวัน}, 170), (\text{ข้าวปุ้น}, 170), (\text{ภูเขา}, 170), (\text{ทิวา}, 175), (\text{ต้นกล้า}, 175)\}$$

โดเมนของ s คือ {ตะวัน, ข้าวปุ้น, ภูเขา, ทิวา, ต้นกล้า} และเรนจ์ของ s คือ {170, 175} จะเห็นว่าโดเมนของ r คือ เรนจ์ของ s และเรนจ์ของ r คือ โดเมนของ s โดยที่ s ได้จากการสลับสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับใน r เรียก s ว่า **ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r**

บทนิยาม 5

ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r คือความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r

ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย r^{-1}

เขียน r^{-1} ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

$$r^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in r\}$$

จากบทนิยาม ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้ว r^{-1} จะเป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A

ตัวอย่างที่ 4

จงหาตัวผกผันของความสัมพันธ์ r พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์เมื่อกำหนดให้ $r = \{(1, 1), (3, 2), (1, 3), (4, 1), (0, -1)\}$

วิธีทำ $r^{-1} = \{(1, 1), (2, 3), (3, 1), (1, 4), (-1, 0)\}$

$$D_{r^{-1}} = \{-1, 1, 2, 3\}$$

$$R_{r^{-1}} = \{0, 1, 3, 4\}$$

ตัวอย่างที่ 5

จงเขียนกราฟของ r และ r^{-1} ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน

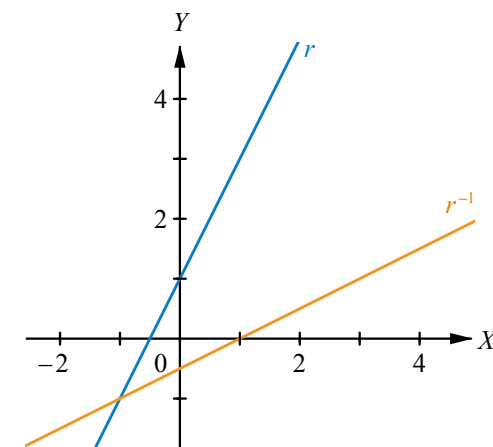
เมื่อกำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x + 1\}$

วิธีทำ จาก $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x + 1\}$

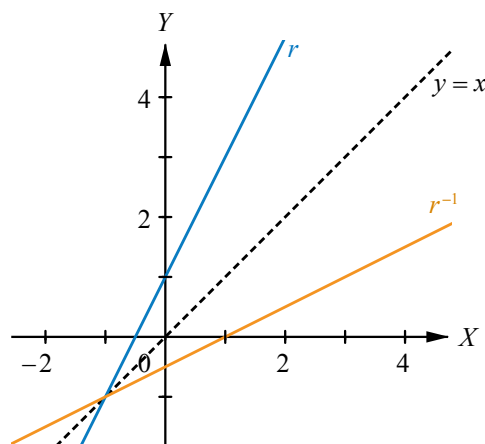
$$r^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x + 1\}$$

$$\text{หรือ } r^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \frac{y-1}{2}\}$$

$$\text{หรือ } r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x-1}{2}\}$$



กราฟของความสัมพันธ์ใด ๆ ก็กับกราฟของตัวผกผันของความสัมพัธ์นั้นจะมีเส้นตรง $y=x$ เป็นแกนสมมาตร ดังเช่นกราฟของ r และ r^{-1} ในตัวอย่างที่ 5 มีเส้นตรง $y=x$ เป็นแกนสมมาตร เขียนได้ดังรูปที่ 6



รูปที่ 6

เพื่อความสะดวก จะเรียกจุดที่มีพิกัดเป็น (a, b) ว่าจุด (a, b) จากรูปที่ 6 ถ้าจุด (a, b) อยู่บนกราฟของ r จะเห็นว่าเมื่อลากส่วนของเส้นตรงจากจุด (a, b) บนกราฟของ r ไปยังจุด (b, a) บนกราฟของ r^{-1} ส่วนของเส้นตรงนี้จะตั้งฉากกับเส้นตรง $y=x$ และระยะจากจุด (a, b) ถึงเส้นตรง $y=x$ เท่ากับระยะจากจุด (b, a) ถึงเส้นตรง $y=x$ และจะได้ว่าจุด (a, b) และ (b, a) เป็นจุดสมมาตรที่มีเส้นตรง $y=x$ เป็นแกนสมมาตร นั่นคือ ถ้าพับรูปนี้ตามแนวเส้นตรง $y=x$ แล้ว กราฟของความสัมพันธ์ r และ r^{-1} จะทับกันพอดี

ตัวอย่างที่ 6

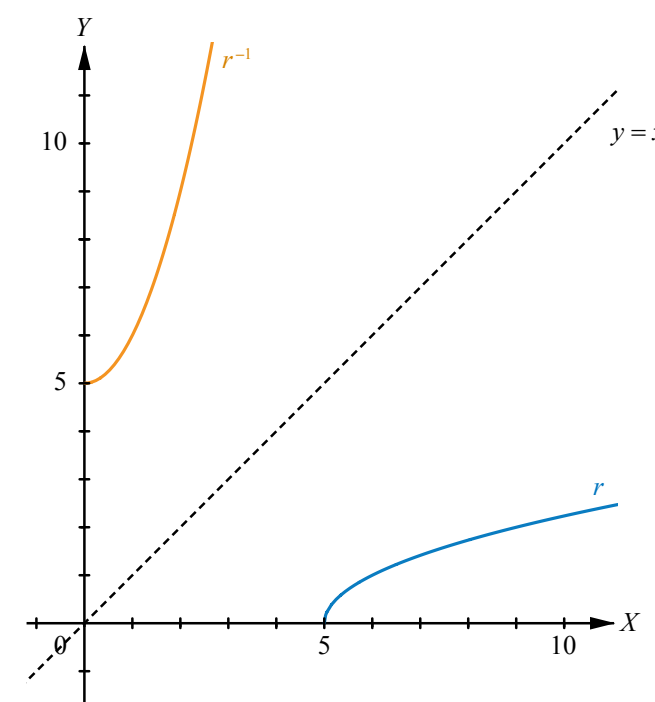
จงเขียนกราฟของ r และ r^{-1} ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน เมื่อกำหนดให้ $r = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x-5}\}$

วิธีทำ จาก $r = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x-5}\}$

$$r^{-1} = \{(y, x) \mid y = \sqrt{x-5}\}$$

$$\text{หรือ } r^{-1} = \{(y, x) \mid y \geq 0 \text{ และ } x = y^2 + 5\}$$

$$\text{หรือ } r^{-1} = \{(x, y) \mid x \geq 0 \text{ และ } y = x^2 + 5\}$$



ข้อสังเกต สมการ $y = \sqrt{x-5}$ บอกให้ทราบว่า $y \geq 0$

จากสมการ $x = y^2 + 5$ จะได้ว่า y อาจเป็นจำนวนจริงบวกหรือจำนวนจริงลบก็ได้ แต่เนื่องจาก y ในที่นี้คือสมาชิกของเรนจ์ของความสัมพันธ์ r ซึ่งเป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ จึงจำเป็นต้องเขียน $y \geq 0$ กำกับไว้



แบบฝึกหัด 1.1

- จงหา $A \times B$ และ $B \times A$ เมื่อกำหนด A และ B ดังต่อไปนี้
 - $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{3, 6, 7\}$
 - $A = \{a, b, c\}$ และ $B = \{e, f\}$
 - $A = \{-3, -2, -1\}$ และ $B = \{1, 2, 3\}$
- ถ้า n เป็นจำนวนสมาชิกของเซต A และ m เป็นจำนวนสมาชิกของเซต B แล้ว จงหาจำนวนสมาชิกของ $A \times B, B \times A, A \times A$ และ $B \times B$
- กำหนดให้ $M = \{1, 2\}, N = \{2, 3\}$ และ $P = \{4, 5\}$ จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก
 - $(M \times N) \cup (M \times P)$
 - $M \times (N \cup P)$
 - $M \times (N \cap P)$
 - $(M \times N) \cap (M \times P)$
- ถ้า $E = \{1, 2, 3\}$ และ $r = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 2), (3, 3), (2, 1)\}$ แล้ว จงพิจารณาว่า r เป็นความสัมพันธ์บนเซต E หรือไม่
- ให้ $A = \{0, 2, 4\}, B = \{0, 1, 2\}$ และ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B กำหนดโดย $(x, y) \in r$ เมื่อ $x > y$
 - จงเขียน r แบบแจกแจงสมาชิก
 - จงเขียน r แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก
- ให้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ กำหนด r_1, r_2 และ r_3 เป็นความสัมพันธ์บนเซต S ดังต่อไปนี้

$$r_1 = \{(x, y) \in S \times S \mid x + y = 6\}$$

$$r_2 = \{(x, y) \in S \times S \mid x > 2 \text{ และ } y = 3\}$$

$$r_3 = \{(x, y) \in S \times S \mid x - y = 6\}$$
 จงเขียน r_1, r_2 และ r_3 แบบแจกแจงสมาชิก พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของแต่ละความสัมพันธ์

7. จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

- $r = \{(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$
- $m = \{(-2, \sqrt{2}), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, \sqrt{2})\}$
- $n = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x - 2\}$
- $p = \{(x, y) \mid y = \sqrt{2}\}$
- $q = \{(x, y) \mid y = x^2 + 1\}$
- $s = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = |x - 2|\}$
- $t = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 + 2}\}$
- $v = \{(x, y) \mid y = \sqrt{1 - x^2}\}$
- $w = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{x - 2}\}$

8. จงหาตัวผกผันของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของตัวผกผันของความสัมพันธ์เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

- $r = \{(1, 2), (4, 3), (2, 2), (2, 1), (3, 1)\}$
- $r = \{\dots, (-5, 4), (-3, 2), (-1, 0), (1, 2), (3, 4), (5, 6), \dots\}$
- $r = \{(x, y) \mid y = 2 - 3x\}$
- $r = \{(x, y) \mid xy = 1\}$

9. จงเขียนกราฟของ r และ r^{-1} ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ r ดังต่อไปนี้

- $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y \geq x + 1\}$ เมื่อ $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- $r = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y^2 = x\}$
- $r = \{(x, y) \mid y < x - 1\}$

1.2 ฟังก์ชัน

ความสัมพันธ์ที่ สมาชิกแต่ละตัวในโดเมนมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเรนจ์เพียงตัวเดียว เป็นความสัมพันธ์ที่มีความสำคัญและใช้มากในคณิตศาสตร์ จะเรียกความสัมพันธ์ที่มีสมบัติดังกล่าวว่า **ฟังก์ชัน (function)** ซึ่งนิยามดังนี้

บทนิยาม 6

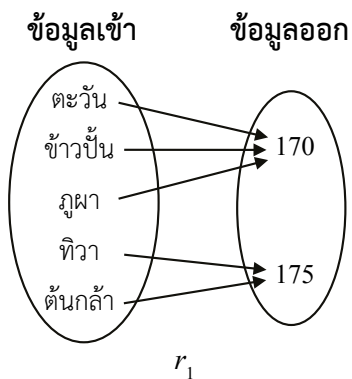
ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งคู่อันดับสองคู่อันดับใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องเหมือนกัน

จากบทนิยามกล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน f คือ ความสัมพันธ์ ซึ่งสำหรับ x, y และ z ใด ๆ ถ้า $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$
 ดังนั้น ถ้ามี x, y และ z โดยที่ $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แต่ $y \neq z$ จะได้ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชัน

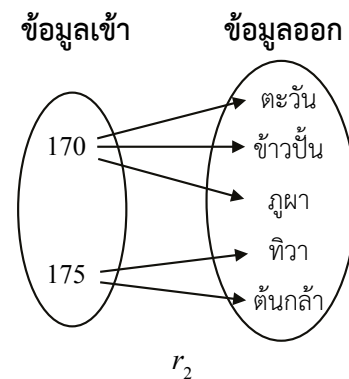
ตัวอย่างที่ 7

จากแผนภาพที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชัน

1)



2)



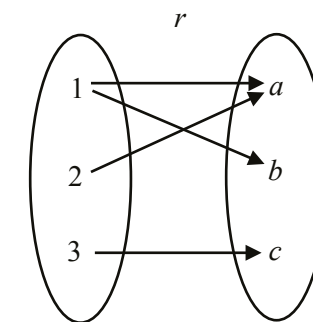
- วิธีทำ**
- 1) จากแผนภาพพบว่า ไม่มีสมาชิกใดในโดเมนของ r_1 จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของ r_1 มากกว่า 1 ตัว ดังนั้น r_1 เป็นฟังก์ชัน
 - 2) จากแผนภาพพบว่า 170 ซึ่งอยู่ในโดเมนของ r_2 จับคู่กับ ตะวัน ข้าวปั้น และภูเขาซึ่งเป็นสมาชิกในเรนจ์ของ r_2 ดังนั้น r_2 ไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 8

กำหนดความสัมพันธ์ต่อไปนี้ จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ใดบ้างเป็นฟังก์ชัน

- 1) $r = \{(1, a), (1, b), (2, a), (3, c)\}$
- 2) $f = \{(x, y) \mid y = x^2 + 1\}$
- 3) $g = \{(x, y) \mid y^2 = x\}$

วิธีทำ 1) เขียนแผนภาพแสดงการจับคู่ระหว่างสมาชิกของโดเมนกับสมาชิกของเรนจ์ของ r ได้ดังนี้



จะได้ว่า r ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกันคือ $(1, a)$ และ $(1, b)$

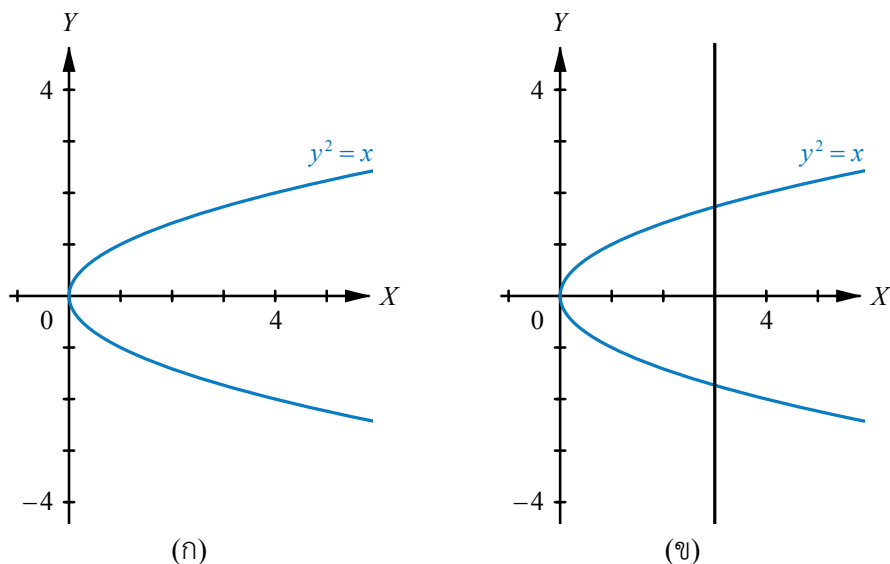
- 2) ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ จะได้ว่า $y = x^2 + 1$ และ $z = x^2 + 1$ ซึ่งสรุปได้ว่า $y = z$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน
- 3) เนื่องจาก $(4, 2) \in g$ และ $(4, -2) \in g$ แต่ $2 \neq -2$ ดังนั้น g ไม่เป็นฟังก์ชัน

การพิจารณาว่า ความสัมพันธ์บนเซตของจำนวนจริงเป็นฟังก์ชันหรือไม่ อาจพิจารณาได้จากกราฟของความสัมพัทธ์ โดยลากเส้นขนานกับแกน Y ถ้าไม่มีเส้นขนานกับแกน Y เส้นใดตัดกราฟของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้มากกว่า 1 จุด ความสัมพันธ์นั้นจะเป็นฟังก์ชัน แต่ถ้ามีเส้นขนานกับแกน Y แม้เพียงเส้นเดียวตัดกราฟมากกว่า 1 จุดแล้ว ความสัมพันธ์นั้นจะไม่ใช่ฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 9

ให้ $r = \{(x, y) \mid y^2 = x\}$ จงพิจารณาว่า r เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ เขียนกราฟของ r ได้ดังรูป (ก)



จากกราฟในรูป (ก) จะเห็นว่า แต่ละค่าของ x ที่ $x > 0$ เมื่อลากเส้นขนานกับแกน Y ผ่านค่า x เหล่านี้ จะตัดกราฟสองจุด คือ $(x, \sqrt{x})$ และ $(x, -\sqrt{x})$ เช่นดังรูป (ข)

ดังนั้น r ไม่เป็นฟังก์ชัน

ข้อตกลง ในกรณีที่ความสัมพันธ์ f เป็นฟังก์ชัน จะเขียน $y = f(x)$ แทน $(x, y) \in f$ และเรียก $f(x)$ ว่าเป็น ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x อ่านว่า เอฟของเอกซ์ หรือ เอฟเอกซ์ เพื่อความสะดวก บางครั้งจะกล่าวถึง “ฟังก์ชัน $f(x)$ ” โดยละไว้ในฐานที่เข้าใจว่ากำลังกล่าวถึงฟังก์ชัน f ที่มีค่าของฟังก์ชันที่ x เป็น $f(x)$

ตัวอย่างที่ 10

กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - x + 2$ จงหา $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$ และ $f(a)$ เมื่อ $a \in \mathbb{R}$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2 - x + 2$
 จะได้ $f(-2) = (-2)^2 - (-2) + 2 = 8$
 $f(0) = 0^2 - 0 + 2 = 2$
 $f(1) = 1^2 - 1 + 2 = 2$
 $f(a) = a^2 - a + 2$

ตัวอย่างที่ 11

กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x}$ จงหา $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$ และ $f(3)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x}$
 จะได้ $f(-2) = \frac{\sqrt{2-(-2)}}{-2} = \frac{\sqrt{4}}{-2} = -1$
 $f(0) = \frac{\sqrt{2-0}}{0}$ ซึ่งไม่นิยามเศษส่วนที่ตัวส่วนเป็น 0
 ดังนั้น $f(0)$ ไม่นิยาม

$$f(1) = \frac{\sqrt{2-1}}{1} = 1$$

$$f(3) = \frac{\sqrt{2-3}}{3} = \frac{\sqrt{-1}}{3}$$

เนื่องจาก $\sqrt{-1}$ ไม่นิยามในระบบจำนวนจริง ดังนั้น $f(3)$ ไม่นิยาม

จากตัวอย่างที่ 11 จะเห็นว่า ฟังก์ชัน f หาค่าได้ที่บางค่า x แต่ไม่นิยามที่บางค่า x เซตของค่า x ซึ่งฟังก์ชัน f หาค่าได้ที่ x เรียกว่าโดเมนของฟังก์ชัน f และเซตของค่าของฟังก์ชัน f ที่เป็นไปได้ทั้งหมด เรียกว่าเรนจ์ของฟังก์ชัน f

กล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่าโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน f คือโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ซึ่งเป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 12

กำหนด $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x}$ จงหาโดเมนของ f

วิธีทำ ฟังก์ชัน f จะนิยาม เมื่อ $2-x \geq 0$ และ $x \neq 0$
 นั่นคือ $x \leq 2$ และ $x \neq 0$
 ดังนั้น โดเมนของ f คือ $(-\infty, 2] - \{0\}$ ■

ตัวอย่างที่ 13

จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1) f(x) = -2x^2 \quad 2) g(x) = \frac{1}{x} \quad 3) h(x) = \sqrt{x}$$

วิธีทำ 1) ให้ $y = f(x) = -2x^2$

จะเห็นว่าฟังก์ชัน f นิยามที่ทุก $x \in \mathbb{R}$

$$\text{ดังนั้น } D_f = \mathbb{R}$$

$$\text{เนื่องจาก } y = -2x^2 \text{ ดังนั้น } -\frac{y}{2} = x^2$$

$$\text{เนื่องจาก } x^2 \geq 0 \text{ ดังนั้น } -\frac{y}{2} \geq 0 \text{ แสดงว่า } y \leq 0$$

$$\text{ดังนั้น } R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0\} = (-\infty, 0]$$

$$2) \text{ ให้ } y = g(x) = \frac{1}{x}$$

เมื่อ $x = 0$ จะไม่สามารถหา $\frac{1}{x}$ ที่เป็นจำนวนจริงได้

เมื่อ $x \neq 0$ สามารถนิยาม $\frac{1}{x}$ ได้เสมอ

$$\text{ดังนั้น } D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

เนื่องจาก $y = \frac{1}{x}$ จะได้ว่า $xy = 1$ ดังนั้น $y \neq 0$

$$\text{จะได้ } R_g = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$3) \text{ ให้ } y = h(x) = \sqrt{x}$$

$$\text{เมื่อ } x \geq 0 \text{ จะได้ } y = \sqrt{x} \geq 0$$

เมื่อ $x < 0$ จะไม่สามารถหา $\sqrt{x}$ ที่เป็นจำนวนจริงได้

$$\text{ดังนั้น } D_h = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, \infty)$$

$$R_h = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} = [0, \infty)$$
 ■

ถ้าโดเมนของฟังก์ชัน f คือเซต A และเรนจ์ของฟังก์ชัน f เป็นสับเซตของเซต B เรียกฟังก์ชันที่มีสมบัติเช่นนี้ว่า ฟังก์ชันจาก A ไป B (function from A into B)

บทนิยาม 7

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น A และเรนจ์เป็นสับเซตของ B

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เขียนแทนด้วย $f: A \rightarrow B$

โดยทั่วไป เมื่อกล่าวถึงฟังก์ชันโดยไม่ระบุว่าเป็นฟังก์ชันจากเซตใดไปเซตใด จะหมายถึงฟังก์ชันจากสับเซตของ $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งโดเมนของฟังก์ชันคือ A และเรนจ์ของฟังก์ชันคือ B เรียกฟังก์ชันที่มีสมบัติเช่นนี้ว่า ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B (function from A onto B)

บทนิยาม 8

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น A และเรนจ์เป็น B

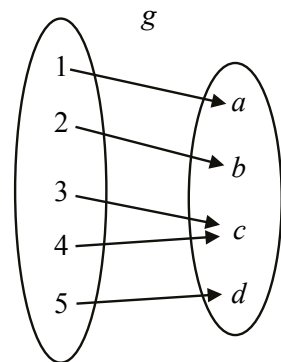
f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วย $f: A \xrightarrow{\text{onto}} B$

ตัวอย่างที่ 14

ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{a, b, c, d\}$

และกำหนดฟังก์ชัน g ดังแผนภาพ



จงพิจารณาว่า g เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B หรือไม่

วิธีทำ จากแผนภาพ จะได้ว่า $D_g = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A$

และ $R_g = \{a, b, c, d\} = B$

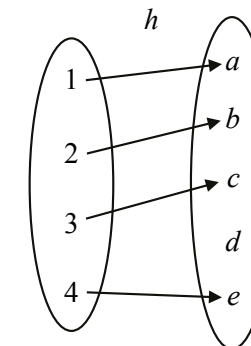
ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

ตัวอย่างที่ 15

ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{a, b, c, d, e\}$

และกำหนดฟังก์ชัน h ดังแผนภาพ



จงพิจารณาว่า h เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจากมี $d \in B$ ที่ $d \notin R_h$

ดังนั้น h ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

ตัวอย่างที่ 16

กำหนด $f(x) = x^2 + 1$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}$ หรือไม่

วิธีทำ ให้ $y = f(x) = x^2 + 1$

จะได้ว่า $y - 1 = x^2$ และ $x^2 \geq 0$ ดังนั้น $y \geq 1$

จะได้ $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\} = [1, \infty)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ แต่ f ไม่เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}$

หมายเหตุ จากตัวอย่างข้างต้น f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $[1, \infty)$

ฟังก์ชันจาก A ไป B ที่ไม่มีสมาชิกใน A สองตัวใด ๆ ที่จับคู่กับสมาชิกใน B ตัวเดียวกัน นั่นคือ ถ้า $x_1 \neq x_2$ แล้ว $f(x_1) \neq f(x_2)$ เรียกว่า ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one function) จาก A ไป B

บทนิยาม 9

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ซึ่งสำหรับ x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B เขียนแทนด้วย $f: A \xrightarrow{1-1} B$

จากบทนิยาม $f: A \rightarrow B$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ มี x_1 และ x_2 ใน A ที่ $x_1 \neq x_2$ แต่ $f(x_1) = f(x_2)$

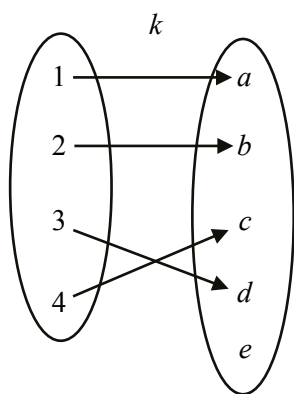
f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B (one-to-one function from A onto B หรือ one-to-one correspondence) เขียนแทนด้วย $f: A \xrightarrow{1-1}_{\text{onto}} B$ หมายถึง f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และเป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ตัวอย่างที่ 17

ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{a, b, c, d, e\}$

และกำหนดฟังก์ชัน k ดังแผนภาพ



จงพิจารณาว่า k เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B หรือไม่

วิธีทำ จากแผนภาพ ไม่มีสมาชิกใน A สองตัวใด ๆ ที่จับคู่กับสมาชิกใน B ตัวเดียวกัน นั่นคือ ถ้า $x_1 \neq x_2$ แล้ว $k(x_1) \neq k(x_2)$ ดังนั้น k เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B

ตัวอย่างที่ 18

จงตรวจสอบว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

1) $f(x) = 2 - x$

2) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

วิธีทำ 1) จาก $f(x) = 2 - x$ จะได้ว่า $D_f = \mathbb{R}$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

สมมติ $f(x_1) = f(x_2)$

จะได้ $2 - x_1 = 2 - x_2$

$$-x_1 = -x_2$$

ดังนั้น $x_1 = x_2$

นั่นคือ ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2) จาก $f(x) = x^2 + 2x + 1$ จะได้ว่า $D_f = \mathbb{R}$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

สมมติ $f(x_1) = f(x_2)$

จะได้ $x_1^2 + 2x_1 + 1 = x_2^2 + 2x_2 + 1$

$$x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 2(x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2) = 0$$

นั่นคือ $x_1 - x_2 = 0$ หรือ $x_1 + x_2 + 2 = 0$

$$x_1 = x_2 \text{ หรือ } x_2 = -x_1 - 2$$

จะเห็นว่า มีกรณีที่ $x_1 \neq x_2$ แต่ $f(x_1) = f(x_2)$

เช่น ให้ $x_1 = 0$ และ $x_2 = -0 - 2 = -2$

$$\text{จะได้ } f(x_1) = f(0) = (0)^2 + 2(0) + 1 = 1$$

$$\text{และ } f(x_2) = f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) + 1 = 1$$

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

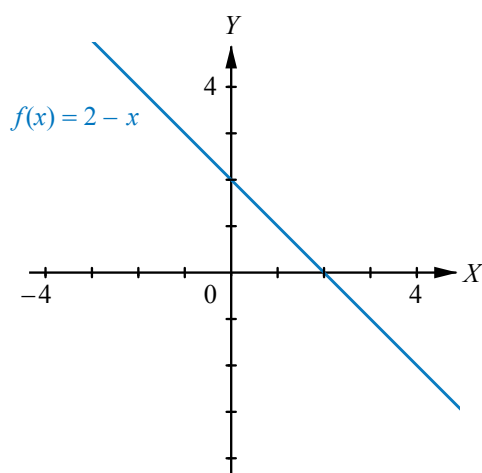
ในการพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ นอกจากการตรวจสอบโดยใช้บทนิยามของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแล้ว อาจพิจารณาจากกราฟของฟังก์ชันนั้นได้ โดยลากเส้นขนานกับแกน X ตัดกราฟของฟังก์ชันนั้น

ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ เส้นขนานกับแกน X ทุกเส้นตัดกราฟของฟังก์ชัน f ไม่เกิน 1 จุด

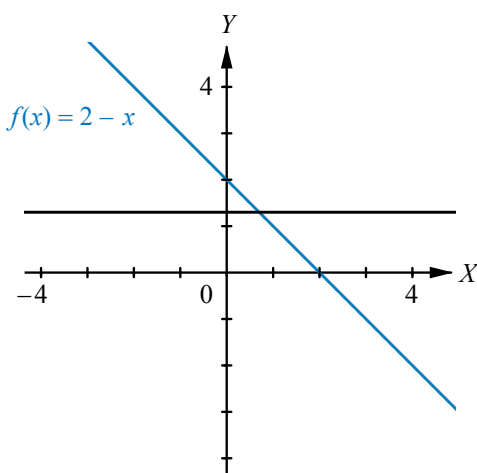
ฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ มีเส้นขนานกับแกน X อย่างน้อยหนึ่งเส้นที่ตัดกราฟของ f มากกว่า 1 จุด

จากการตรวจสอบฟังก์ชันในตัวอย่างที่ 18 ฟังก์ชัน $f(x) = 2 - x$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เมื่อพิจารณากราฟของฟังก์ชันทั้งสอง จะพบว่า

กราฟของ $f(x) = 2 - x$ เป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน X ดังรูปที่ 7ก



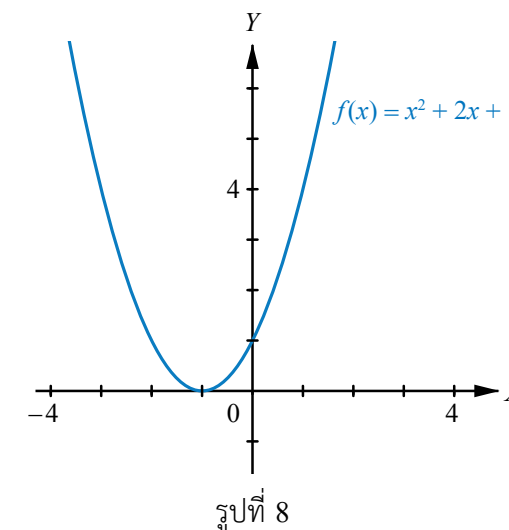
รูปที่ 7ก



รูปที่ 7ข

เมื่อลากเส้นขนานกับแกน X ตัดกราฟ ดังรูปที่ 7ข จะพบว่าเส้นที่ขนานกับแกน X แต่ละเส้นจะตัดกราฟของ $y = f(x) = 2 - x$ เพียงจุดเดียว แสดงว่า สำหรับจำนวนจริง x_1 และ x_2 ใด ๆ ไม่มี x_1 และ x_2 ที่ต่างกันที่ทำให้ $f(x_1)$ เท่ากับ $f(x_2)$

กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 2x + 1$ เขียนได้ดังรูป



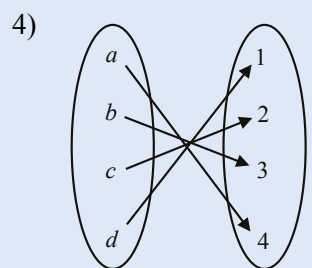
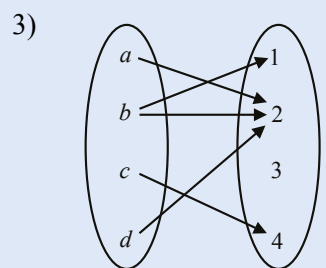
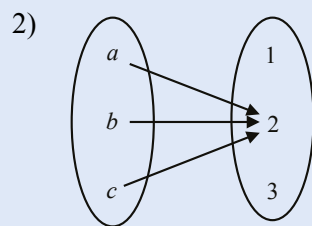
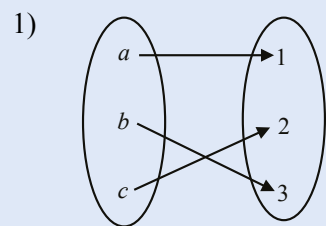
รูปที่ 8

เมื่อลากเส้นขนานกับแกน X ตัดกราฟ จะมีเส้นขนานกับแกน X ที่ตัดกราฟของ $y = f(x) = x^2 + 2x + 1$ สองจุด นั่นคือ มี x ที่ต่างกันที่ทำให้ได้ $f(x)$ เท่ากัน เช่น เส้นตรง $y = 1$ ตัดกราฟที่จุด $(0, 1)$ และ $(-2, 1)$ เป็นต้น

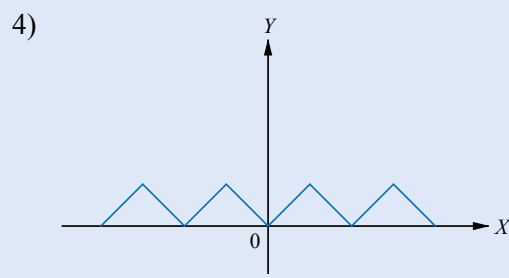
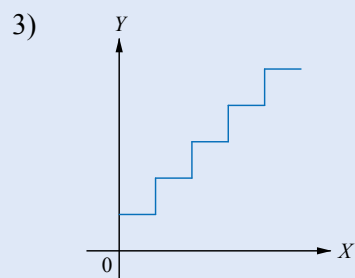
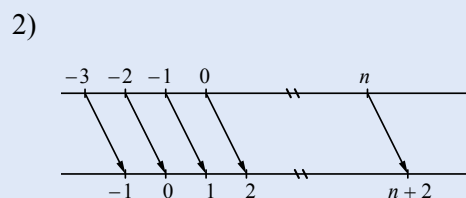
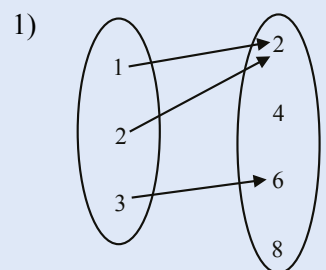


แบบฝึกหัด 1.2ก

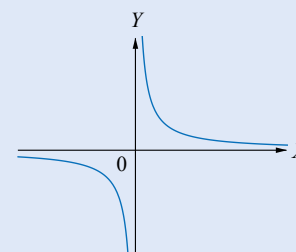
1. จงพิจารณาว่าแผนภาพที่กำหนดให้ต่อไปนี้ แผนภาพใดแสดงความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน



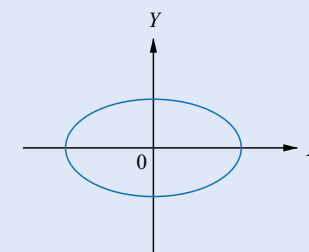
2. จากแผนภาพหรือกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่า ความสัมพันธ์ในข้อใดบ้างที่เป็นฟังก์ชันและข้อใดบ้างที่ไม่เป็นฟังก์ชัน



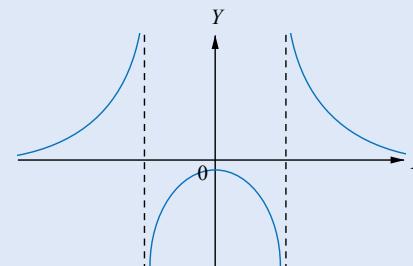
5)



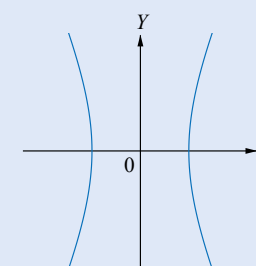
6)



7)



8)



3. ความสัมพันธ์ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชัน ถ้าไม่เป็น จงให้เหตุผล

1) $\{(1, a), (2, b), (3, b), (3, c)\}$

2) $\{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\}$

3) $\{(x, y) \in A \times A \mid y = x - 2\}$ เมื่อ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

4) $\{(x, y) \in A \times B \mid y < x\}$ เมื่อ $A = \{0, 1\}$ และ $B = \{-1, 1\}$

5) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$

6) $\{(x, y) \mid x + y = 5\}$

7) $\{(x, y) \mid x^3 + 3y = 4\}$

8) $\{(x, y) \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4\}$

9) $\{(x, y) \mid |x| + |y| = 3\}$

4. จากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ในรูปตารางต่อไปนี้ ความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

1)

A	B
a	1
b	2
c	2
d	4
e	3

2)

A	B
a	1
b	2
a	3
b	4
c	5

3)

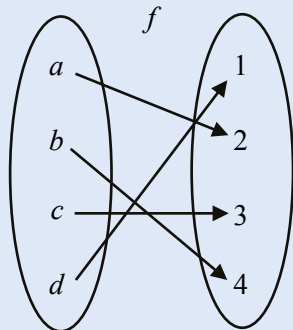
A	B
a	1
b	3
c	2
d	4
e	5

4)

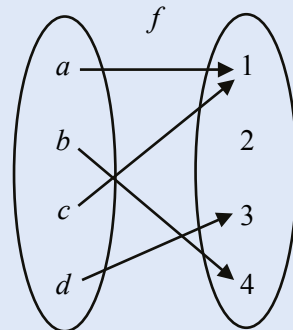
A	B
a	1
a	2
a	3
b	2
c	5

5. จากแผนภาพแสดงฟังก์ชัน f จงหา $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ และ $f(d)$

1)



2)



6. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ จงเขียนฟังก์ชัน f แบบแจกแจงสมาชิก เมื่อ

1) $f(x) = x^2$

2) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

3) $f(x) = \sqrt{x+2}$

4) $f(x) = |x+1|$

7. ให้ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ x & \text{เมื่อ } 1 \leq x \leq 3 \\ 2 & \text{เมื่อ } x > 3 \end{cases}$

จงหา $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(\sqrt{3})$, $f(9)$ และ $f(3+h) - f(3)$ เมื่อ $h > 0$

8. ให้ $f = \{(x, y) \mid y = x^3 + 4x - 3\}$ จงพิจารณาว่า

1) $f(3+2)$ เท่ากับ $f(3) + f(2)$ หรือไม่

2) $f(3 \cdot 2)$ เท่ากับ $f(3)f(2)$ หรือไม่

9. กำหนด $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นสับเซตของ $A \times A$ จงเขียนกราฟพร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

1) $f(x) = 2x$

2) $f(x) = 2x - 3$

3) $f(x) = 2x^2$

4) $f = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$

10. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f(x) = \frac{1}{2}$

2) $f(x) = \sqrt{x+2}$

3) $f(x) = x^2 - 1$

4) $f(x) = |x|$

11. กำหนดให้ $h(x) = x^2 - 6$ และ $D_h = \{x \mid -4 < x < 3\}$ จงหา R_h

12. กำหนดให้ $A = \{a, b, c\}$ และ $B = \{b, c, d\}$

$$f_1 = \{(a, c), (b, d), (c, c)\} \quad f_2 = \{(a, d), (b, b), (c, c)\}$$

$$f_3 = \{(b, a), (c, c), (d, a)\} \quad f_4 = \{(a, b), (c, c), (b, c)\}$$

$$f_5 = \{(a, b), (b, c), (c, d)\} \quad f_6 = \{(a, c), (b, c), (c, c)\}$$

$$f_7 = \{(b, b), (c, c), (d, a)\}$$

พิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดให้ว่ามีฟังก์ชันใดบ้างที่เป็น

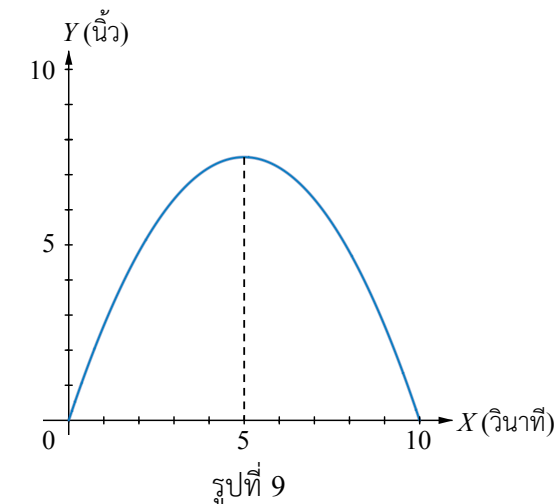
- 1) ฟังก์ชันจาก A ไป B
- 2) ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B
- 3) ฟังก์ชันจาก B ไป A
- 4) ฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง A
- 5) ฟังก์ชันจาก A ไป A
- 6) ฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไป B
- 7) ฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง A
- 8) ฟังก์ชัน 1-1 จาก B ไป A

13. จงตรวจสอบว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชัน 1-1

$$1) f(x) = x^2 + x \quad 2) g(x) = 2x + 5 \quad 3) h(x) = |2x - 1|$$

ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

ในการโยนลูกบอลจากระดับพื้นดินขึ้นไปในแนวตั้ง ลูกบอลจะขึ้นไปจนถึงจุดสูงสุดแล้วตกลงมาถึงพื้นในเวลา 10 วินาที เมื่อวัดความสูง (นิ้ว) ของลูกบอลจากระดับพื้นดิน ขณะเวลาต่าง ๆ จะได้ว่าความสูงของลูกบอลจากระดับพื้นดินเป็นฟังก์ชันของเวลา กราฟของฟังก์ชันนี้แสดงได้ดังรูป

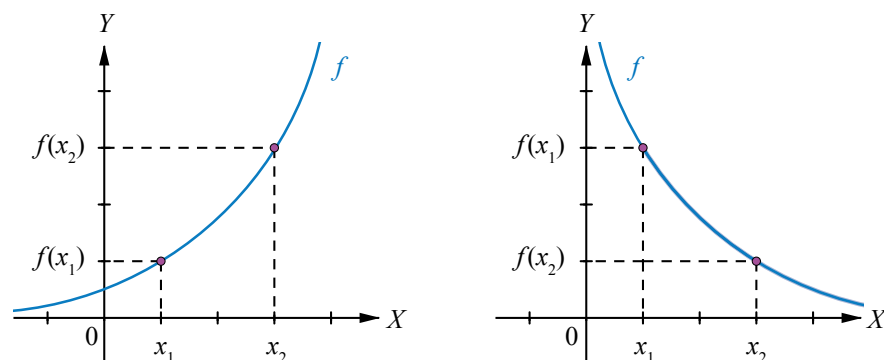


จากกราฟ พบว่า ในช่วงวินาทีที่ 0 ถึงวินาทีที่ 5 ความสูงของลูกบอลเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ และจากวินาทีที่ 5 ถึงวินาทีที่ 10 ความสูงของลูกบอลลดลงเรื่อย ๆ ในกรณีนี้จะกล่าวว่า ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0, 5]$ และเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[5, 10]$

บทนิยาม 10

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และ A เป็นสับเซตของโดเมน

1. f เป็น ฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) บนเซต A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$
2. f เป็น ฟังก์ชันลด (decreasing function) บนเซต A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$



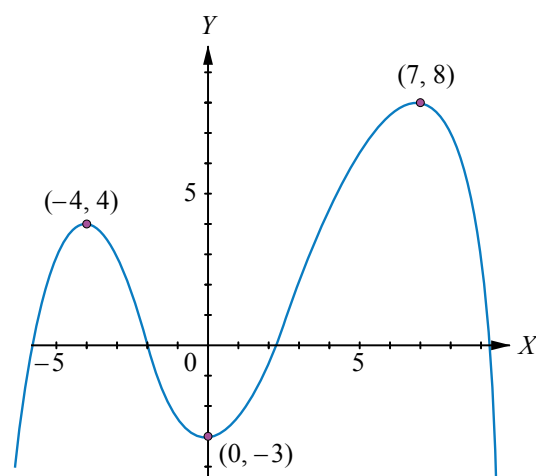
ฟังก์ชันเพิ่ม
รูปที่ 10ก

ฟังก์ชันลด
รูปที่ 10ข

ในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนโดเมน D_f จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 19

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีกราฟดังรูป จงระบุช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันลด



วิธีทำ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, -4]$ และบนช่วง $[0, 7]$
ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-4, 0]$ และบนช่วง $[7, \infty)$

ตัวอย่างที่ 20

จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนเซตที่กำหนดให้

- 1) $f(x) = 3x - 2$ บน $\mathbb{R}$
- 2) $g(x) = -x^3 + 1$ บน $\mathbb{R}$
- 3) $h(x) = \frac{2}{x}$ บนช่วง $(-\infty, 0)$ และ $(0, \infty)$

วิธีทำ 1) สำหรับ $f(x) = 3x - 2$

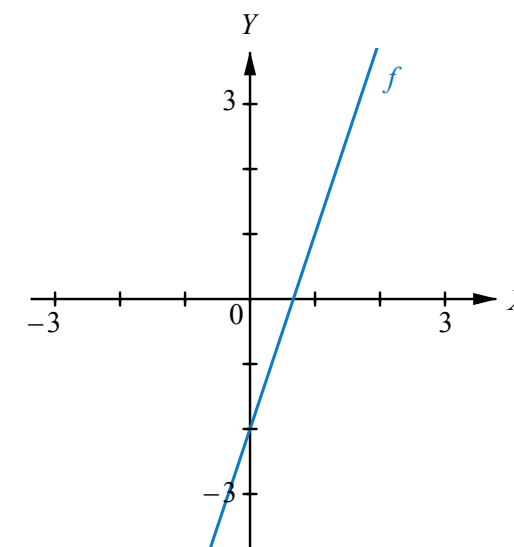
ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $x_1 < x_2$

$$\text{จะได้ว่า } 3x_1 < 3x_2$$

$$3x_1 - 2 < 3x_2 - 2$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $\mathbb{R}$



2) สำหรับ $g(x) = -x^3 + 1$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $x_1 < x_2$

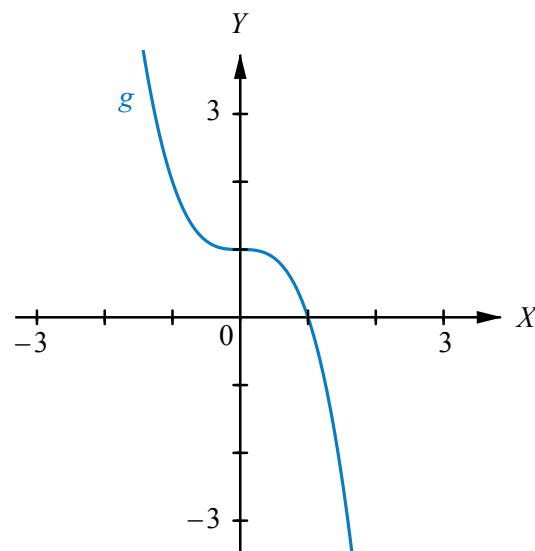
$$\text{จะได้ว่า } x_1^3 < x_2^3$$

$$-x_1^3 > -x_2^3$$

$$-x_1^3 + 1 > -x_2^3 + 1$$

$$g(x_1) > g(x_2)$$

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันลดบน $\mathbb{R}$



3) พิจารณาฟังก์ชัน $h(x) = \frac{2}{x}$ บนช่วง $(-\infty, 0)$ และบนช่วง $(0, \infty)$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ บนช่วง $(-\infty, 0)$ ซึ่ง $x_1 < x_2$

$$\text{จะได้ว่า } 2x_1 < 2x_2$$

$$\frac{2x_1}{x_1x_2} < \frac{2x_2}{x_1x_2} \quad \text{เนื่องจาก } x_1x_2 > 0$$

$$\frac{2}{x_2} < \frac{2}{x_1}$$

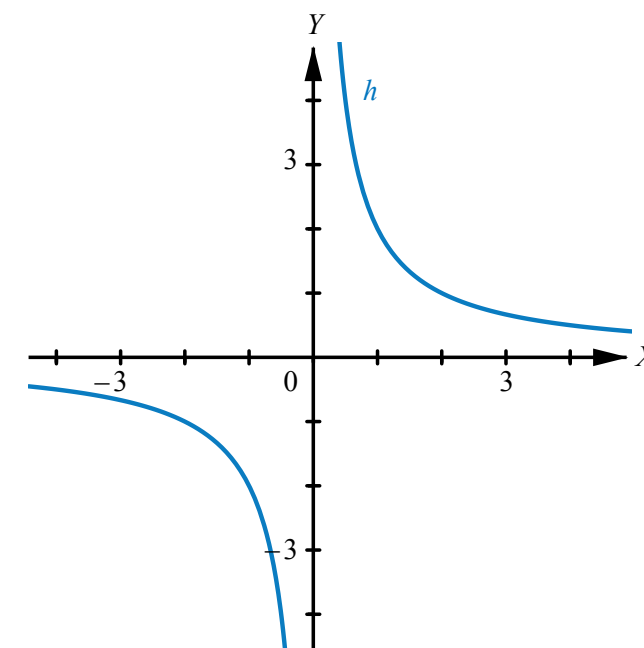
$$\frac{2}{x_1} > \frac{2}{x_2}$$

$$h(x_1) > h(x_2)$$

ดังนั้น h เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty, 0)$

เมื่อพิจารณา $h(x) = \frac{2}{x}$ บนช่วง $(0, \infty)$ ก็ได้ผลเช่นเดียวกัน

สรุปได้ว่า h เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty, 0)$ และบนช่วง $(0, \infty)$

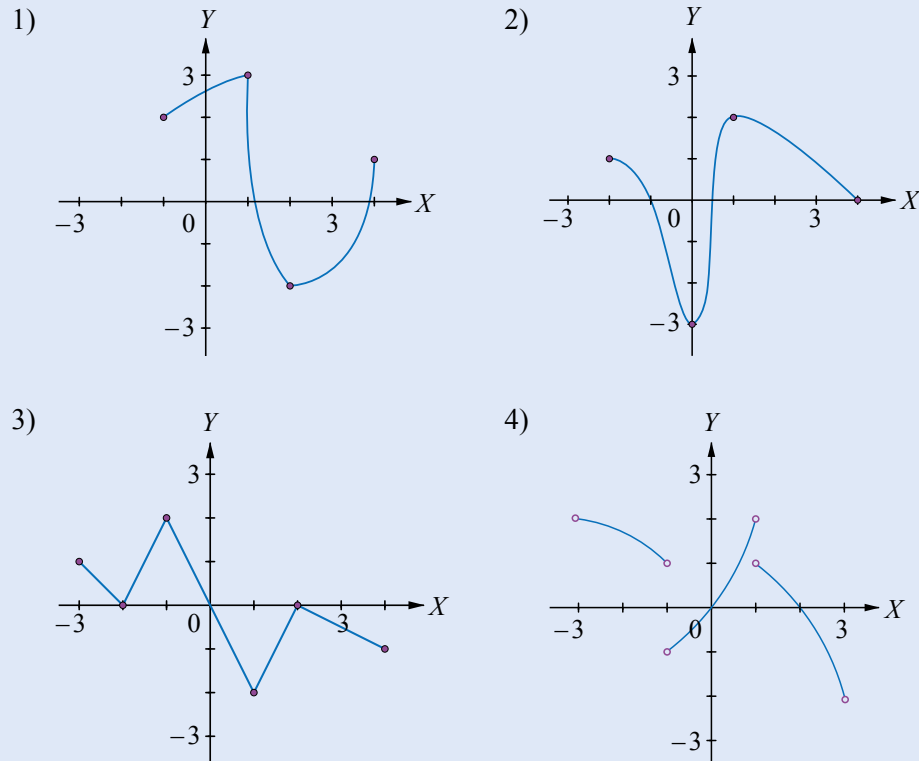


หมายเหตุ จากตัวอย่างข้างต้น ถึงแม้ว่า h จะเป็นฟังก์ชันลดทั้งบนช่วง $(-\infty, 0)$ และบนช่วง $(0, \infty)$ แต่ h ไม่เป็นฟังก์ชันลดบน $D_h = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ เพราะว่า -2 และ 1 อยู่ในโดเมนของ h ซึ่ง 1 มากกว่า -2 แต่ $h(1)$ ไม่น้อยกว่า $h(-2)$



แบบฝึกหัด 1.2ข

- จากกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ จงหาช่วงที่ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันเพิ่มและช่วงที่ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันลด



- จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนเซตที่กำหนดให้

- $f(x) = -3x + 7$ บนช่วง $(0, \infty)$
- $f(x) = -x^2 + 5$ บนช่วง $(-\infty, 0]$
- $f(x) = |x|$ บนช่วง $[2, 6]$
- $f(x) = -\sqrt{x}$ บนช่วง $[0, 5]$

1.3 การใช้ฟังก์ชันในชีวิตจริง

ในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงฟังก์ชันที่สำคัญบางชนิดที่นักเรียนรู้จักมาบ้างแล้ว และมีการนำไปใช้แก้ปัญหาที่พบเห็นในชีวิตจริง

ฟังก์ชันเชิงเส้น

ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

กราฟของฟังก์ชันเชิงเส้นจะเป็นเส้นตรงในระบบพิกัดฉาก

ฟังก์ชัน $f(x) = ax + b$ เมื่อ $a = 0$ จะได้ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = b$ มีชื่อเรียกว่า **ฟังก์ชันคงตัว (constant function)**

ตัวอย่างที่ 21

พ่อค้าเปิดร้านขายอาหารกล่องเพื่อสุขภาพ มีต้นทุนสองส่วน ส่วนแรกคือค่าเช่าร้านเดือนละ 4,000 บาท ส่วนที่สองคือต้นทุนวัตถุดิบกล่องละ 15 บาท พ่อค้าตั้งราคาขายไว้ที่กล่องละ 40 บาท จงหา

- ฟังก์ชันต้นทุนในการผลิตอาหารกล่อง x กล่อง ในระยะเวลา 1 เดือน
- ฟังก์ชันรายได้จากการขายอาหารเพื่อสุขภาพ x กล่อง ในระยะเวลา 1 เดือน
- พ่อค้าจะต้องขายอาหารกล่องเดือนละกี่กล่อง จึงจะคุ้มทุน

วิธีทำ 1) ให้ C แทนฟังก์ชันต้นทุนในการผลิตอาหารกล่อง x กล่อง ในระยะเวลา 1 เดือน เนื่องจากต้นทุนประกอบด้วยสองส่วนคือ ค่าเช่าร้านเดือนละ 4,000 บาท และต้นทุนวัตถุดิบ 15 บาทต่อกล่อง

$$\text{ดังนั้น } C(x) = 15x + 4,000$$

2) ให้ R แทนฟังก์ชันรายได้จากการขายอาหารกล่อง x กล่อง ในระยะเวลา 1 เดือน เนื่องจากราคาขายอยู่ที่ 40 บาทต่อกล่อง

$$\text{ดังนั้น } R(x) = 40x$$

3) จุดคุ้มทุนคือจุดที่รายได้เท่ากับต้นทุน นั่นคือ

$$R(x) = C(x)$$

$$40x = 15x + 4,000$$

$$25x = 4,000$$

$$x = 160$$

ดังนั้น พ่อค้าจะต้องขายอาหารกล่องเดือนละ 160 กล่อง จึงจะคุ้มทุน ■

ตัวอย่างที่ 22

ฟังก์ชันแสดงราคาของรถยนต์ยี่ห้อหนึ่งเมื่อเวลาผ่านไปเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ถ้าปัจจุบันรถยนต์มีราคา 500,000 บาท และในอีก 5 ปีข้างหน้า รถยนต์จะมีราคา 350,000 บาท จงหา

- 1) ฟังก์ชันแสดงราคาของรถยนต์เมื่อเวลาผ่านไป x ปี
- 2) เมื่อเวลาผ่านไปสองปี รถยนต์ยี่ห้อนี้จะมีราคาลดลงเหลือเท่าใด

วิธีทำ 1) ให้ $P(x) = mx + b$ เป็นฟังก์ชันแสดงราคาของรถยนต์เมื่อเวลาผ่านไป x ปี โดย m และ b เป็นค่าคงตัว

จากโจทย์ $P(0) = 500,000$ และ $P(5) = 350,000$

จะได้ $b = 500,000$

และ $350,000 = 5m + 500,000$

$$\begin{aligned} m &= \frac{350,000 - 500,000}{5} \\ &= -30,000 \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(x) = 500,000 - 30,000x$

- 2) เมื่อ $x = 2$ จะได้

$$\begin{aligned} P(2) &= 500,000 - (30,000 \times 2) \\ &= 440,000 \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไปสองปี รถยนต์ยี่ห้อนี้จะมีราคาลดลงเหลือ 440,000 บาท ■



กิจกรรม : ชั่งน้ำหนัก

อุปกรณ์

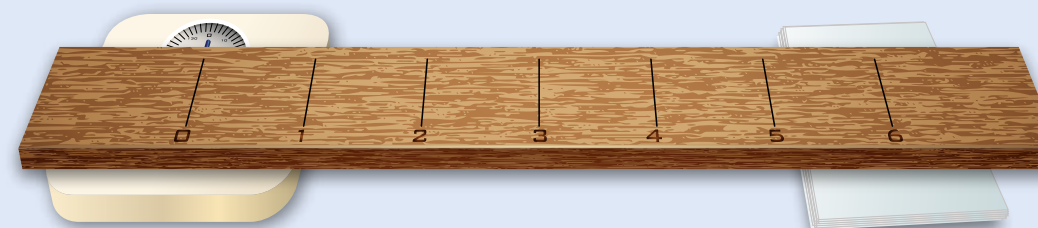
1. เครื่องชั่งน้ำหนัก
2. แผ่นไม้ที่มีความยาวไม่น้อยกว่า 1.2 เมตร และสามารถรับน้ำหนักคนที่ขึ้นไปยืนได้
3. ไม้บรรทัดและดินสอ
4. กองกระดาษที่มีความสูงเท่าเครื่องชั่งน้ำหนัก

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. เตรียมแผ่นไม้โดยวัดระยะสำหรับยืนบนแผ่นไม้ ให้แต่ละตำแหน่งห่างกัน 15 เซนติเมตร แล้วทำสัญลักษณ์และกำหนดหมายเลขแต่ละตำแหน่งให้เห็นอย่างชัดเจน ทั้งนี้ ตำแหน่งหมายเลข 3 ควรอยู่ประมาณกึ่งกลางของแผ่นไม้ ดังรูป



2. นำแผ่นไม้วางบนเครื่องชั่งน้ำหนัก โดยให้ตำแหน่งหมายเลข 0 บนแผ่นไม้อยู่กึ่งกลางของเครื่องชั่งน้ำหนัก จัดให้แผ่นไม้อยู่ในแนวขนานกับพื้นโดยใช้กองกระดาษรองที่ปลายอีกด้านหนึ่งของแผ่นไม้ และให้ตำแหน่งหมายเลข 6 อยู่กึ่งกลางของกองกระดาษ ดังรูป เมื่อวางแผ่นไม้ลงบนเครื่องชั่งน้ำหนักแล้วปรับเครื่องชั่งน้ำหนักให้เข็มอยู่ที่ตำแหน่ง 0 กิโลกรัม



เครื่องชั่งน้ำหนัก

กองกระดาษที่มีความสูง
เท่าเครื่องชั่งน้ำหนัก

3. ให้นักเรียนคนที่ 1 ชั่งน้ำหนัก โดยเริ่มยืนที่ตำแหน่งหมายเลข 0 อ่านตัวเลขแสดงน้ำหนักบนเครื่องชั่งแล้วบันทึกน้ำหนักที่อ่านได้ในตาราง หลังจากนั้นเปลี่ยนตำแหน่งที่ยืนไปเรื่อย ๆ ตามที่กำหนดจนถึงตำแหน่งหมายเลข 6 ซึ่งอยู่บนกองกระดาษ บันทึกน้ำหนักที่อ่านได้ในแต่ละตำแหน่ง ทำซ้ำแบบเดียวกันกับนักเรียนอีก 2 คน

ตำแหน่งที่ยืน	0	1	2	3	4	5	6
ระยะทางจากตำแหน่งหมายเลข 0 (เซนติเมตร)	0	15	30	45	60	75	90
ค่าที่อ่านได้จากเครื่องชั่งน้ำหนักของนักเรียนคนที่ 1 (กิโลกรัม)							
ค่าที่อ่านได้จากเครื่องชั่งน้ำหนักของนักเรียนคนที่ 2 (กิโลกรัม)							
ค่าที่อ่านได้จากเครื่องชั่งน้ำหนักของนักเรียนคนที่ 3 (กิโลกรัม)							

4. นำข้อมูลที่บันทึกในข้อ 3 ไปเขียนกราฟ โดยให้แกน X แสดงระยะทางจากตำแหน่งหมายเลข 0 (เซนติเมตร) และแกน Y แสดงค่าที่อ่านได้จากเครื่องชั่งน้ำหนัก (กิโลกรัม) แล้วพิจารณาว่ากราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางจากตำแหน่งหมายเลข 0 (เซนติเมตร) กับค่าที่อ่านได้จากเครื่องชั่งน้ำหนักของนักเรียนแต่ละคน (กิโลกรัม) มีลักษณะอย่างไร

5. จงหาฟังก์ชันแสดงค่าที่อ่านได้จากเครื่องชั่งน้ำหนักของนักเรียนแต่ละคน (กิโลกรัม) เมื่อนักเรียนยืนอยู่ห่างจากตำแหน่งหมายเลข 0 เป็นระยะทาง x เซนติเมตร



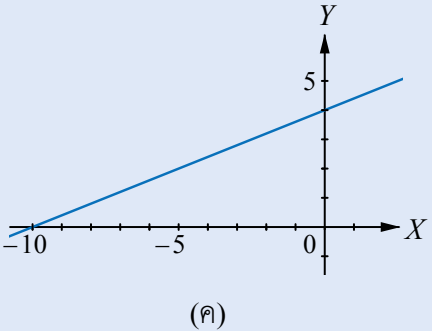
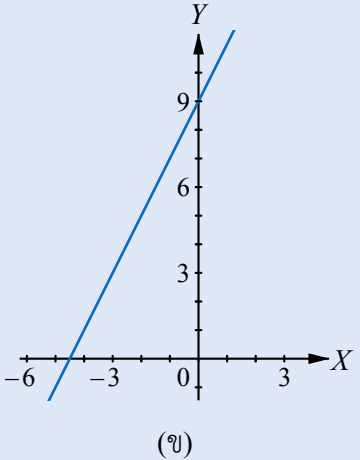
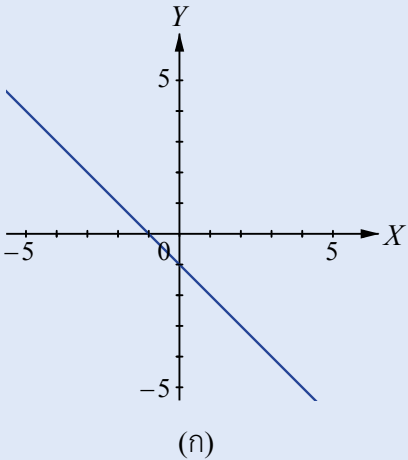
แบบฝึกหัด 1.3ก

1. จงจับคู่สมการกับกราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $y = 2x + 9$

2) $y = -1 - x$

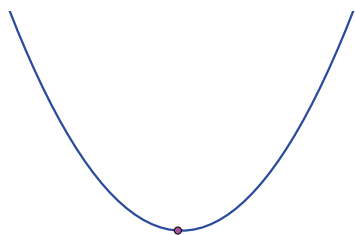
3) $y = \frac{2}{5}x + 4$



2. จงเขียนฟังก์ชันแทนสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟ
 - 1) ค่าขนส่งสินค้าจากกรุงเทพฯ ไปยังจังหวัดที่อยู่ในเขตชายแดนภาคใต้ประกอบด้วยค่าขนส่งขั้นต่ำ 150 บาท กับค่าขนส่งที่คิดตามน้ำหนักสินค้ากิโลกรัมละ 5 บาท
 - 2) รายรับของพนักงานขายสินค้าของบริษัทแห่งหนึ่งประกอบด้วยเงินขั้นต่ำ 6,000 บาท รวมกับ 5% ของยอดขายสินค้า (บาท)
3. ในปี 2560 ยอดขายสินค้าชนิดใหม่ของบริษัทแห่งหนึ่งอยู่ที่ 12,000 ชิ้น ถ้าบริษัทต้องการให้ยอดขายสินค้าเพิ่มขึ้นปีละ 10% ของยอดขายในปี 2560
 - 1) จงเขียนฟังก์ชันแสดงยอดขายสินค้าเมื่อเวลาผ่านไป x ปี
 - 2) อีก 5 ปีข้างหน้า บริษัทนี้ควรมียอดขายสินค้าเท่าใด

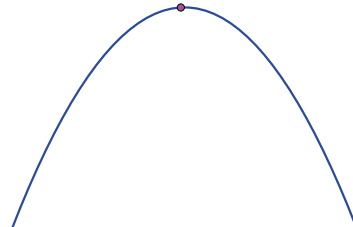
ฟังก์ชันกำลังสอง

ฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$ ลักษณะของกราฟของฟังก์ชันขึ้นอยู่กับ a, b และ c เมื่อ a เป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบ จะทำให้ได้กราฟเป็นเส้นโค้งหงายขึ้นหรือคว่ำลง ตามลำดับ ดังรูปที่ 11ก และ 11ข



$$y = ax^2 + bx + c, a > 0$$

รูปที่ 11ก



$$y = ax^2 + bx + c, a < 0$$

รูปที่ 11ข

จากรูปที่ 11ก และ 11ข จะเห็นว่า
 ถ้า $a > 0$ กราฟเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น
 ถ้า $a < 0$ กราฟเป็นเส้นโค้งคว่ำลง

กราฟของฟังก์ชันกำลังสองมีชื่อเรียกว่า **พาราโบลา**

จุดวกกลับ คือ จุดยอดของพาราโบลา

ในกรณีที่ฟังก์ชันกำลังสองเขียนอยู่ในรูปของ $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$ การหาจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดของกราฟทำได้โดยจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปของ $y = a(x-h)^2 + k$ โดยอาศัยการจัดบางส่วนของสมการให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ เพื่อให้หาจุดวกกลับของกราฟหรือจุด (h, k) ได้ง่ายขึ้น ดังนี้

$$\text{จาก } y = ax^2 + bx + c \text{ เมื่อ } a \neq 0$$

$$\text{จะได้ } \frac{y}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

$$\frac{y}{a} - \frac{c}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x$$

$$\frac{y}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\frac{y}{a} + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\frac{y}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y = a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\text{ให้ } h = -\frac{b}{2a} \text{ และ } k = \frac{4ac - b^2}{4a} \text{ จะได้ } y = a(x-h)^2 + k$$

$$\text{กราฟของ } y = ax^2 + bx + c \text{ เมื่อ } a \neq 0 \text{ จะมีจุดวกกลับที่จุด } \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

$$\text{ให้ } y = f(x) \text{ จะได้ } f(h) = k \text{ ดังนั้นจึงอาจเขียนจุดวกกลับของ } f \text{ ในรูป } \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

ได้เช่นกัน

ตัวอย่างที่ 23

จงเขียนกราฟของ $f(x) = x^2 - 2x - 3$ พร้อมทั้งหา

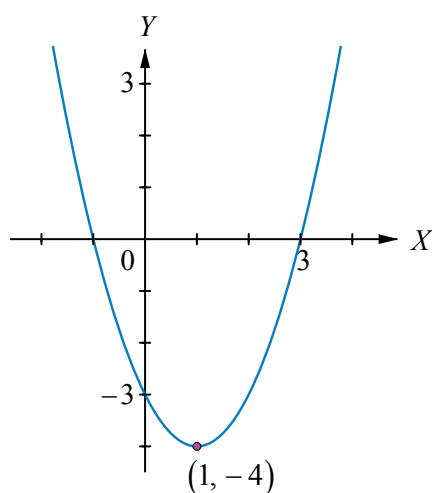
- 1) โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน f
- 2) จุดวกกลับของกราฟ
- 3) จุดวกกลับของกราฟเป็นจุดที่ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดและมีค่าเท่าใด
- 4) จุดที่กราฟตัดแกน X

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2 - 2x - 3$
เขียน $f(x)$ ให้อยู่ในรูป $a(x-h)^2 + k$ ได้ดังนี้
$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3$$
$$= (x-1)^2 - 4$$

จะได้ $a = 1, h = 1$ และ $k = -4$

เนื่องจาก $a > 0$ ดังนั้น กราฟของ f จะหงายขึ้นและมีจุดวกกลับที่จุด $(1, -4)$

เขียนกราฟของ $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ได้ดังนี้



- 1) จากกราฟ พบว่า $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \{y \mid y \geq -4\}$
- 2) กราฟมีจุดวกกลับที่จุด $(1, -4)$
- 3) จุดวกกลับของกราฟเป็นจุดที่ f มีค่าต่ำสุด และค่าต่ำสุดคือ -4
- 4) จากกราฟ พบว่า กราฟตัดแกน X สองจุด

หาจุดที่กราฟตัดแกน X โดยกำหนดให้ $y = 0$

$$\text{นั่นคือ } x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x = 3 \text{ หรือ } x = -1$$

ดังนั้น กราฟตัดแกน X ที่จุด $(3, 0)$ และ $(-1, 0)$

ตัวอย่างที่ 24

ชายคนหนึ่งโยนลูกบอลขึ้นไปในอากาศในแนวตั้ง ถ้าความสูงจากพื้นดินของลูกบอลมีหน่วยเป็นฟุต ซึ่งหาได้จาก $f(t) = -t^2 + 2t + 3$ เมื่อ t แทนระยะเวลาตั้งแต่เริ่มโยนลูกบอลมีหน่วยเป็นวินาที จงหาว่า

- 1) เมื่อเวลาผ่านไปนานเท่าใด ลูกบอลจะอยู่สูงที่สุดจากพื้นดิน และลูกบอลจะอยู่สูงจากพื้นดินเท่าใด
- 2) เมื่อเวลาผ่านไปนานเท่าใด ลูกบอลจึงตกถึงพื้นดิน

วิธีทำ 1) กราฟของ $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$ จะมีจุดวกกลับ คือ $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

$$\text{จาก } f(t) = -t^2 + 2t + 3$$

$$\text{จะได้จุดวกกลับเมื่อ } t = -\frac{2}{2(-1)} = 1$$

$$\text{และ } f(1) = -(1)^2 + 2(1) + 3 = 4$$

นั่นคือ เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที ลูกบอลจะอยู่สูงที่สุดและอยู่สูงจากพื้นดิน 4 ฟุต

- 2) เมื่อลูกบอลตกถึงพื้นดิน นั่นคือ $f(t)$ เท่ากับศูนย์

$$\text{จะได้ } -t^2 + 2t + 3 = 0$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t-3)(t+1) = 0$$

$$\text{ดังนั้น } t = 3 \text{ หรือ } t = -1$$

เนื่องจากระยะเวลาที่โยนลูกบอลขึ้นไปจนกระทั่งลูกบอลตกถึงพื้นดินจะต้องมากกว่าศูนย์

ดังนั้น ลูกบอลจะตกถึงพื้นดิน เมื่อโยนลูกบอลขึ้นไปนาน 3 วินาที

ตัวอย่างที่ 25

ให้ x แทนจำนวนนับ ซึ่งเมื่อนำมารวมกับจำนวนนับจำนวนที่สอง แล้วมีผลบวกเท่ากับ 30 จงหาผลคูณที่มากที่สุดของจำนวนนับทั้งสองจำนวน

วิธีทำ ให้ y แทนจำนวนนับจำนวนที่สอง จะได้ $x + y = 30$

$$y = 30 - x$$

ผลคูณของจำนวนนับทั้งสอง คือ $x(30 - x)$ หรือ $30x - x^2$

เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของ x^2 เป็นจำนวนลบ กราฟของ $f(x) = 30x - x^2$ เมื่อ x

แทนจำนวนจริง จะเป็นพาราโบลาคว่ำ แต่โจทย์กำหนดให้ x แทนจำนวนนับ

ดังนั้น กราฟจึงเป็นจุดบนพาราโบลา และจุดที่กราฟวกกลับเป็นจุดที่ผลคูณมีค่าสูงสุด

เขียนพหุนาม $30x - x^2$ ให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ เพื่อหาจุดวกกลับของกราฟได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 30x - x^2 &= -x^2 + 30x + 225 - 225 \\ &= -(x^2 - 30x + 225) + 225 \\ &= -(x - 15)^2 + 225 \end{aligned}$$

จาก $-(x - 15)^2 + 225$ เมื่อเทียบกับ $a(x - h)^2 + k$

จะได้ $a = -1$, $h = 15$, $k = 225$

และจุด $(15, 225)$ เป็นจุดวกกลับของกราฟ

เนื่องจากจุดวกกลับเป็นจุดสูงสุดของกราฟ

ดังนั้น ผลคูณที่มากที่สุดของจำนวนนับทั้งสองจำนวน คือ 225

ตัวอย่างที่ 26

จงหาค่าต่ำสุดของ $x^2 + y^2$ เมื่อ $x + y = 16$

วิธีทำ จาก $x + y = 16$ จะได้ $y = 16 - x$

เขียน $x^2 + y^2$ ให้อยู่ในรูปของ x ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x^2 + (16 - x)^2 \\ &= 2x^2 - 32x + 256 \end{aligned}$$

พิจารณา $f(x) = 2x^2 - 32x + 256$

พบว่าสัมประสิทธิ์ของ x^2 เป็นจำนวนบวก ดังนั้น จุดวกกลับของกราฟของ

$f(x) = 2x^2 - 32x + 256$ จะเป็นจุดที่ $f(x)$ มีค่าต่ำสุดและพิกัดของจุดวกกลับของ

กราฟของ $f(x) = ax^2 + bx + c$ มี $-\frac{b}{2a}$ เป็นสมาชิกตัวหน้า

จาก $f(x) = 2x^2 - 32x + 256$ จะได้ $a = 2$ และ $b = -32$

ดังนั้น สมาชิกตัวหน้าของพิกัดของจุดวกกลับ คือ $-\frac{(-32)}{2(2)} = 8$

เนื่องจาก $f(8) = 2(8)^2 - 32(8) + 256 = 128$

ดังนั้น พิกัดของจุดวกกลับของกราฟ คือ $(8, 128)$

จะได้ว่า เมื่อ $x + y = 16$ ค่าต่ำสุดของ $x^2 + y^2$ คือ 128

ตัวอย่างของฟังก์ชันที่กล่าวมานี้เป็นเพียงฟังก์ชันพื้นฐานที่สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาที่พบเห็นในชีวิตประจำวัน โดยฟังก์ชันคงตัว ฟังก์ชันเชิงเส้น และฟังก์ชันกำลังสองเป็นกรณีเฉพาะของฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function)

ฟังก์ชันพหุนาม คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่างของฟังก์ชันพหุนาม เช่น

$$f(x) = 1$$

$$f(x) = 2x + 5$$

$$f(x) = x^3$$

$$f(x) = x^4 + x^2 - x + 4$$

ฟังก์ชันพหุนามจะต้องมีจำนวนพจน์เป็นจำนวนจำกัด อาจมี $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ เป็นจำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ หรือจำนวนจริง ซึ่งจะเรียกว่าฟังก์ชันพหุนามบนเซตของจำนวนเต็ม ฟังก์ชันพหุนามบนเซตของจำนวนตรรกยะ หรือฟังก์ชันพหุนามบนเซตของจำนวนจริง ตามลำดับ



แบบฝึกหัด 1.3ข

1. จงจับคู่สมการและกราฟที่กำหนดให้

1) $y = (x-4)^2 - 3$

2) $y = -(x-4)^2 + 3$

3) $y = (x+4)^2 - 3$

4) $y = -(x+4)^2 + 3$

5) $y = 2(x-2)^2$

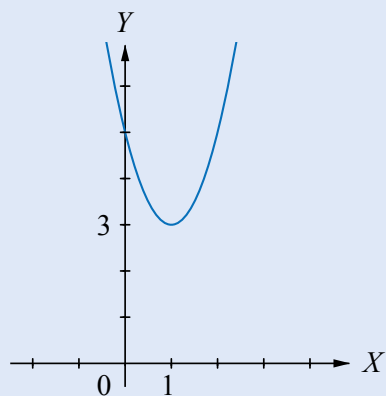
6) $y = (x+3)^2 - 4$

7) $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$

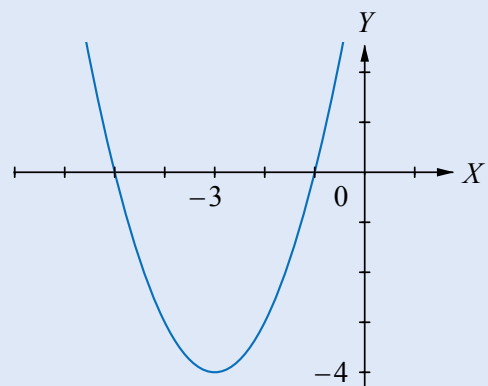
8) $y = -2(x+3)^2 + 2$

9) $y = x^2 - 2x + 3$

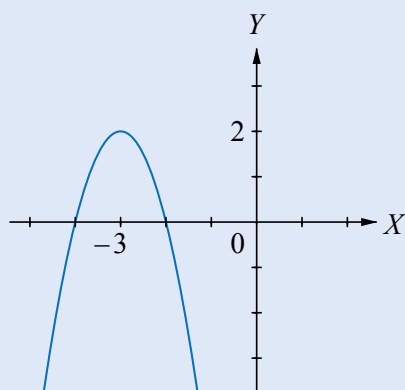
10) $y = 2x^2 - 4x + 5$



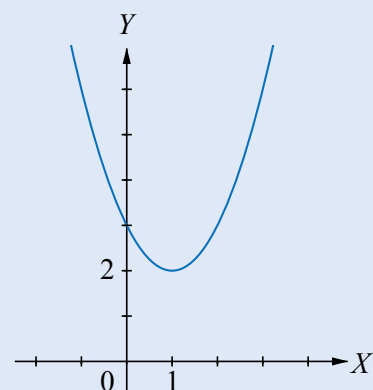
(ก)



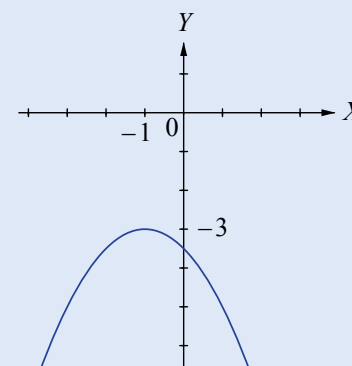
(ข)



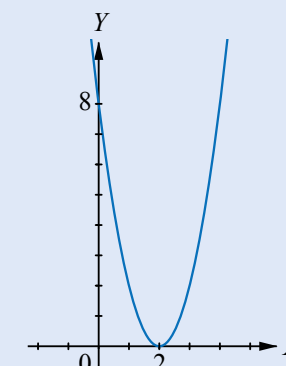
(ค)



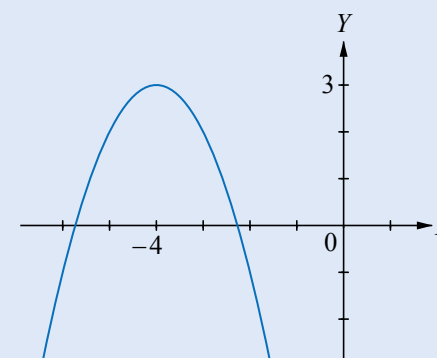
(ง)



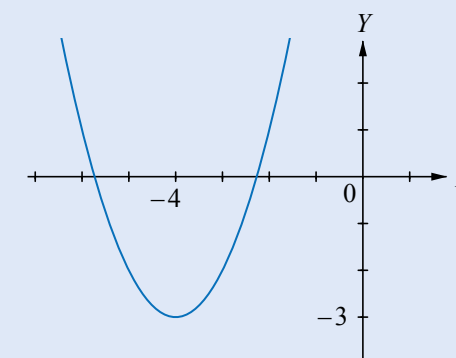
(จ)



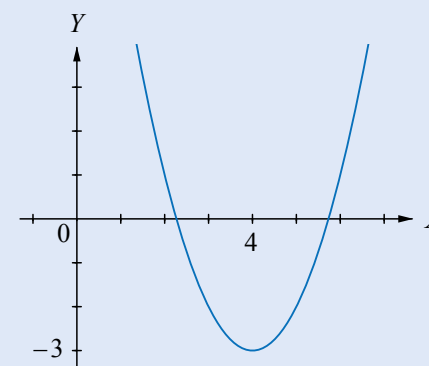
(ฉ)



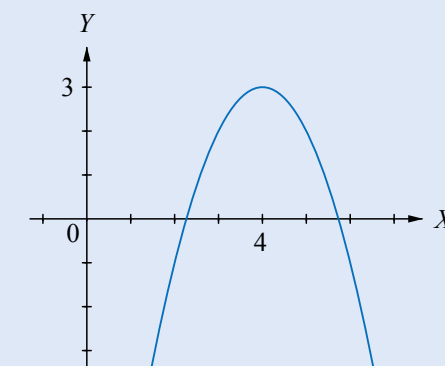
(ช)



(ฐ)



(ฎ)



(ฏ)

2. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน จุดที่กราฟตัดแกน X และจุดวกกลับของกราฟ และหาว่าจุดวกกลับของกราฟเป็นจุดที่ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด และมีค่าเท่าใด

$$\begin{array}{ll} 1) y = x^2 - 4x - 5 & 2) y = -x^2 + 6x - 8 \\ 3) y = -x^2 - 2x & 4) y = x^2 - 6x + 8 \end{array}$$

3. ถ้ารายได้เฉลี่ยจากการขายสินค้า (ต่อชิ้น) หลังหักค่าใช้จ่ายแล้วเท่ากับ $100 - 0.1x$ บาท เมื่อ x แทนจำนวนสินค้าที่ขายได้

- 1) จงเขียนสมการแสดงรายได้จากการขายสินค้า x ชิ้น
- 2) จงหาว่าจะต้องขายสินค้ากี่ชิ้น จึงจะมีรายได้มากที่สุด และมีรายได้มากที่สุดเท่าใด

4. เจ้าของหอพักแห่งหนึ่งมีห้องพักสำหรับให้เช่า 80 ห้อง เขาพบว่า ถ้าคิดค่าเช่าห้องละ 4,000 บาทต่อเดือน จะมีผู้พักเต็มทุกห้อง แต่ถ้าเพิ่มค่าเช่าห้องพักเป็นห้องละ 4,200 บาท จะมีห้องว่าง 1 ห้อง และถ้าเพิ่มค่าเช่าห้องพักเป็นห้องละ 4,400 บาท จะมีห้องว่าง 2 ห้อง โดยจำนวนห้องว่างจะเพิ่มขึ้น 1 ห้อง เมื่อเพิ่มค่าเช่าอีกห้องละ 200 บาท

- 1) จงเขียนสมการแสดงรายได้ของเจ้าของหอพักแห่งนี้
- 2) ถ้าต้องการให้มีรายได้เดือนละ 375,000 บาท เจ้าของหอพักต้องคิดค่าเช่าห้องละเท่าใด
- 3) เจ้าของหอพักต้องตั้งราคาเช่าห้องละเท่าใด จึงจะทำให้มีรายได้มากที่สุด และมีรายได้มากที่สุดเท่าใด

5. ให้จำนวนนับสองจำนวนมีผลบวกเป็น 45 และผลคูณเป็น 164 ถ้าจำนวนนับจำนวนหนึ่งเป็น x จงหาว่า x มากที่สุดเป็นเท่าใด

6. จงหาค่ามากที่สุดของ xy^2 เมื่อ $x + y^2 = 6$

1.4 กราฟของฟังก์ชัน

กราฟของฟังก์ชัน คือ กราฟของความสัมพันธ์ที่กำหนดโดยสมการ $y=f(x)$ ในระบบพิกัดฉาก ซึ่งจะประกอบด้วยจุดที่มีคู่อันดับเป็น (x,y) โดยที่สมาชิกตัวหน้าคือ x เป็นสมาชิกในโดเมนของฟังก์ชัน และสมาชิกตัวหลังคือ y หรือ $f(x)$ เป็นค่าของฟังก์ชันที่สอดคล้องกับ x

ในการเขียนกราฟของฟังก์ชัน อาจทำได้โดยคำนวณหาคู่อันดับที่อยู่บนกราฟให้มากเพียงพอ แล้วลากเส้นโค้ง (หรือเส้นตรง) เชื่อมจุดเหล่านั้น ถ้าทราบพิกัดของคู่อันดับที่อยู่บนกราฟมากเท่าใด ก็จะช่วยให้เขียนกราฟได้ถูกต้องมากขึ้นเท่านั้น

สิ่งสำคัญที่ควรพิจารณาในการเขียนกราฟ คือจุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y กราฟจะตัดแกน X เมื่อค่าของ y ในคู่อันดับเท่ากับ 0 และกราฟจะตัดแกน Y เมื่อค่าของ x ในคู่อันดับเท่ากับ 0

ตัวอย่างที่ 27

จงเขียนกราฟของ $f(x) = x^3 - 4x$

วิธีทำ ให้ $y = f(x) = x^3 - 4x$

กราฟตัดแกน Y เมื่อ $x = 0$ จะได้ $y = 0$

ดังนั้น กราฟตัดแกน Y ที่จุด $(0,0)$

กราฟตัดแกน X เมื่อ $y = 0$ ดังนั้น

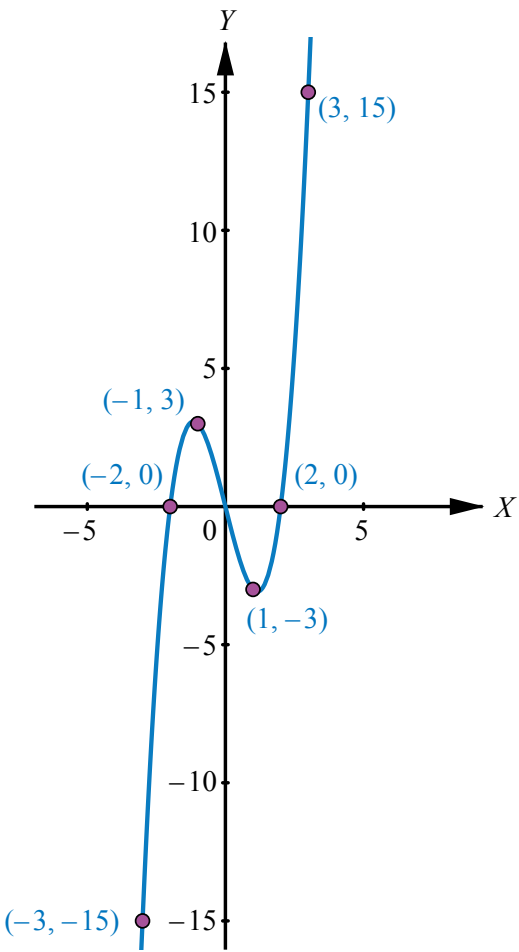
$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x-2)(x+2) = 0$$

$$x = 0 \text{ หรือ } x = 2 \text{ หรือ } x = -2$$

ดังนั้น กราฟตัดแกน X ที่จุดสามจุด คือ $(0,0)$, $(2,0)$ และ $(-2,0)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-15	0	3	0	-3	0	15

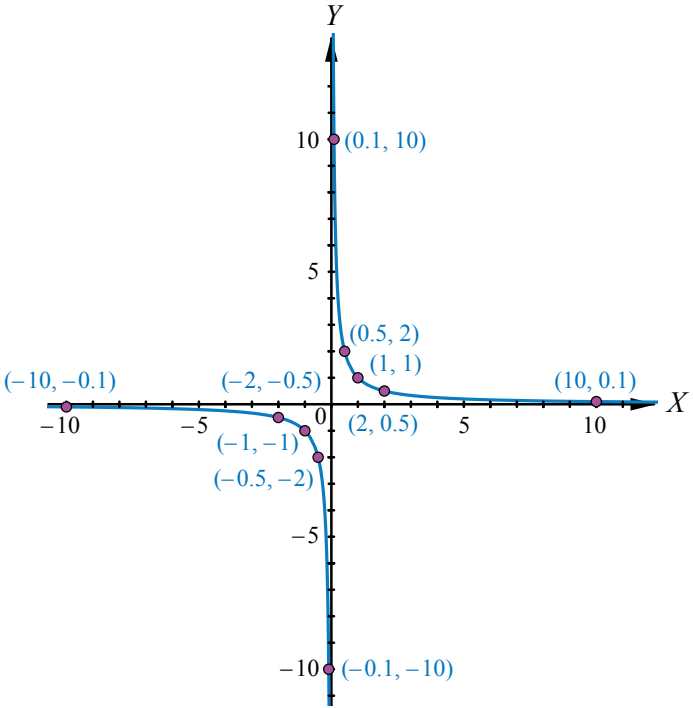


ตัวอย่างที่ 28

จงเขียนกราฟของ $f(x) = \frac{1}{x}$ และจงพิจารณาว่ากราฟตัดแกน X และแกน Y หรือไม่

วิธีทำ ให้ $y = f(x) = \frac{1}{x}$

x	-10	-2	-1	-0.5	-0.1	0.1	0.5	1	2	10
y	-0.1	-0.5	-1	-2	-10	10	2	1	0.5	0.1



เมื่อ $x > 0$ กราฟจะเข้าใกล้แกน X มากขึ้น เมื่อ x มากขึ้นเรื่อย ๆ
และกราฟจะเข้าใกล้แกน Y ทางบวกมากขึ้น เมื่อ x เข้าใกล้ 0
เมื่อ $x < 0$ กราฟจะเข้าใกล้แกน X มากขึ้น เมื่อ x ลดลงเรื่อย ๆ
และกราฟจะเข้าใกล้แกน Y ทางลบมากขึ้น เมื่อ x เข้าใกล้ 0
แต่กราฟไม่ตัดแกน X และแกน Y



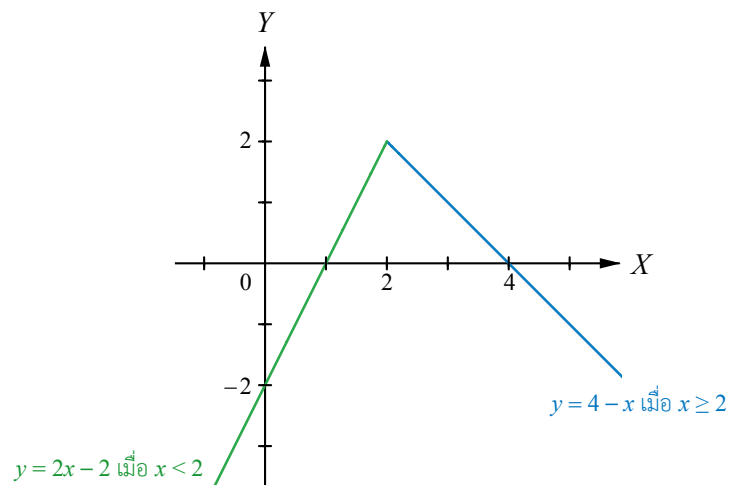
ตัวอย่างที่ 29

จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 4-x, & x \geq 2 \\ 2x-2, & x < 2 \end{cases}$

วิธีทำ เนื่องจาก ฟังก์ชัน f กำหนดค่าบนช่วงสองช่วง
 ดังนั้น กราฟของ f ประกอบด้วยสองส่วน คือ

1. กราฟของเส้นตรง $y = 4 - x$ เมื่อ $x \geq 2$
2. กราฟของเส้นตรง $y = 2x - 2$ เมื่อ $x < 2$

เขียนกราฟของ f ได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 30

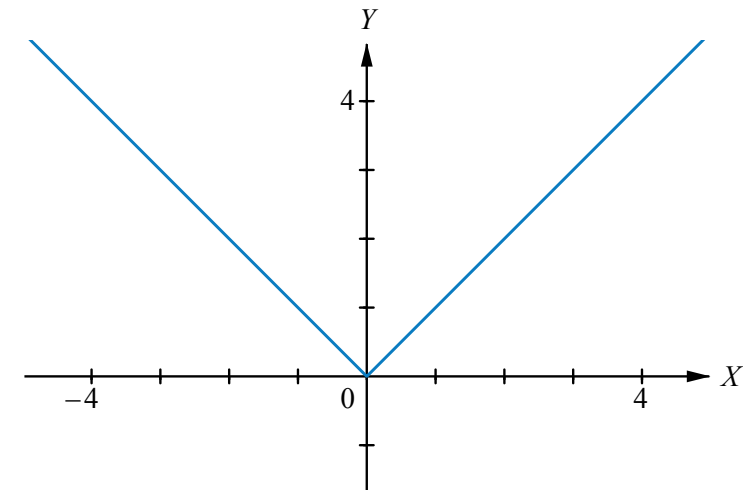
จงเขียนกราฟของ $f(x) = |x|$

วิธีทำ จากบทนิยามของค่าสัมบูรณ์จะได้ว่า $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

ดังนั้น กราฟของ $f(x) = |x|$ ประกอบด้วยสองส่วน คือ

1. กราฟของเส้นตรง $y = x$ เมื่อ $x \geq 0$
2. กราฟของเส้นตรง $y = -x$ เมื่อ $x < 0$

เขียนกราฟของ f ได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 31

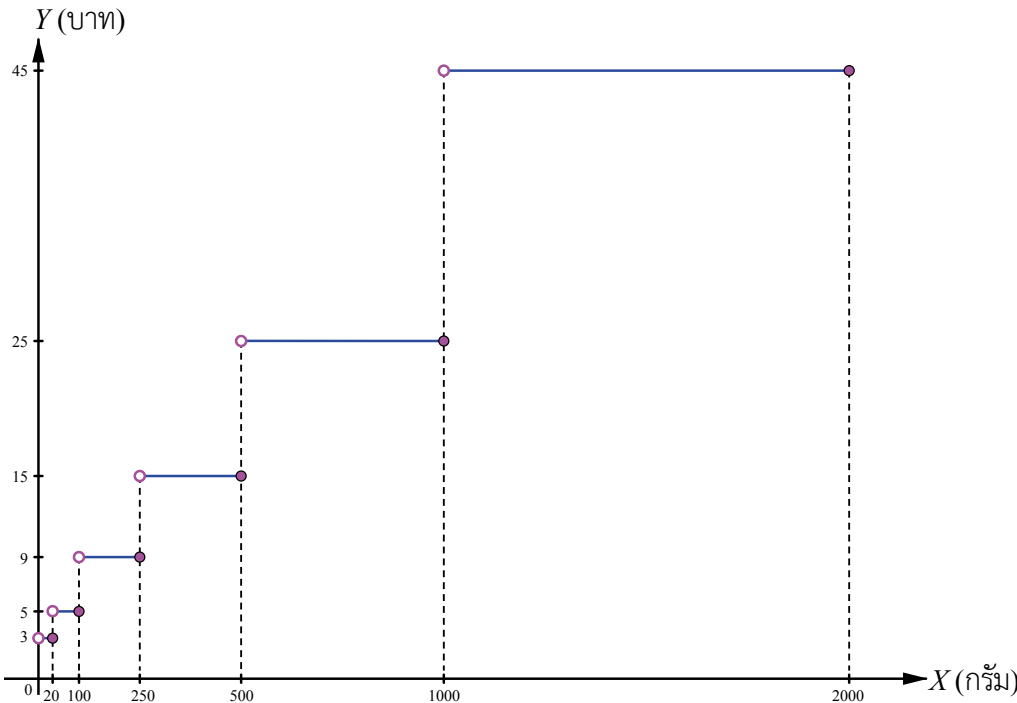
จงเขียนฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชันแสดงอัตราค่าบริการในการส่งจดหมายในประเทศ (ไปรษณีย์ธรรมดา) ซึ่งกำหนดอัตราค่าบริการ ดังนี้

พิกัดน้ำหนัก	ค่าบริการ (บาท)
ไม่เกิน 20 กรัม	3.00
เกิน 20 กรัม แต่ไม่เกิน 100 กรัม	5.00
เกิน 100 กรัม แต่ไม่เกิน 250 กรัม	9.00
เกิน 250 กรัม แต่ไม่เกิน 500 กรัม	15.00
เกิน 500 กรัม แต่ไม่เกิน 1,000 กรัม	25.00
เกิน 1,000 กรัม แต่ไม่เกิน 2,000 กรัม	45.00

วิธีทำ เขียนฟังก์ชันในรูป $f(x)$ เมื่อ x แทนน้ำหนักของจดหมาย (กรัม) และ $f(x)$ แทนอัตราค่าบริการในการส่งจดหมายในประเทศ (บาท) ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 3.00 & ; 0 < x \leq 20 \\ 5.00 & ; 20 < x \leq 100 \\ 9.00 & ; 100 < x \leq 250 \\ 15.00 & ; 250 < x \leq 500 \\ 25.00 & ; 500 < x \leq 1,000 \\ 45.00 & ; 1,000 < x \leq 2,000 \end{cases}$$

เขียนกราฟของฟังก์ชัน f ได้ดังนี้ (เส้นประขนานกับแกน Y เขียนไว้เพื่อช่วยให้อ่านกราฟได้ชัดเจนยิ่งขึ้น แต่มีใช้ส่วนหนึ่งของกราฟ)



ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และโดเมนถูกแบ่งออกเป็นช่วงย่อยมากกว่าหนึ่งช่วง โดยค่าของฟังก์ชันในแต่ละช่วงย่อยเป็นค่าคงตัวที่เป็นลำดับเพิ่ม หรือลำดับลดอย่างใดอย่างหนึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันขั้นบันได (step function) โดยกราฟของฟังก์ชันนี้มีลักษณะคล้ายขั้นบันได

ตัวอย่างของฟังก์ชันขั้นบันไดที่พบเห็นในชีวิตประจำวัน ได้แก่ อัตราค่าบริการในการส่งจดหมาย หรือพัสดุ



แบบฝึกหัด 1.4ก

1. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์

$$1) f(x) = x^3 + 1 \qquad 2) f(x) = \begin{cases} x+3, & x \geq 1 \\ x^2 - 1, & x < 1 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \frac{1}{x+2} \qquad 4) f(x) = |x+2|$$

2. จงเขียนฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชันแสดงอัตราค่าบริการในการส่งพัสดุของบริษัทแห่งหนึ่ง ซึ่งกำหนดอัตราค่าบริการ ดังนี้

พิกัดน้ำหนัก	ค่าบริการ (บาท)
ไม่เกิน 1 กิโลกรัม	20.00
เกิน 1 กิโลกรัม แต่ไม่เกิน 2 กิโลกรัม	35.00
เกิน 2 กิโลกรัม แต่ไม่เกิน 3 กิโลกรัม	50.00
เกิน 3 กิโลกรัม แต่ไม่เกิน 4 กิโลกรัม	65.00
เกิน 4 กิโลกรัม แต่ไม่เกิน 5 กิโลกรัม	80.00
เกิน 5 กิโลกรัม แต่ไม่เกิน 6 กิโลกรัม	95.00

3. จงเขียนฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชันแสดงอัตราค่าบริการในการส่งจดหมาย (ไปรษณีย์ลงทะเบียน) ของบริษัทแห่งหนึ่ง ซึ่งกำหนดอัตราค่าบริการ ดังนี้

พิกัดน้ำหนัก	ค่าบริการ (บาท)
ไม่เกิน 20 กรัม	16.00
เกิน 20 กรัม แต่ไม่เกิน 100 กรัม	18.00
เกิน 100 กรัม แต่ไม่เกิน 250 กรัม	22.00
เกิน 250 กรัม แต่ไม่เกิน 500 กรัม	28.00
เกิน 500 กรัม แต่ไม่เกิน 1,000 กรัม	38.00

เทคนิคการเขียนกราฟโดยการเลื่อนกราฟ

บางครั้งการเขียนกราฟของฟังก์ชันสามารถทำได้โดยการเลื่อนกราฟของฟังก์ชันที่รู้จักชานกับแกนพิกัด ซึ่งจะพิจารณาเฉพาะการเลื่อนขนานในแนวตั้งและการเลื่อนขนานในแนวนอน

การเลื่อนขนานในแนวตั้ง

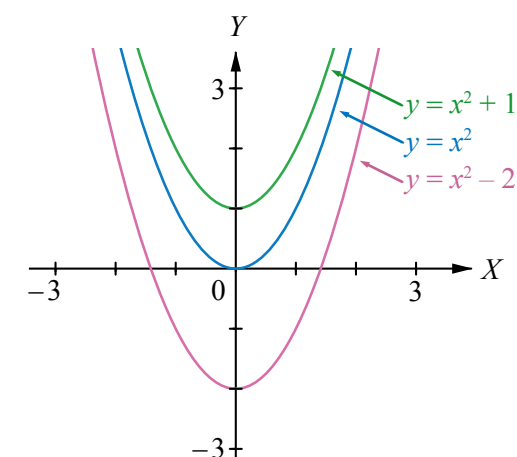
เมื่อเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน

$$y = x^2$$

$$y = x^2 + 1$$

$$y = x^2 - 2$$

จะได้กราฟดังรูปที่ 12



สื่อ GeoGebra



ipst.me/12494

รูปที่ 12

ลองพิจารณาความสัมพันธ์ของกราฟเหล่านี้ ถ้าใช้กราฟของ $y = x^2$ เป็นหลักในการอ้างอิง กราฟของ $y = x^2 + 1$ มีรูปร่างเหมือนกับกราฟของ $y = x^2$ แต่อยู่ในตำแหน่งที่สูงขึ้นไป 1 หน่วย หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่า กราฟของ $y = x^2 + 1$ เกิดจากการเลื่อนกราฟของ $y = x^2$ ขึ้น 1 หน่วย ในทำนองเดียวกัน กราฟของ $y = x^2 - 2$ มีรูปร่างเหมือนกับกราฟของ $y = x^2$ แต่เกิดจากการเลื่อนลง 2 หน่วย

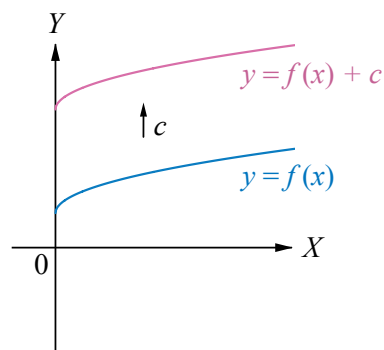
ในกรณีทั่วไป สมมติว่าทราบกราฟของ $y = f(x)$ จะเขียนกราฟของ $y = f(x) + c$ และ $y = f(x) - c$ เมื่อ $c > 0$ จากกราฟของ $y = f(x)$ ได้ เนื่องจากสมการ $y = f(x) + c$ เมื่อ $c > 0$ บอกให้ทราบว่า สำหรับแต่ละค่าของ x ค่า y ของพิกัดของจุดบนกราฟของ $y = f(x) + c$ มากกว่าค่า y ของพิกัดของจุดบนกราฟของ $y = f(x)$ อยู่ c ดังนั้น กราฟของ $y = f(x) + c$ ได้จากการเลื่อนกราฟของ $y = f(x)$ ขึ้น c หน่วย ดังรูปที่ 13ก ในทำนองเดียวกัน สามารถเขียนกราฟของ $y = f(x) - c$ เมื่อ $c > 0$ โดยเลื่อนกราฟของ $y = f(x)$ ลง c หน่วย ดังรูปที่ 13ข

สมการ

$$y = f(x) + c, c > 0$$

วิธีเขียนกราฟ

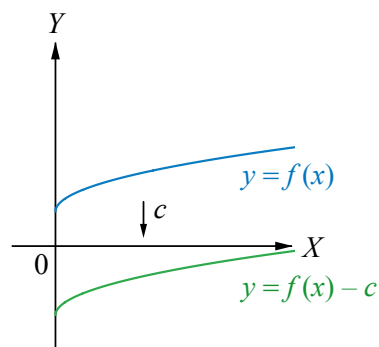
เลื่อนกราฟของ $y = f(x)$ ขึ้น c หน่วย



รูปที่ 13ก

$$y = f(x) - c, c > 0$$

เลื่อนกราฟของ $y = f(x)$ ลง c หน่วย

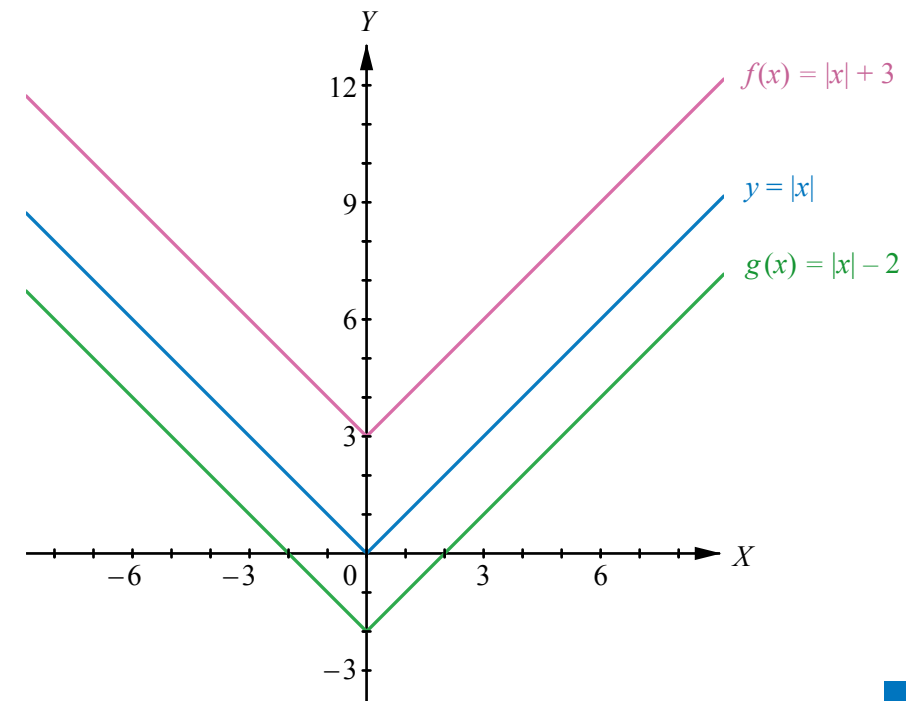


รูปที่ 13ข

ตัวอย่างที่ 32

จงเขียนกราฟของ $f(x) = |x| + 3$ และ $g(x) = |x| - 2$

วิธีทำ กราฟของ $y = |x|$ เลื่อนขึ้น 3 หน่วย จะได้กราฟของ f และกราฟของ $y = |x|$ เลื่อนลง 2 หน่วย จะได้กราฟของ g ดังรูป



การเลื่อนขนานในแนวนอน

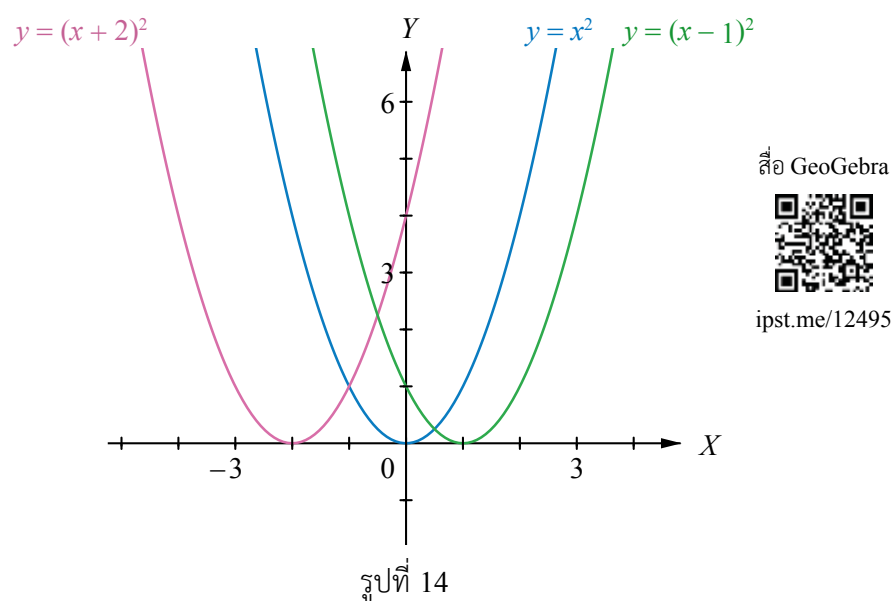
เมื่อเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน

$$y = x^2$$

$$y = (x - 1)^2$$

$$y = (x + 2)^2$$

จะได้กราฟดังรูปที่ 14



ลองพิจารณาความสัมพันธ์ของกราฟเหล่านี้ ถ้าใช้กราฟของ $y = x^2$ เป็นหลักในการอ้างอิง กราฟของ $y = (x - 1)^2$ มีรูปร่างเหมือนกับกราฟของ $y = x^2$ แต่อยู่ในตำแหน่งที่เลื่อนไปทางขวา 1 หน่วย ในทำนองเดียวกัน กราฟของ $y = (x + 2)^2$ มีรูปร่างเหมือนกับกราฟของ $y = x^2$ แต่เกิดจากการเลื่อนไปทางซ้าย 2 หน่วย

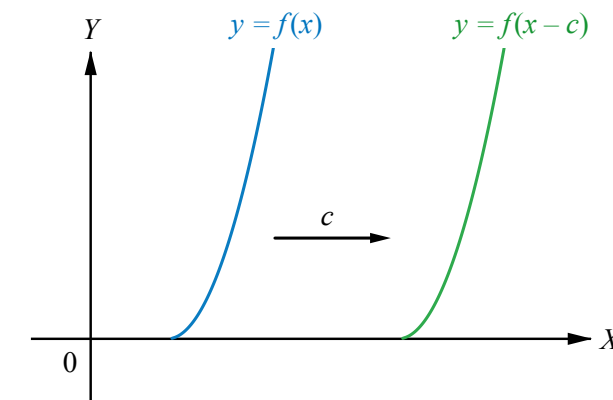
ในกรณีทั่วไป สมมติว่าทราบกราฟของ $y = f(x)$ จะเขียนกราฟของ $y = f(x + c)$ และ $y = f(x - c)$ เมื่อ $c > 0$ จากกราฟของ $y = f(x)$ ได้ เนื่องจากค่าของ $f(x - c)$ ที่ $x + c$ เท่ากับค่าของ $f(x)$ ที่ x ดังนั้น กราฟของ $y = f(x - c)$ คือ กราฟของ $y = f(x)$ ที่เลื่อนไปทางขวา c หน่วย ดังรูปที่ 15ก ในทำนองเดียวกัน กราฟของ $y = f(x + c)$ คือ กราฟของ $y = f(x)$ ที่เลื่อนไปทางซ้าย c หน่วย ดังรูปที่ 15ข

สมการ

$$y = f(x - c), c > 0$$

วิธีเขียนกราฟ

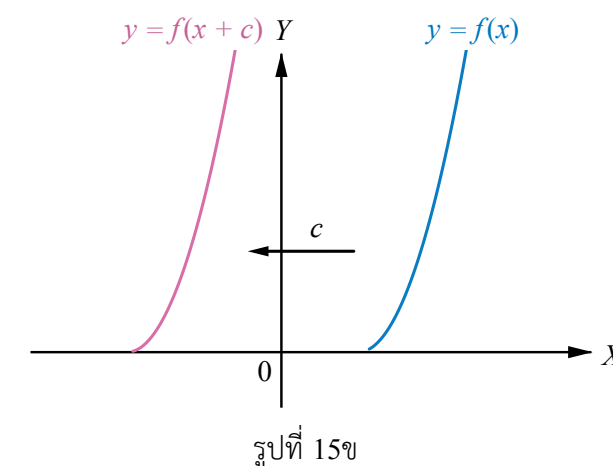
เลื่อนกราฟของ $y = f(x)$ ไปทางขวา c หน่วย



รูปที่ 15ก

$$y = f(x + c), c > 0$$

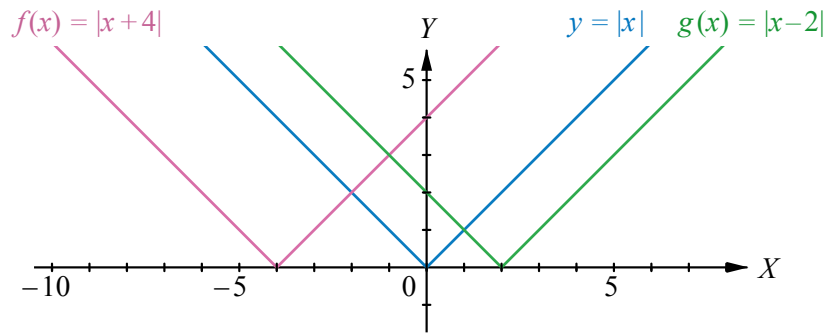
เลื่อนกราฟของ $y = f(x)$ ไปทางซ้าย c หน่วย



ตัวอย่างที่ 33

จงเขียนกราฟของ $f(x) = |x+4|$ และ $g(x) = |x-2|$

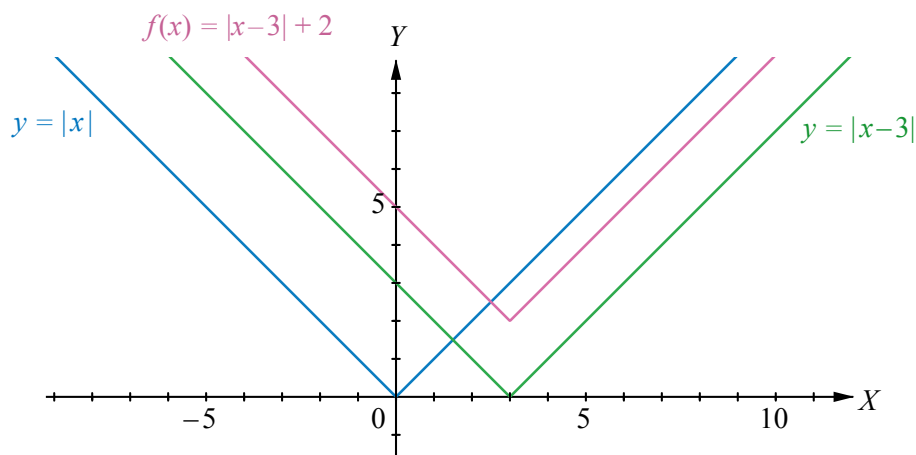
วิธีทำ กราฟของ $y = |x|$ เลื่อนไปทางซ้าย 4 หน่วย จะได้กราฟของ f และกราฟของ $y = |x|$ เลื่อนไปทางขวา 2 หน่วย จะได้กราฟของ g ดังรูป



ตัวอย่างที่ 34

จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = |x-3| + 2$

วิธีทำ กราฟของ $y = |x|$ เลื่อนไปทางขวา 3 หน่วย จะได้กราฟของ $y = |x-3|$ แล้วเลื่อนกราฟของ $y = |x-3|$ ขึ้น 2 หน่วย จะได้กราฟของ $f(x) = |x-3| + 2$ ดังรูป



แบบฝึกหัด 1.4ข

- จงเขียนกราฟของแต่ละฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้การเลื่อนขนานในแนวตั้งหรือแนวนอน

1) $f(x) = x^2 - 3$	2) $g(x) = (x+2)^2 - 3$
3) $h(x) = \sqrt{x-3}$	4) $k(x) = \sqrt{x+1} + 3$
5) $r(x) = x-2 - 5$	6) $s(x) = x+3 + 5$
- ในแต่ละข้อต่อไปนี้ กำหนดฟังก์ชัน f และวิธีการเลื่อนกราฟของ f จงเขียนกราฟและสมการของกราฟที่ได้ในขั้นสุดท้าย
 - $f(x) = x^2$, เลื่อนกราฟขึ้น 2 หน่วย แล้วเลื่อนไปทางขวาอีก 3 หน่วย
 - $f(x) = x^3$, เลื่อนกราฟลง 1 หน่วย แล้วเลื่อนไปทางซ้ายอีก 5 หน่วย
 - $f(x) = |x|$, เลื่อนกราฟไปทางขวา $\frac{1}{2}$ หน่วย แล้วเลื่อนกราฟลง 2 หน่วย
 - $f(x) = |x|$, เลื่อนกราฟไปทางซ้าย 1 หน่วย แล้วเลื่อนกราฟขึ้น 5 หน่วย

1.5 การดำเนินการของฟังก์ชัน

ในหัวข้อนี้ จะศึกษาวิธีสร้างฟังก์ชันใหม่จากฟังก์ชันเดิมที่มีอยู่ โดยฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง สามารถบวก ลบ คูณ และหารกันได้คล้ายกับจำนวนจริง เช่น สมมติว่า พลอยรับจ้างนำเสื้อไปขายที่ตลาดนัด โดยได้รับค่าจ้างครั้งละ 1,000 บาท รวมกับส่วนแบ่งจากค่าเสื้อที่ขายได้ตัวละ 50 บาท ดังนั้น รายได้ของพลอยขึ้นอยู่กับจำนวนเสื้อที่ขายได้ ให้ x แทนจำนวนเสื้อที่ขายได้ จะได้ $R(x) = 50x + 1,000$ แทนรายได้ทั้งหมดของพลอย ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x แต่ในการทำงานนี้พลอยต้องใช้รถยนต์ของตนเองในการเดินทาง โดยเสียค่าน้ำมันเชื้อเพลิงครั้งละ 250 บาท และส่วนแบ่งจากค่าเสื้อที่ขายได้เป็นค่าจ้างน้องมาช่วยขายอีกตัวละ 20 บาท สามารถเขียนค่าใช้จ่ายในรูปฟังก์ชันของจำนวนเสื้อที่ขายได้เป็น $C(x) = 20x + 250$ ซึ่งเมื่อหักค่าใช้จ่ายออกจากรายได้แล้วจะมีกำไร

$$\begin{aligned}
 P(x) &= R(x) - C(x) \\
 &= (50x + 1,000) - (20x + 250) \\
 &= 30x + 750
 \end{aligned}$$

สังเกตว่า ถ้าไร $P(x)$ เป็นฟังก์ชันของจำนวนเสื้อที่ขายได้ x ตัว

ตัวอย่างนี้แสดงวิธีสร้างฟังก์ชันใหม่ที่ได้จากผลต่างระหว่างฟังก์ชันสองฟังก์ชัน ในกรณีทั่วไป มีวิธีการดำเนินการพื้นฐานเชิงพีชคณิตระหว่างฟังก์ชัน 4 แบบ ดังนี้

บทนิยาม 11

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}$ ผลบวก (sum) ผลต่าง (difference) ผลคูณ (product) และผลหาร (quotient) ของ f และ g เขียนแทนด้วย $f+g, f-g, fg$ และ $\frac{f}{g}$ ตามลำดับ เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย

$$\begin{aligned}
 (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\
 (f-g)(x) &= f(x) - g(x) \\
 (fg)(x) &= f(x)g(x) \\
 \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{เมื่อ } g(x) \neq 0
 \end{aligned}$$

โดเมนของ $f+g, f-g$ และ fg คือ เซตของจำนวนจริงทั้งหมดที่อยู่ทั้งในโดเมนของ f และโดเมนของ g ซึ่งก็คือ $D_f \cap D_g$

สำหรับโดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ เซตของจำนวนจริงทั้งหมดที่อยู่ทั้งในโดเมนของ f และ โดเมนของ g โดยที่ $g(x)$ ต้องไม่เท่ากับ 0 ด้วย ซึ่งก็คือ $D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\}$

ตัวอย่างที่ 35

ให้ $f(x) = x^3 + 1$ และ $g(x) = \sqrt{x}$

1) จงหา $f+g, f-g, fg$ และ $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

2) จงหา $(f+g)(1), (f-g)(1), (fg)(2)$ และ $\left(\frac{f}{g}\right)(2)$

วิธีทำ 1) เนื่องจากโดเมนของ f คือ $\mathbb{R}$ และโดเมนของ g คือ $[0, \infty)$

จะได้โดเมนของ $f+g, f-g$ และ fg คือ $D_f \cap D_g = [0, \infty)$

และโดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\} = (0, \infty)$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^3 + 1 + \sqrt{x}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 1 - \sqrt{x}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x^3 + 1)\sqrt{x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x}}$$

$$2) (f+g)(1) = f(1) + g(1) = (1^3 + 1) + \sqrt{1} = 3$$

$$(f-g)(1) = f(1) - g(1) = (1^3 + 1) - \sqrt{1} = 1$$

$$(fg)(2) = f(2)g(2) = (2^3 + 1)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{2^3 + 1}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

ตัวอย่างที่ 36

ให้ $f = \{(1, 6), (2, 16), (3, 12), (5, 18)\}$

และ $g = \{(1, 6), (2, 11), (3, 0), (4, 1)\}$

จงหา $f + g$, fg และ $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

วิธีทำ เนื่องจากโดเมนของ f คือ $\{1, 2, 3, 5\}$ และโดเมนของ g คือ $\{1, 2, 3, 4\}$

จะได้โดเมนของ $f + g$ และ fg คือ $D_f \cap D_g = \{1, 2, 3\}$

$$(f+g)(1) = f(1)+g(1) = 6+6 = 12 \text{ จะได้ } (1, 12) \in f+g$$

$$(f+g)(2) = f(2)+g(2) = 16+11 = 27 \text{ จะได้ } (2, 27) \in f+g$$

$$(f+g)(3) = f(3)+g(3) = 12+0 = 12 \text{ จะได้ } (3, 12) \in f+g$$

$$\text{ดังนั้น } f+g = \{(1, 12), (2, 27), (3, 12)\}$$

$$(fg)(1) = f(1)g(1) = (6)(6) = 36 \text{ จะได้ } (1, 36) \in fg$$

$$(fg)(2) = f(2)g(2) = (16)(11) = 176 \text{ จะได้ } (2, 176) \in fg$$

$$(fg)(3) = f(3)g(3) = (12)(0) = 0 \text{ จะได้ } (3, 0) \in fg$$

$$\text{ดังนั้น } fg = \{(1, 36), (2, 176), (3, 0)\}$$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\} = \{1, 2\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{6}{6} = 1 \text{ จะได้ } (1, 1) \in \frac{f}{g}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{16}{11} \text{ จะได้ } \left(2, \frac{16}{11}\right) \in \frac{f}{g}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{f}{g} = \left\{(1, 1), \left(2, \frac{16}{11}\right)\right\}$$



ฟังก์ชันประกอบ

บอลลูกทรงกลมลูกหนึ่งมีการอัดแก๊สเข้าไป เมื่อเวลาเปลี่ยนไปทำให้ความยาวรัศมีเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 0.1 เซนติเมตรต่อวินาที

ถ้าให้ t แทนเวลาที่มีหน่วยเป็นวินาที และให้ r แทนความยาวรัศมีของบอลลูกที่มีหน่วยเป็นเซนติเมตร จะได้ว่าความยาวรัศมีของบอลลูก r ขึ้นกับเวลา t ดังนี้

$$r = 0.1t$$

เมื่อความยาวรัศมีของบอลลูกมีการเปลี่ยนแปลง ทำให้ปริมาตรของแก๊สในบอลลูกมีการเปลี่ยนแปลงตามไปด้วย ถ้าให้ V แทนปริมาตรของแก๊สในบอลลูก และ r แทนความยาวรัศมีของบอลลูก จะได้ว่า

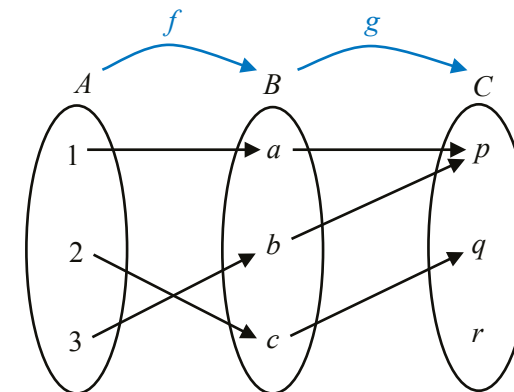
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

แทน r ด้วย $0.1t$ จะได้

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi (0.1t)^3 \\ &= \frac{0.004}{3}\pi t^3 \end{aligned}$$

จากตัวอย่างนี้ จะเห็นว่าปริมาตรของแก๊สในบอลลูกเป็นฟังก์ชันของความยาวรัศมี และความยาวรัศมีของบอลลูกเป็นฟังก์ชันของเวลา จึงทำให้ปริมาตรของแก๊สในบอลลูกเป็นฟังก์ชันของเวลาด้วยการซ้อนกันของฟังก์ชันในตัวอย่างอื่น เช่น ราคาสินค้าเป็นฟังก์ชันของต้นทุนการขนส่ง ซึ่งต้นทุนการขนส่งเป็นฟังก์ชันของราคาน้ำมัน ดังนั้นราคาสินค้าจึงเป็นฟังก์ชันของราคาน้ำมันด้วย

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ดังแสดงในแผนภาพ



จากแผนภาพจะได้ $f(1)=a, f(2)=c, f(3)=b$
 $g(a)=p, g(b)=p, g(c)=q$

จาก f และ g ที่กำหนดให้ จะได้

$$g(f(1)) = g(a) = p$$

$$g(f(2)) = g(c) = q$$

$$g(f(3)) = g(b) = p$$

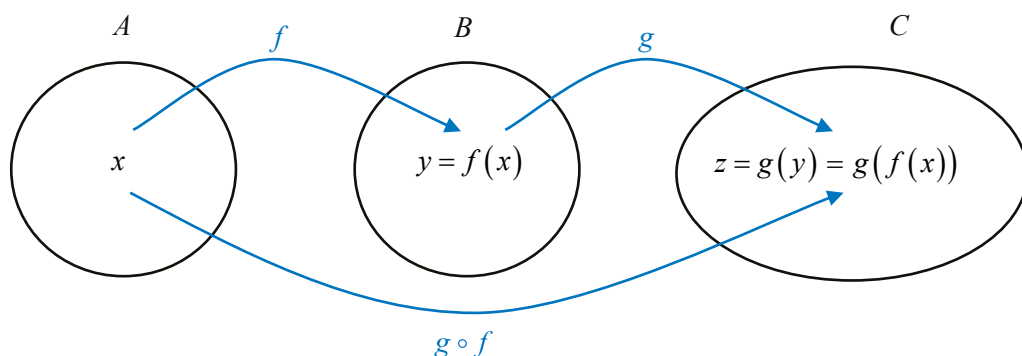
จะเห็นว่าฟังก์ชันที่สร้างขึ้นใหม่เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปเซต C เขียนแทนฟังก์ชันนี้ด้วย $g \circ f$ (อ่านว่า จีโอเอฟ) และเรียกว่า **ฟังก์ชันประกอบ (composite function)** ของ f และ g โดย

$$g \circ f(1) = g(f(1)) = p$$

$$g \circ f(2) = g(f(2)) = q$$

$$g \circ f(3) = g(f(3)) = p$$

นั่นคือ $g \circ f = \{(1, p), (2, q), (3, p)\}$



จากแผนภาพ สำหรับแต่ละ x ในเซต A ถ้ามี $y=f(x)$ ในเซต B และมี $z=g(y)$ ในเซต C จะหา $g(f(x))$ ได้ ซึ่งเท่ากับ z สถานการณ์ข้างต้นทำให้เกิดฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$ เพราะฉะนั้น การเกิด $g \circ f$ มีเงื่อนไขสำคัญคือ ต้องมี y อยู่ใน R_f และ D_g พร้อมกัน นั่นคือ $R_f \cap D_g$ ต้องไม่ใช่เซตว่าง ดังนั้น จึงให้บทนิยามของฟังก์ชัน $g \circ f$ ดังนี้

บทนิยาม 12

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน และ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$

ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย $g \circ f$ คือฟังก์ชันที่โดเมนคือ

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

และกำหนด $g \circ f$ โดย

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \text{ สำหรับทุก } x \text{ ใน } D_{g \circ f}$$

ตัวอย่างที่ 37

ให้ $f(x) = x^2 - 3$ และ $g(x) = x + 2$ จงหาฟังก์ชัน $g \circ f$ และ $f \circ g$ พร้อมทั้งโดเมน

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2 - 3$ จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [-3, \infty)$

จาก $g(x) = x + 2$ จะได้ $D_g = \mathbb{R}$ และ $R_g = \mathbb{R}$

เนื่องจาก $R_f \cap D_g = [-3, \infty)$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $g \circ f$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{g \circ f}$ จะได้

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2 - 3) \\ &= (x^2 - 3) + 2 \\ &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ f(x) = x^2 - 1$ โดยที่ $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

เนื่องจาก $R_g \cap D_f = \mathbb{R}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f \circ g$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x+2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{f \circ g}$ จะได้

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x+2) \\ &= (x+2)^2 - 3 \\ &= x^2 + 4x + 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ g(x) = x^2 + 4x + 1$ โดยที่ $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$

หมายเหตุ จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นได้ว่า $f \circ g \neq g \circ f$

ตัวอย่างที่ 38

กำหนด $f(x) = -x^2 - 1$ และ $g(x) = \sqrt{x}$ จะมี $g \circ f$ และ $f \circ g$ หรือไม่ เพราะเหตุใด ถ้ามี จงหา $g \circ f$ และ $f \circ g$ พร้อมทั้งโดเมน

วิธีทำ จาก $f(x) = -x^2 - 1$ จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = (-\infty, -1]$

จาก $g(x) = \sqrt{x}$ จะได้ $D_g = [0, \infty)$ และ $R_g = [0, \infty)$

เนื่องจาก $R_f \cap D_g = \emptyset$ จึงไม่มี $g \circ f$

เนื่องจาก $R_g \cap D_f = [0, \infty)$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f \circ g$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in [0, \infty) \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} \\ &= [0, \infty) \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{f \circ g}$ จะได้

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(\sqrt{x}) \\ &= -(\sqrt{x})^2 - 1 \\ &= -x - 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ g(x) = -x - 1$ โดยที่ $D_{f \circ g} = [0, \infty)$

ตัวอย่างที่ 39

กำหนด $f(x) = \sqrt{x}$ และ $g(x) = x^2$ จงหา $g \circ f$ และ $f \circ g$ พร้อมทั้งโดเมน

วิธีทำ จาก $f(x) = \sqrt{x}$ จะได้ $D_f = [0, \infty)$ และ $R_f = [0, \infty)$

จาก $g(x) = x^2$ จะได้ $D_g = \mathbb{R}$ และ $R_g = [0, \infty)$

เนื่องจาก $R_f \cap D_g = [0, \infty)$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $g \circ f$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in [0, \infty) \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} \\ &= [0, \infty) \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{g \circ f}$ จะได้

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(\sqrt{x}) \\ &= (\sqrt{x})^2 \\ &= x \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ f(x) = x$ โดยที่ $D_{g \circ f} = [0, \infty)$

เนื่องจาก $R_g \cap D_f = [0, \infty)$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f \circ g$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [0, \infty)\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{f \circ g}$ จะได้

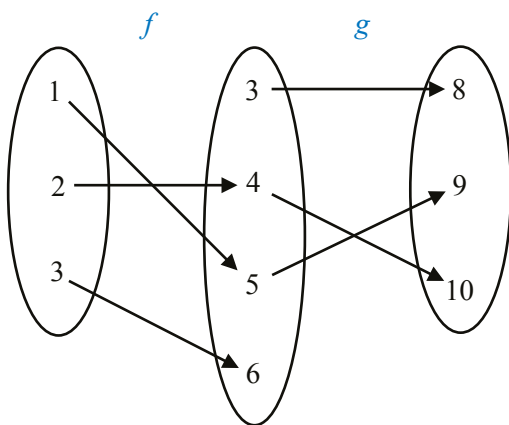
$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(x^2) \\ &= \sqrt{x^2} \\ &= |x| \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ g(x) = |x|$ โดยที่ $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$

ตัวอย่างที่ 40

ให้ $f = \{(1, 5), (2, 4), (3, 6)\}$ และ $g = \{(3, 8), (4, 10), (5, 9)\}$ จงหา $g \circ f$

วิธีทำ



$$D_f = \{1, 2, 3\} \text{ และ } R_f = \{4, 5, 6\}$$

$$D_g = \{3, 4, 5\} \text{ และ } R_g = \{8, 9, 10\}$$

จะได้ $R_f \cap D_g = \{4, 5\}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $g \circ f$

เนื่องจาก $f(1) = 5$ และ $g(5) = 9$

$$\text{ดังนั้น } g \circ f(1) = g(f(1)) = g(5) = 9$$

เนื่องจาก $f(2) = 4$ และ $g(4) = 10$

$$\text{ดังนั้น } g \circ f(2) = g(f(2)) = g(4) = 10$$

เนื่องจาก $f(3) = 6$ แต่ 6 ไม่อยู่ในโดเมนของ g

ดังนั้น 3 ไม่อยู่ในโดเมนของ $g \circ f$

$$\text{จะได้ } g \circ f = \{(1, 9), (2, 10)\}$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่าไม่มี $f \circ g$ เพราะ $R_g \cap D_f = \emptyset$

ในตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้น ได้แสดงวิธีสร้างฟังก์ชันประกอบจากฟังก์ชันที่กำหนดให้ ซึ่งในบางครั้งเมื่อพบฟังก์ชันที่มีรูปแบบซับซ้อน อาจจะเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชันที่มีรูปแบบอย่างง่ายได้ ดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 41

กำหนด $F(x) = (2x-3)^{10}$ จงเขียน F ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชันสองฟังก์ชัน

วิธีทำ สังเกตว่าค่าของฟังก์ชัน F ที่ x ได้จากการหาค่า $2x-3$ แล้วจึงยกกำลัง 10

$$\text{ดังนั้น ให้ } f(x) = 2x-3 \text{ และ } g(x) = x^{10}$$

$$\text{จะได้ว่า } g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x-3) = (2x-3)^{10}$$

$$\text{ดังนั้น } F = g \circ f$$

การเขียนฟังก์ชันให้อยู่ในรูปฟังก์ชันประกอบอาจทำได้หลายวิธี เช่น จากตัวอย่างข้างต้น

$$\text{ถ้าให้ } h(x) = 2x \text{ และ } k(x) = (x-3)^{10}$$

$$\text{จะได้ } k \circ h(x) = k(h(x)) = k(2x) = (2x-3)^{10}$$

$$\text{ดังนั้น } F = k \circ h$$

การเลือกฟังก์ชันที่มาประกอบกันแล้วได้ฟังก์ชันที่กำหนดให้ จึงขึ้นอยู่กับความเหมาะสมและความสะดวกในการคำนวณ



แบบฝึกหัด 1.5

1. จงหา $f + g$, $f - g$, fg และ $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

1) $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 2$ 2) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 2}$

3) $f(x) = x^3 + 4x^2$, $g(x) = 3x^2 + 1$ 4) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = -\frac{4}{x+2}$

5) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $g(x) = \sqrt{1 - x}$ 6) $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $g(x) = \frac{x}{x-1}$

2. จงหาโดเมนของฟังก์ชัน

1) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2 - x}$ 2) $f(x) = \sqrt{x+2} - \frac{1}{x}$

3) $f(x) = (x+2)^2(x-4)^{\frac{1}{4}}$ 4) $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{x-1}$

3. ให้ $f(x) = 3x - 5$ และ $g(x) = 1 - x^2$ จงหา

1) $f(g(0))$ และ $g(f(0))$

2) $f(f(4))$ และ $g(g(1))$

3) $f \circ g(-2)$ และ $g \circ f(-2)$

4) $f \circ f(-1)$ และ $g \circ g(2)$

4. ให้ $f = \{(-3, 1), (0, 4), (2, 0)\}$, $g = \{(-3, 2), (1, 2), (2, 6)\}$ และ $h = \{(2, 4), (1, 0)\}$ จงหาฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f + g$

2) $f - g$

3) $g - f$

4) fg

5) $\frac{f}{g}$

6) $\frac{g}{f}$

7) $f \circ g$

8) $g \circ f$

9) $f \circ h$

10) $h \circ f$

11) $h \circ g$

12) $g \circ h$

5. จงหา $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ และ $g \circ g$ พร้อมทั้งโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f และ g ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = 4x - 1$

2) $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 5$

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 2x + 3$

4) $f(x) = |x|$, $g(x) = 2x - 5$

5) $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $g(x) = 2x - 3$

6) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$

6. กำหนด $f(x) = x^4 + 4$, $g(x) = x - 5$ และ $h(x) = \sqrt{x}$ จงหา $(f \circ g) \circ h$ และ $f \circ (g \circ h)$

7. จงหาฟังก์ชัน f และ g ซึ่ง $f \circ g = h$ เมื่อกำหนดฟังก์ชัน h ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $h(x) = (x - 9)^8$

2) $h(x) = \sqrt{x} + 5$

3) $h(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2}$

4) $h(x) = \frac{1}{x+10}$

5) $h(x) = |1 - x^5|$

6) $h(x) = \sqrt{2 + \sqrt{x}}$

8. ถ้า $g(x) = 2x + 1$ และ $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$ แล้ว จงหาฟังก์ชัน f ซึ่ง $f \circ g = h$

1.6 ฟังก์ชันผกผัน

จากที่ได้กล่าวมาแล้วว่า เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ใด ๆ ให้ สามารถหาตัวผกผันของความสัมพันธ์ได้ โดยการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์นั้น

เนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ ดังนั้นจึงมีตัวผกผันของฟังก์ชันซึ่งเป็นความสัมพันธ์ แต่มีข้อสังเกตคือ ตัวผกผันของฟังก์ชันไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันเสมอไป เช่น

สำหรับ $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ เป็นฟังก์ชัน

และ $f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ เป็นฟังก์ชัน

สำหรับ $g = \{(1, 2), (3, 2), (2, 3)\}$ เป็นฟังก์ชัน

แต่ $g^{-1} = \{(2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

ถ้าตัวผกผันของฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันแล้ว จะเรียก f^{-1} ว่าเป็น **ฟังก์ชันผกผัน (inverse function)** ของ f และกล่าวว่า ฟังก์ชัน f มีฟังก์ชันผกผัน

ฟังก์ชันที่จะมีฟังก์ชันผกผันต้องเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ทฤษฎีบท 1

ให้ f เป็นฟังก์ชัน

f มีฟังก์ชันผกผัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1-1

ตัวอย่างที่ 42

ฟังก์ชัน f ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = 3x + 1$ มีฟังก์ชันผกผันหรือไม่

วิธีทำ วิธีที่ 1 ใช้บทนิยาม โดยเขียน f ให้อยู่ในรูปเซต จะได้ $f = \{(x, y) | y = 3x + 1\}$

$$\text{จะได้ } f^{-1} = \{(x, y) | x = 3y + 1\} = \{(x, y) | y = \frac{x-1}{3}\}$$

ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $(x, y) \in f^{-1}$ และ $(x, z) \in f^{-1}$

$$\text{จะได้ว่า } y = \frac{x-1}{3} \text{ และ } z = \frac{x-1}{3}$$

ดังนั้น $y = z$ เสมอ

จะได้ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน นั่นคือ f มีฟังก์ชันผกผัน

วิธีที่ 2 ใช้ทฤษฎีบท โดยแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนี้

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $f(x_1) = f(x_2)$

$$\text{จะได้ว่า } 3x_1 + 1 = 3x_2 + 1$$

$$\text{ทำให้ } x_1 = x_2$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และโดยทฤษฎีบท จะได้ f มีฟังก์ชันผกผัน ■

ตัวอย่างที่ 43

กำหนดให้ $f(x) = x^2$ จงพิจารณาว่า f มีฟังก์ชันผกผันหรือไม่

วิธีทำ ใช้บทนิยาม โดยเขียน f ให้อยู่ในรูปเซต จะได้ $f = \{(x, y) | y = x^2\}$

$$\text{จะได้ } f^{-1} = \{(x, y) | x = y^2\}$$

จะเห็นว่า f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ $(1, -1) \in f^{-1}$ และ $(1, 1) \in f^{-1}$

ดังนั้น f ไม่มีฟังก์ชันผกผัน ■

ในกรณีที่ฟังก์ชัน f มีฟังก์ชันผกผัน ซึ่งหมายถึง f^{-1} เป็นฟังก์ชัน โดยที่โดเมนของ f^{-1} เท่ากับเรนจ์ของ f และเรนจ์ของ f^{-1} เท่ากับ โดเมนของ f

และ $(x, y) \in f$ ก็ต่อเมื่อ $(y, x) \in f^{-1}$

นั่นคือ $y = f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $x = f^{-1}(y)$ ----- (1)

แสดงว่า f ส่ง x ไป y ก็ต่อเมื่อ f^{-1} จะส่ง y ไป x

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ $x \in D_f$ ถ้า $y = f(x)$ จะได้ $f^{-1}(y) = x$ ทำให้

$$x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x))$$

และสำหรับทุก ๆ $y \in R_f$ ถ้า $y = f(x)$ จะได้ $f^{-1}(y) = x$ และทำให้

$$y = f(x) = f(f^{-1}(y))$$

จากตัวอย่างที่ 42 และ 43 ซึ่งแสดงการหา f^{-1} โดยการเขียน f ในรูปเซต อาจหา f^{-1} ได้จาก (1) นั่นคือ จาก $y = f(x)$ ซึ่งเป็นสมการที่เขียน y ในพจน์ของ x จากนั้นจะหา x ในพจน์ของ y ซึ่งหมายถึง $x = f^{-1}(y)$ ขั้นตอนต่อไปเปลี่ยน x เป็น y และ y เป็น x เพื่อที่จะได้ $y = f^{-1}(x)$

จะแสดงการหาฟังก์ชันผกผันโดยวิธีนี้กับฟังก์ชันในตัวอย่างที่ 42 คือ $f(x) = 3x + 1$

ดังนั้น $y = f(x) = 3x + 1$

หา x ในพจน์ของ y จะได้ $x = \frac{y-1}{3} = f^{-1}(y)$

เปลี่ยน x เป็น y และเปลี่ยน y เป็น x

จะได้ $y = \frac{x-1}{3} = f^{-1}(x)$

นั่นคือ $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$

ตัวอย่างที่ 44

จงหาฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชัน f ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = \frac{x^3 + 2}{3}$

วิธีทำ จาก $y = f(x) = \frac{x^3 + 2}{3}$

หา x ในพจน์ของ y จะได้ $x^3 = 3y - 2$ หรือ $x = \sqrt[3]{3y - 2} = f^{-1}(y)$

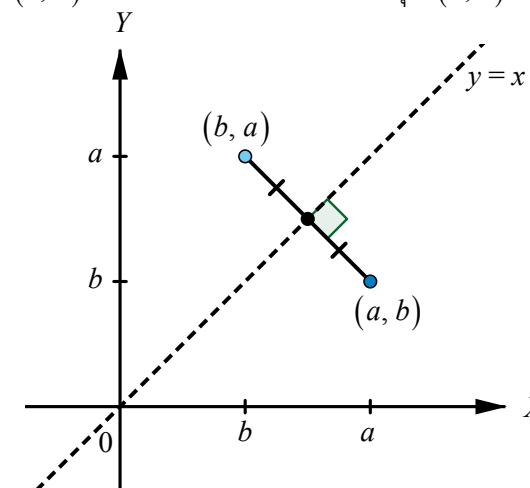
สลับ x กับ y จะได้ $y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{3x - 2}$ ■

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีฟังก์ชันผกผัน พิจารณากราฟของ f และกราฟของ f^{-1} ว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร

จาก $b = f(a)$ ก็ต่อเมื่อ $a = f^{-1}(b)$

แสดงว่า จุด (a, b) อยู่บนกราฟของ f ก็ต่อเมื่อ จุด (b, a) อยู่บนกราฟของ f^{-1}

จุด (b, a) ได้จากการสะท้อนภาพของจุด (a, b) ข้ามเส้นตรง $y = x$ ดังรูป



จากที่ได้กล่าวไว้แล้ว กราฟของตัวผกผันของความสัมพันธ์ r ได้จากกราฟของ r โดยเขียนภาพสะท้อนข้ามเส้นตรง $y = x$ จะสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันผกผัน f^{-1} ของ f จากกราฟของ f ได้ในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 45

กำหนด $f(x) = \sqrt{x-2}$ จงหา f^{-1} แล้วเขียนกราฟของ f และ f^{-1}

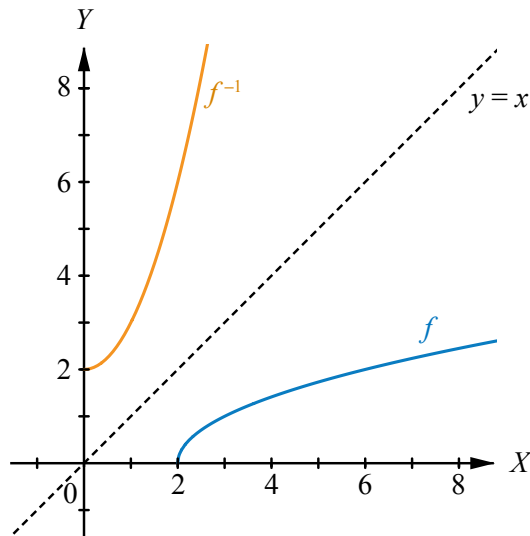
วิธีทำ จาก $y = f(x) = \sqrt{x-2}$

หา x ในพจน์ของ y จะได้ $x = y^2 + 2$ และ $y \geq 0$

สลับ x กับ y จะได้ $y = x^2 + 2$ และ $x \geq 0$

จะได้ $f^{-1}(x) = x^2 + 2$ โดยที่ $D_{f^{-1}} = \{x | x \geq 0\}$

ต่อไปเขียนกราฟของ f ซึ่งทำให้ได้กราฟของ f^{-1} โดยสะท้อนข้ามเส้นตรง $y = x$ ดังรูป



แบบฝึกหัด 1.6

- ให้ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
 - ถ้า $f(3) = 10$ จงหา $f^{-1}(10)$
 - ถ้า $f^{-1}(3) = -4$ จงหา $f(-4)$
 - ถ้า $f(10) = 18$ จงหา $f^{-1}(18)$
 - ถ้า $f^{-1}(4) = 3$ จงหา $f(3)$
 - ถ้า $f(x) = 5 + 2x$ จงหา $f^{-1}(10)$
 - ถ้า $f(x) = x^2 + 4x$ เมื่อ $x \geq -2$ จงหา $f^{-1}(12)$
- จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f มีฟังก์ชันผกผันหรือไม่ ถ้ามี จงหาฟังก์ชันผกผัน
 - $f(x) = 2x + 5$
 - $f(x) = \frac{1}{x}$
 - $f(x) = x^2 - 4$ เมื่อ $x \geq 0$
 - $f(x) = \frac{1}{x-3}$
 - $f(x) = \sqrt{x} - 1$
- จงหาฟังก์ชันผกผันของ f
 - $f(x) = 5 - x$
 - $f(x) = \frac{x}{5}$
 - $f(x) = \frac{5-2x}{1+3x}$
 - $f(x) = 5 - x^2, x \geq 0$
 - $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$

4. กำหนดฟังก์ชัน f ดังนี้

(ก) $f(x) = 3x + 6$

(ข) $f(x) = x^3 - 2$

(ค) $f(x) = 9 - x^2, x \geq 0$

(ง) $f(x) = \sqrt{x+3}$

1) จงเขียนกราฟของ f

2) จงเขียนกราฟของ f^{-1} โดยใช้กราฟของ f

3) จงหา f^{-1}

5. กำหนดให้ $f(x) = x^3$ ฟังก์ชัน f มีฟังก์ชันผกผันหรือไม่ ถ้ามี จงหาฟังก์ชันผกผันของ f

6. กำหนดให้ $f(x) = |x| + 4$ ฟังก์ชัน f มีฟังก์ชันผกผันหรือไม่ ถ้ามี จงหาฟังก์ชันผกผันของ f



แบบฝึกหัดท้ายบท

1. ถ้า $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 25\}$ และ $r = \{(4, 2), (3, 1), (2, 3), (5, 4)\}$ แล้ว จงพิจารณาว่า r เป็นความสัมพันธ์บนเซต E หรือไม่

2. จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1) $r = \{(x, y) \mid y^2 = x\}$

2) $r = \{(x, y) \mid y = x^3\}$

3) $r = \{(x, y) \mid y = -\sqrt{x}\}$

4) $r = \{(x, y) \mid y = (x-2)^2\}$

5) $r = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 - 1}\}$

6) $r = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{|1-x|}\}$

7) $r = \{(x, y) \mid y = \frac{3x}{x+5}\}$

8) $r = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\}$

3. จงหาตัวผกผันของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของตัวผกผันของความสัมพันธ์เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

1) $r = \{(2, 2), (2, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 3)\}$

2) $r = \{(x, y) \mid 2x + y = 1\}$

3) $r = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}\}$

4) $r = \{(x, y) \mid y > x\}$

4. จงเขียนกราฟของ r และ r^{-1} ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ r ดังต่อไปนี้

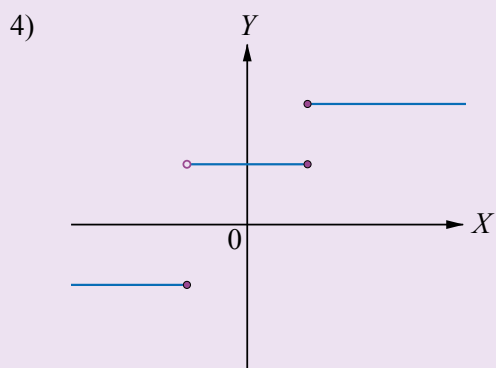
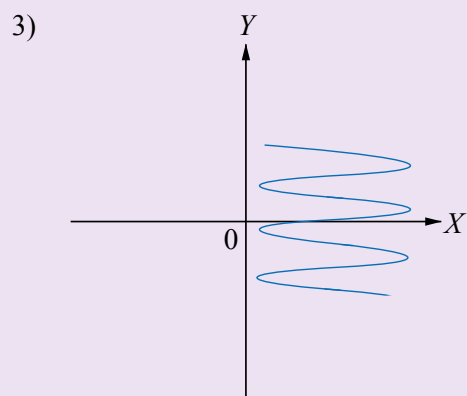
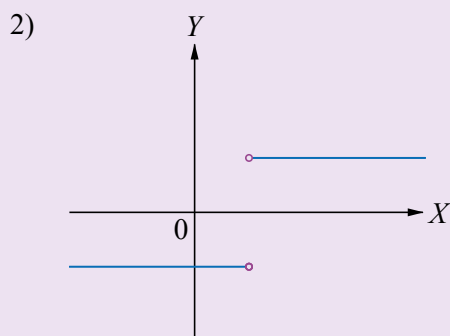
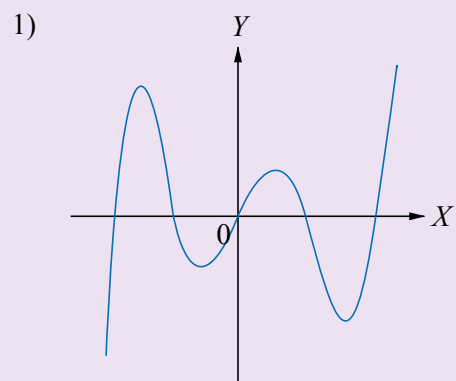
1) $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x - 2\}$ เมื่อ $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

2) $r = \{(x, y) \mid y = 2x\}$

3) $r = \{(x, y) \mid y > 1 - 2x\}$

5. ถ้า r และ s เป็นความสัมพันธ์ ซึ่ง $D_r = R_s$ และ $R_r = D_s$ แล้วจำเป็นหรือไม่ ที่ s จะเป็นตัวผกผันของ r ถ้าไม่จำเป็น จงยกตัวอย่างค้าน

6. จากแผนภาพหรือกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่า ความสัมพันธ์ในข้อใดบ้างที่เป็นฟังก์ชันและข้อใดบ้างที่ไม่เป็นฟังก์ชัน



7. ความสัมพันธ์ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชัน ถ้าไม่เป็น จงให้เหตุผล

1) $\{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d), (4, e)\}$

2) $\{(x, y) \in A \times A \mid y \geq x\}$ เมื่อ $A = \{1, 2, 3\}$

3) $\{(x, y) \mid x = 3\}$

4) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x}\}$

5) $\{(x, y) \mid y = 1 \text{ เมื่อ } x \geq 0 \text{ และ } y = -1 \text{ เมื่อ } x \leq 0\}$

8. ถ้า $f(x) = x^2 + 3x - 5$ จงหา $f(0)$, $f(-1)$, $f(3)$, $f(a)$ และ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เมื่อ $h \neq 0$

9. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f(x) = 2x + 1$

2) $f(x) = \sqrt{x - 2}$

3) $f(x) = \frac{x^2}{2}$

4) $f(x) = 2x^2$

5) $f(x) = |x + 1|$

10. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

1) $f(x) = -5x + 2$

2) $f(x) = x^3 - 5$

3) $f(x) = -x^2 - 6x - 10$

4) $f(x) = |3x - 5| + 7$

11. กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ เป็นจำนวนเฉพาะที่น้อยกว่า } 7\}$ และ $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x^2 \leq 4\}$

$$\begin{aligned} f_1 &= \{(-1, 2), (0, 2), (1, 3), (2, 3)\} & f_2 &= \{(2, 2), (3, 2), (5, 2)\} \\ f_3 &= \{(5, -1), (3, 0), (2, 2)\} & f_4 &= \{(-1, 3), (0, 3), (1, 3), (2, 3)\} \\ f_5 &= \{(-1, 2), (0, 3), (1, 3), (2, 5)\} & f_6 &= \{(2, 0), (5, -1), (3, 2)\} \\ f_7 &= \{(-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, -1)\} \end{aligned}$$

จงพิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดให้ว่ามีฟังก์ชันใดบ้างที่เป็น

- 1) ฟังก์ชันจาก A ไป B
- 2) ฟังก์ชันจาก B ไป A
- 3) ฟังก์ชันจาก A ไป A
- 4) ฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไป B
- 5) ฟังก์ชัน 1-1 จาก B ไป B
- 6) ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง A
- 7) ฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง A
- 8) ฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง B

12. จงตรวจสอบว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชัน 1-1

- 1) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ -3, & x \geq 1 \end{cases}$
- 2) $h(x) = |3x + 2|$
- 3) $g(x) = \sqrt{x+1}$
- 4) $r(x) = x^2 - x + 2$

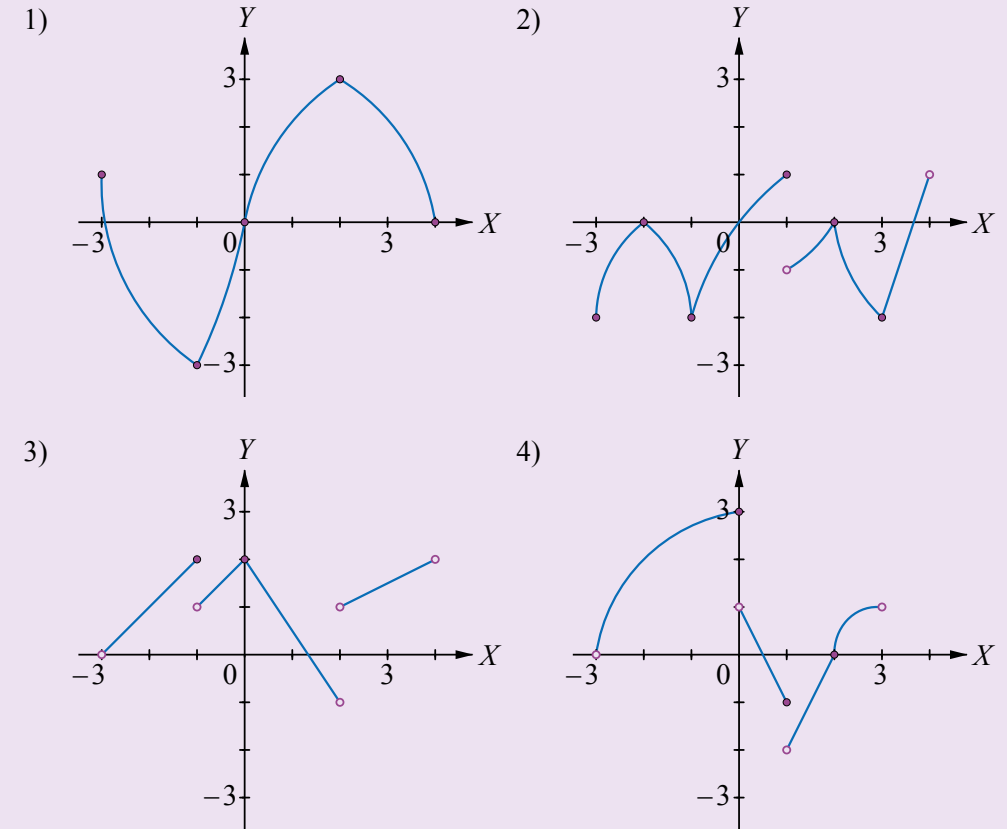
13. จงตรวจสอบว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $[0, \infty)$

- 1) $f(x) = |x - 2|$
- 2) $h(x) = x^2 + 1$
- 3) $g(x) = x^2 - 4x + 4$

14. จงตรวจสอบว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}$

- 1) $f(x) = 1 - x$
- 2) $h(x) = x^2 - 4x + 2$

15. จากกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ จงหาช่วงที่ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันเพิ่มและช่วงที่ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันลด



16. จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้ฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนเซตที่กำหนดให้

- 1) $f(x) = |2x + 1|$ บนช่วง $[-\frac{1}{2}, \infty)$
- 2) $f(x) = -x^2 - 4$ บนช่วง $(-\infty, 0]$
- 3) $f(x) = x^3 + 2$ บน $\mathbb{R}$
- 4) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ บนช่วง $[-1, 1]$

17. จงจับคู่สมการกับกราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $y = 5x + 3$

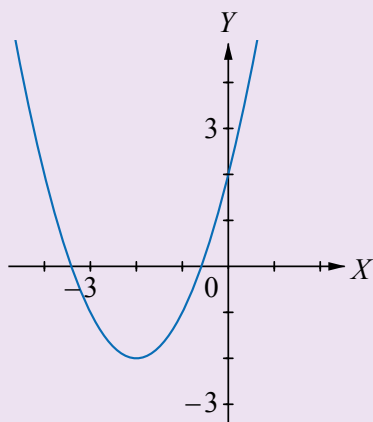
2) $y = x^2 + 4x + 2$

3) $y = x^2 - 4x + 6$

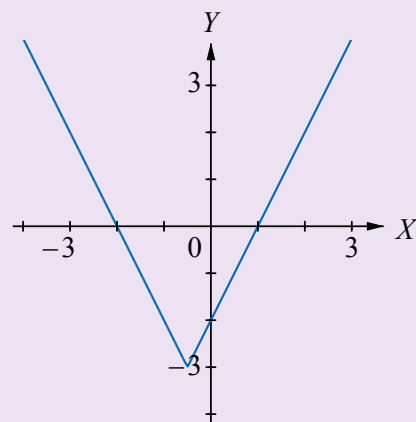
4) $y = |2x + 1| - 3$

5) $y = |3x - 3| + 1$

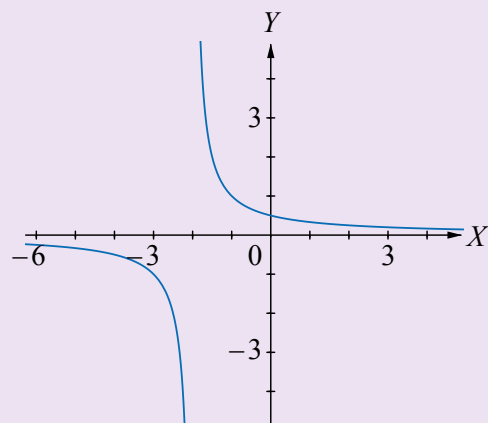
6) $y = \frac{1}{x+2}$



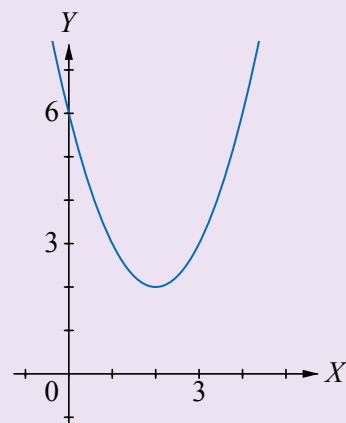
(ก)



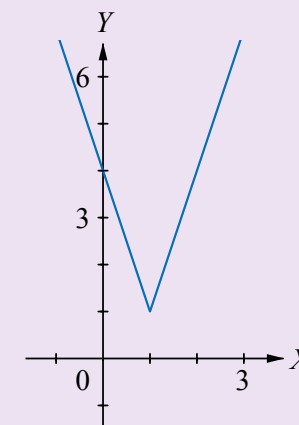
(ข)



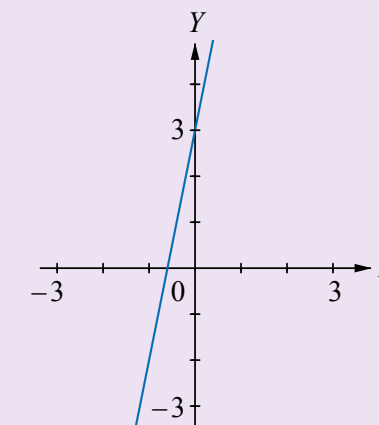
(ค)



(ง)



(จ)



(ฉ)

18. จงหา $f + g$, $f - g$, fg และ $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

1) $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = 1 - x^2$

2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $g(x) = \sqrt{3 - x}$

3) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$, $g(x) = x^3 - 1$

4) $f(x) = \frac{x}{x-3}$, $g(x) = \frac{1}{x+1}$

19. ให้ $f(x) = |x + 1| - 3$ และ $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ จงหา

1) $f(g(0))$ และ $g(f(0))$

2) $f(f(3))$ และ $g(g(-2))$

3) $f \circ g(-1)$ และ $g \circ f(2)$

4) $f \circ f(1)$ และ $g \circ g(3)$

5) $f \circ f(x)$ และ $g \circ g(x)$

20. ให้ $f = \{(-1, 1), (0, 4), (1, 5)\}$, $g = \{(-1, 0), (1, 4), (2, 1)\}$ และ

$h = \{(0, 0), (2, -1), (1, 2)\}$ จงหาฟังก์ชันต่อไปนี้

- | | | |
|------------------|----------------|------------------|
| 1) $f + g$ | 2) $g - h$ | 3) $\frac{g}{f}$ |
| 4) $\frac{f}{h}$ | 5) hg | 6) $f \circ h$ |
| 7) $h \circ f$ | 8) $h \circ g$ | 9) $g \circ h$ |

21. จงหา $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ และ $g \circ g$ พร้อมทั้งโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f และ g ในแต่ละข้อต่อไปนี้

- | | |
|--|--|
| 1) $f(x) = 5x - 6$, $g(x) = \frac{x}{3}$ | 2) $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x + 2$ |
| 3) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x+5}$ | 4) $f(x) = x + 4$, $g(x) = x - 4 $ |
| 5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = x^2 + 4x$ | 6) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = \frac{x-2}{x}$ |

22. กำหนด $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = \frac{1}{x+1}$ และ $h(x) = (x-1)^2$ จงหา $(f \circ g) \circ h$ และ $f \circ (g \circ h)$

23. ถ้า $f(x) = 3x + 5$ และ $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$ แล้ว จงหาฟังก์ชัน g ซึ่ง $f \circ g = h$

24. จงแสดงว่า f และ g เป็นฟังก์ชันผกผันของกันและกัน

- $f(x) = 3x$, $g(x) = \frac{1}{3}x$
- $f(x) = \frac{3-x}{5}$, $g(x) = 3-5x$
- $f(x) = x^5$, $g(x) = \sqrt[5]{x}$
- $f(x) = x^3 + 3$, $g(x) = (x-3)^{\frac{1}{3}}$
- $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ เมื่อ $0 \leq x \leq 2$, $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ เมื่อ $0 \leq x \leq 2$

25. จงหาฟังก์ชันผกผันของ f

- | | |
|-----------------------------|------------------------------|
| 1) $f(x) = 5x + 7$ | 2) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ |
| 3) $f(x) = 5 + \sqrt[3]{x}$ | 4) $f(x) = x^6$, $x \geq 0$ |

26. กำหนดฟังก์ชัน f ดังนี้

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| (ก) $f(x) = 5x + 3 $, $x \geq 0$ | (ข) $f(x) = 5 - 2x^2$, $x \leq 0$ |
| (ค) $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$ | (ง) $f(x) = -x^3 + 2$ |

- จงเขียนกราฟของ f
- จงเขียนกราฟของ f^{-1} โดยใช้กราฟของ f
- จงหา f^{-1}

27. ฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function) บนเซต A คือ $I_A : A \rightarrow A$ ซึ่ง $I_A(x) = x$ ทุก $x \in A$ จงแสดงว่า สำหรับฟังก์ชัน $f : A \rightarrow B$ จะได้ว่า

- $f \circ I_A = f$ และ $I_B \circ f = f$
- ถ้า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน แล้ว $f^{-1} \circ f = I_{D_f}$ และ $f \circ f^{-1} = I_{R_f}$

28. ถ้า $f \circ g = h$ และ g มีฟังก์ชันผกผันแล้ว จงพิสูจน์ว่า $f = h \circ g^{-1}$

29. ในการดำน้ำแบบ SCUBA นักดำน้ำต้องคำนึงถึงความดันน้ำที่ระดับความลึกต่าง ๆ ซึ่งสามารถแทนด้วยฟังก์ชัน $f(x) = ax + b$ โดยที่ $f(x)$ แทนความดันน้ำในหน่วยปอนด์ต่อตารางนิ้ว (pound per square inch: psi) ที่ระดับความลึก x ฟุต a แทนความดันน้ำที่เพิ่มขึ้นต่อความลึกทุก ๆ หนึ่งฟุต และ b แทนความดันที่ผิวน้ำทะเล (psi) จงหาว่าความดันน้ำทะเลเป็นเท่าใดขณะที่นักดำน้ำอยู่ที่ความลึก 40 ฟุต เมื่อความดันน้ำทะเลเพิ่มขึ้น 0.45 psi ทุก ๆ ความลึกหนึ่งฟุต และความดันที่ผิวน้ำทะเลประมาณ 14.7 psi

เสริมสมอง : SCUBA

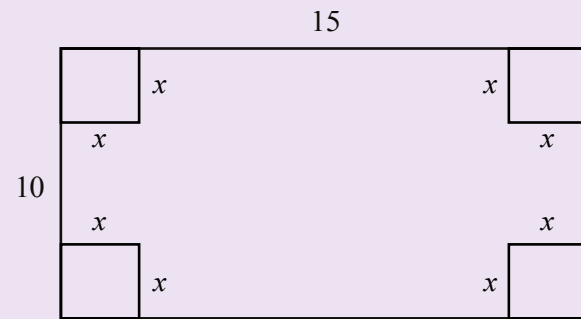


SCUBA มาจากคำว่า Self-Contained Underwater Breathing Apparatus เป็นอุปกรณ์ช่วยในการหายใจขณะอยู่ใต้น้ำ ผู้ที่ดำน้ำในประเภทนี้ต้องผ่านหลักสูตรการดำน้ำโดยเฉพาะ และควรคำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงความดันเพื่อไม่ให้เกิดอันตรายต่อเนื้อเยื่อและอวัยวะของร่างกาย เช่น หู จมูก ปอด

30. บริษัทแห่งหนึ่งจ่ายค่าจ้างให้กับพนักงาน โดยจ่ายค่าเบี้ยเลี้ยง ค่าพาหนะ ให้กับพนักงานขายทุกคน คนละเท่า ๆ กัน และจ่ายค่านายหน้า (คิดเป็นร้อยละของยอดขายที่พนักงานแต่ละคนขายได้) ปรากฏว่าเมื่อเดือนที่แล้ว นาย ก ได้รับเงินจากบริษัท 34,000 บาท โดยที่เขาขาย 200,000 บาท และนาย ข ได้รับเงินจากบริษัท 28,000 บาท โดยที่เขาขาย 150,000 บาท
- 1) บริษัทจ่ายค่านายหน้าให้กับพนักงานร้อยละเท่าใด
 - 2) บริษัทจ่ายค่าเบี้ยเลี้ยงและค่าพาหนะให้นาย ก และนาย ข เป็นเงินคนละเท่าใด
 - 3) จงเขียนฟังก์ชันแสดงรายได้ที่พนักงานได้รับในแต่ละเดือน
31. บริษัทท่องเที่ยวแห่งหนึ่งคิดค่าใช้จ่ายคนละ 475 บาท สำหรับนักท่องเที่ยว 75 คน แต่ถ้ามีนักท่องเที่ยวมาใช้บริการเกิน 75 คน จะลดราคาให้คนละ 5 บาท สำหรับนักท่องเที่ยวที่เพิ่มขึ้น 1 คน (เช่น ถ้ามีนักท่องเที่ยว 80 คน จะคิดค่าใช้จ่ายคนละ $475 - (5 \times 5)$ หรือ 450 บาท) จงหาจำนวนนักท่องเที่ยวที่จะทำให้บริษัทท่องเที่ยวแห่งนี้มีรายได้มากที่สุด และบริษัทจะมีรายได้มากที่สุดเท่าใด
32. ชายคนหนึ่งต้องการล้อมรั้วเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเพื่อทำการเกษตร โดยด้านหนึ่งของพื้นที่ที่ต้องการล้อมรั้วอยู่ติดคลองซึ่งไม่ต้องมีรั้วกัน ถ้ารั้วทั้งหมดยาว 120 เมตร แล้ว
- 1) จงหาความสัมพันธ์ของพื้นที่กับความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้
 - 2) ให้ x แทนความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า x จะมากที่สุดเท่าใด
 - 3) ชายผู้นี้จะล้อมรั้วให้ได้พื้นที่มากที่สุดเป็นเท่าใด
33. จงหาค่ามากที่สุดของ xy เมื่อ $6x + 2y = 8$

34. อาคารจอดรถแห่งหนึ่ง จอดฟรี 3 ชั่วโมงแรก ชั่วโมงต่อไปชั่วโมงละ 30 บาท หลังจากชั่วโมงที่ 8 คิดค่าใช้บริการชั่วโมงละ 50 บาท (เศษของชั่วโมง คิดเป็น 1 ชั่วโมง) จงเขียนฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชันแสดงอัตราค่าบริการจอดรถของอาคารแห่งนี้
35. ให้ $N(t) = 100t - 5t^2$ เป็นฟังก์ชันแสดงจำนวนรถยนต์ซึ่งโรงงานแห่งหนึ่งผลิตได้ในระยะเวลา t ชั่วโมง เมื่อ $0 \leq t \leq 10$ ถ้าฟังก์ชันค่าใช้จ่ายในการผลิตรถยนต์เขียนได้เป็น $C(x) = 5000 + 6000x$ เมื่อ x แทนจำนวนรถยนต์ จงเขียนค่าใช้จ่ายในการผลิตรถยนต์ในรูปฟังก์ชันของระยะเวลาในการผลิตรถยนต์
36. สมมติว่า บัญชีเงินฝากประจำได้ดอกเบี้ยร้อยละ 5 ทบต้นปีละครั้ง ถ้านักเรียนนำเงิน x บาทฝากเข้าบัญชีดังกล่าว เมื่อครบกำหนด 1 ปี จะได้เงินรวม $A(x) = x + 0.05x = 1.05x$ จงหา $A \circ A, (A \circ A) \circ A, ((A \circ A) \circ A) \circ A$ และฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชัน A จำนวน n ฟังก์ชัน เมื่อ n แทนจำนวนนับ พร้อมทั้งระบุว่าฟังก์ชันประกอบเหล่านี้แทนอะไร
37. จุดเยือกแข็งของน้ำบริสุทธิ์คือ 0°C หรือ 32°F และจุดเดือดของน้ำบริสุทธิ์คือ 100°C หรือ 212°F ซึ่งความสัมพันธ์ของอุณหภูมิที่เป็นองศาเซลเซียส ($^\circ\text{C}$) และองศาฟาเรนไฮต์ ($^\circ\text{F}$) เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น
- 1) จงเขียนฟังก์ชัน $f(x)$ แสดงอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาฟาเรนไฮต์ เมื่อ x แทนอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส
 - 2) จงเขียนฟังก์ชัน $g(x)$ แสดงอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส เมื่อ x แทนอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาฟาเรนไฮต์
 - 3) จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ และฟังก์ชัน $g(x)$ พร้อมทั้งพิจารณาว่าฟังก์ชันทั้งสองมีความสัมพันธ์กันอย่างไร
 - 4) ถ้าอุณหภูมิของน้ำบริสุทธิ์วัดได้ 117°F จะเป็นกี่องศาเซลเซียส
 - 5) ถ้าอุณหภูมิของน้ำบริสุทธิ์วัดได้ 30°C จะเป็นกี่องศาฟาเรนไฮต์

38. กล่องขนมทำจากกระดาษกว้าง 10 นิ้ว ยาว 15 นิ้ว โดยตัดกระดาษเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านยาว x นิ้ว ออกจากมุมทั้งสี่ แล้วพับด้านข้างทำเป็นกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก



- 1) จงเขียนฟังก์ชัน $V(x)$ แสดงปริมาตรของกล่อง เมื่อ x แทนความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
- 2) จงหาโดเมนของฟังก์ชัน $V(x)$ โดยพิจารณาจากขนาดของกระดาษที่ใช้ทำกล่อง
- 3) ถ้ากำหนดให้ x เป็นจำนวนเต็ม กล่องจะมีความจุมากที่สุด เมื่อ x เป็นเท่าใด และกล่องมีปริมาตรกี่ลูกบาศก์นิ้ว
- 4) จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $V(x)$
- 5) จากกราฟในข้อ 4) จงหาความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ทำให้กล่องมีความจุ 100 ลูกบาศก์นิ้ว