



หนังสือเรียน

รายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ ๖ เล่ม ๑

ตามผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

พิมพ์ครั้งที่ ๑

ISBN 978-616-576-413-1

จำนวน ๑๐๐,๐๐๐ เล่ม พ.ศ. ๒๕๖๗

จัดจำหน่ายโดย

องค์การค้าของ สกสค. พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว

๒๒๔๙ ถนนลาดพร้าว วังทองหลาง กรุงเทพมหานคร

❖ มีลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ



ประกาศสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน
เรื่อง อนุญาตให้ใช้สื่อการเรียนรู้ในสถานศึกษา

ด้วยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๖ เล่ม ๑ ตามผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน ได้พิจารณาแล้วอนุญาตให้ใช้ในสถานศึกษาได้

ประกาศ ณ วันที่ ๑๔ กุมภาพันธ์ พ.ศ. ๒๕๖๗

ว่าที่ร้อยตรี 
(ธนุ วงษ์จินดา)

เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

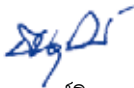
คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) มีอำนาจหน้าที่ในการพัฒนาหลักสูตร วิธีการเรียนรู้ การประเมินผล การจัดทำหนังสือเรียน แบบฝึกหัด และสื่อการเรียนรู้ทุกประเภทที่ใช้ประกอบการเรียนรู้ในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของการจัดการศึกษาขั้นพื้นฐาน

หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๖ เล่ม ๑ นี้ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) จัดทำตามผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยให้ความลุ่มลึกขึ้นสำหรับการศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษาในด้านวิทยาศาสตร์ และมีเนื้อหาสาระที่ทัดเทียมกับนานาชาติ เน้นการคิดวิเคราะห์ การคิดอย่างมีวิจารณญาณ การแก้ปัญหา การคิดสร้างสรรค์ การใช้เทคโนโลยี การสื่อสารและการร่วมมือ รวมทั้งเชื่อมโยงความรู้สู่การนำไปใช้ในชีวิตจริง

กระทรวงศึกษาธิการหวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเรียนเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้ และเป็นส่วนสำคัญในการพัฒนาคุณภาพและมาตรฐานการศึกษา กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนบุคคลและหน่วยงานอื่น ๆ ที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำไว้ ณ โอกาสนี้

ว่าที่ร้อยตรี



(ธนุ วงษ์จินดา)

เลขาธิการคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีจุดเน้นเพื่อต้องการพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถที่ทัดเทียมกับนานาชาติ ได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงความรู้กับกระบวนการคิด ใช้กระบวนการสืบเสาะหาความรู้และแก้ปัญหาที่หลากหลาย มีการทำกิจกรรมด้วยการลงมือปฏิบัติ เพื่อให้ผู้เรียนได้ใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และทักษะแห่งศตวรรษที่ ๒๑ ซึ่งในปีการศึกษา ๒๕๖๑ เป็นต้นไปนี้ โรงเรียนจะต้องใช้ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ สสวท. จึงได้จัดทำหนังสือเรียนที่เป็นไปตามมาตรฐานหลักสูตรเพื่อให้โรงเรียนได้ใช้สำหรับจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๖ เล่ม ๑ นี้ มีผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมที่ครอบคลุมเนื้อหาบางส่วนที่ปรากฏตามตัวชี้วัดรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๖ โดยเมื่อผู้เรียนเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ทั้ง ๖ เล่ม ครบทุกชั้นปีในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ – ๖ แล้วจะสามารถบรรลุผลสัมฤทธิ์ตามตัวชี้วัดของรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ได้ และในขณะเดียวกันก็สามารถต่อยอดเนื้อหาจากรายวิชาพื้นฐานไปสู่เนื้อหาในรายวิชาเพิ่มเติมได้โดยไม่ต้องเสียเวลาเรียนซ้ำซ้อน ทั้งนี้ หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม ๑ นี้ มีเนื้อหาที่จำเป็นที่ต้องเรียน ประกอบด้วยเรื่องลำดับและอนุกรม และแคลคูลัสเบื้องต้น ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญและเพียงพอสำหรับการศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษาในด้านวิทยาศาสตร์ หรือประกอบอาชีพในสาขาที่ใช้วิทยาศาสตร์เป็นฐาน เช่น แพทย์ ทันตแพทย์ สัตวแพทย์ เทคโนโลยีชีวภาพ วิศวกรรม สถาปัตยกรรม เศรษฐศาสตร์ พาณิชยศาสตร์ ฯลฯ โดยเน้นกระบวนการคิดวิเคราะห์และการแก้ปัญหา เชื่อมโยงความรู้สู่การนำไปใช้ในชีวิตจริง ตลอดจนมีกิจกรรมที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนทำงานร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีประสิทธิภาพ รวมทั้งสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง อันเป็นรากฐานในการพัฒนาทรัพยากรบุคคลของชาติให้มีคุณภาพและพัฒนาเศรษฐกิจของประเทศ

การจัดทำหนังสือเรียนเล่มนี้ ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากผู้ทรงคุณวุฒิ นักวิชาการอิสระ คณาจารย์ทั้งหลาย รวมทั้งครูผู้สอน นักวิชาการ จากสถาบันและสถานศึกษาทั้งภาครัฐและเอกชน จึงขอขอบคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้ หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้หนังสือเรียนเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จะขอบคุณยิ่ง



(รองศาสตราจารย์ธีระเดช เจียรสุขสกุล)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

กระทรวงศึกษาธิการ

คำอธิบายรายวิชา

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๖ เล่ม ๑

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ภาคเรียนที่ ๑

เวลา ๑๐๐ ชั่วโมง

จำนวน ๒.๕ หน่วยกิต

ศึกษา พร้อมทั้งฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาของสาระ ดังนี้

ลำดับและอนุกรม ลำดับ ลิมิตของลำดับอนันต์ อนุกรม สัญลักณ์แสดงการบวก การประยุกต์ของลำดับและอนุกรม

แคลคูลัสเบื้องต้น ลิมิตของฟังก์ชัน ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ เส้นสัมผัสเส้นโค้ง อนุพันธ์อันดับสูง การประยุกต์ของอนุพันธ์ ฏิกยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต ปริพันธ์จำกัดเขต พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

โดยจัดประสบการณ์ให้ผู้เรียนได้พัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ อันได้แก่ การแก้ปัญหา การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยง การให้เหตุผล และการคิดสร้างสรรค์

การใช้สื่อ อุปกรณ์ เทคโนโลยี และแหล่งข้อมูล และนำประสบการณ์ ตลอดจนทักษะ และกระบวนการที่ได้ ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์ รวมทั้งเห็นคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบ มีความรอบคอบ และมีวิจารณญาณ

การวัดผลประเมินผล ใช้วิธีการที่หลากหลายตามสภาพความเป็นจริงให้สอดคล้องกับเนื้อหา และทักษะที่ต้องการวัด

ผลการเรียนรู้

๑. ระบุได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก
๒. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต
๓. หาผลบวกอนุกรมอนันต์
๔. เข้าใจและนำความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมไปใช้
๕. ตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่กำหนดให้
๖. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหา
๗. หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตและจำกัดเขตของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้ และนำไปใช้แก้ปัญหา

รวมทั้งหมด ๗ ผลการเรียนรู้

แนะนำการใช้หนังสือเรียน

ส่วนนี้เป็นส่วนแนะนำโครงสร้างของหนังสือเรียนเพื่อการใช้หนังสือเรียนอย่างมีประสิทธิภาพ

ในหนังสือเล่มนี้จะแบ่งบทเรียนเป็น 2 บท โดยแต่ละบทจะมีส่วนประกอบ ดังนี้

“

.....
.....

”

ส่วนนำของบท

เกริ่นนำบทด้วยข้อมูลที่น่าสนใจ รวมถึงการนำไปใช้ในชีวิตจริง เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนตระหนักถึงความสำคัญของการเรียนเนื้อหาในบท

จุดมุ่งหมาย

เป้าหมายที่นักเรียนควรไปถึงหลังจากเรียนจบบทนี้

ความรู้ก่อนหน้า

ความรู้ที่นักเรียนจำเป็นต้องมีก่อนที่จะเรียนบทนี้

เสริมสมอง

เกร็ดความรู้หลากหลายรูปแบบเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน เช่น ประวัตินักคณิตศาสตร์ ตัวอย่างการนำเนื้อหาคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริง การเชื่อมโยงเนื้อหาในบทกับวิชาอื่น

กิจกรรม

กิจกรรมที่นักเรียนสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ด้วยตนเอง เพื่อช่วยพัฒนาทักษะการเรียนรู้และนวัตกรรม (learning and innovation skills) ที่จำเป็นสำหรับศตวรรษที่ 21 อันได้แก่ การคิดสร้างสรรค์และนวัตกรรม (creativity and innovation) การคิดแบบมีวิจารณญาณและการแก้ปัญหา (critical thinking and problem solving) การสื่อสาร (communication) และการร่วมมือ (collaboration)



จุดมุ่งหมาย



ความรู้ก่อนหน้า



เสริมสมอง



กิจกรรม

เทคโนโลยี



โจทย์ที่มีไอคอนนี้สามารถใช้เทคโนโลยีช่วยในการคิดได้ โดยอาจใช้เครื่องคิดเลข โปรแกรมสำเร็จรูปในคอมพิวเตอร์ โปรแกรมประยุกต์ในโทรศัพท์มือถือ การค้นหาข้อมูลทางอินเทอร์เน็ต และอื่น ๆ ตามความเหมาะสม

โจทย์ท้าทาย



โจทย์ที่มีไอคอนนี้เป็นโจทย์ที่ค่อนข้างยากและซับซ้อนกว่าโจทย์แบบฝึกหัดทั่วไป เพื่อท้าทายความสามารถของนักเรียนที่ต้องการพัฒนาทักษะเพิ่มเติม นอกเหนือจากการเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท

แบบฝึกหัด

โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้ระหว่างเรียน มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาการเรียนรู้ของนักเรียน ช่วยให้นักเรียนสามารถตรวจสอบความรู้ความเข้าใจของตนเองได้



แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัดท้ายบท

แบบฝึกหัดท้ายบทแบ่งประเภทได้เป็น

- โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียนจบบท มีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท โดยจะมีแถบสี

- โจทย์ท้าทาย

- โจทย์เพื่อฝึกทักษะ ที่มีความน่าสนใจ โดยจะไม่มีแถบสีและไม่มีไอคอนหน้าเลขข้อ



แบบฝึกหัดท้ายบท

1.
.....

2.
.....

3.
.....

บทที่ 1 จะใช้สี



บทที่ 2 จะใช้สี

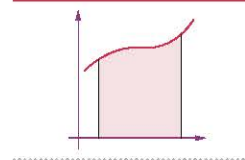


สารบัญ	บทที่ 1	
บทที่	เนื้อหา	หน้า
1	บทที่ 1 ลำดับและอนุกรม	1
	1.1 ลำดับ	3
	1.1.1 ความหมายของลำดับ	3
	1.1.2 ลำดับเลขคณิต	10
	1.1.3 ลำดับเรขาคณิต	17
	1.1.4 ลำดับฮาร์มอนิก	24
	1.2 ลิมิตของลำดับอนันต์	26
	1.3 อนุกรม	41
	1.3.1 อนุกรมเลขคณิต	41
	1.3.2 อนุกรมเรขาคณิต	48
	1.3.3 อนุกรมอนันต์	55
	1.4 สัญลักษณ์แสดงการบวก	72
	1.5 การประยุกต์ของลำดับและอนุกรม	85



ลำดับและอนุกรม

สารบัญ	บทที่ 2	
บทที่	เนื้อหา	หน้า
2	บทที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น	114
	2.1 ลิมิตของฟังก์ชัน	116
	2.2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	137
	2.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	146
	2.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร	159
	2.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ	170
	2.6 เส้นสัมผัสเส้นโค้ง	175
	2.7 อนุพันธ์อันดับสูง	181
	2.8 การประยุกต์ของอนุพันธ์	186
	2.8.1 การเคลื่อนที่แนวตรง	186
	2.8.2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน	189
	2.8.3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด	206
	2.9 ปริยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต	218
	2.10 ปริพันธ์จำกัดเขต	234
	2.11 พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง	247
	บรรณานุกรม	270
	ภาคผนวก	273
	คณะผู้จัดทำ	277



แคลคูลัสเบื้องต้น

บทที่

ลำดับและอนุกรม

1



1.1 ลำดับ

1.1.1 ความหมายของลำดับ

1.1.2 ลำดับเลขคณิต

1.1.3 ลำดับเรขาคณิต

1.1.4 ลำดับฮาร์โมนิก

1.2 สมบัติของลำดับอนันต์

1.3 อนุกรม

1.3.1 อนุกรมเลขคณิต

1.3.2 อนุกรมเรขาคณิต

1.3.3 อนุกรมอนันต์

1.4 สัญลักษ์ณ์แสดงการบวก

1.5 การประยุกต์ของลำดับและอนุกรม



จุดประยุกต์

1. หาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต
2. หาสมบัติของลำดับอนันต์โดยใช้ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง
3. ระบุได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับคู่เข้าหรือลำดับคู่ออก
4. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต
5. หาผลบวกของอนุกรมอนันต์
6. ระบุได้ว่าอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมคู่เข้าหรืออนุกรมคู่ออก
7. ใช้ความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมในการแก้ปัญหา

“

ในการพิจารณาปริมาณยาที่ให้กับผู้ป่วยเพื่อให้ยาออกฤทธิ์ได้อย่างต่อเนื่องและไม่ตกค้างในร่างกายมากเกินไปจนเป็นอันตราย สามารถใช้อนุกรมเรขาคณิตมาช่วยในการคำนวณได้ ตัวอย่างเช่น ผู้ป่วยที่ติดเชื้อแบคทีเรียต้องรับประทานยาปฏิชีวนะครั้งละ 1 เม็ด ขนาด 250 มิลลิกรัม วันละ 4 ครั้ง (ทุก 6 ชั่วโมง) และเมื่อเวลาผ่านไปทุก 6 ชั่วโมง ปริมาณยาในร่างกายจะลดลงเหลือร้อยละ 4 จะได้ว่า หลังจากรับประทานยาเม็ดที่ 2 จะมีปริมาณยาอยู่ในร่างกาย $250 + 250(0.04) = 260$ มิลลิกรัม หลังจากรับประทานยาเม็ดที่ 3 จะมีปริมาณยาอยู่ในร่างกาย $250 + 250(0.04) + 250(0.04)^2 = 260.4$ มิลลิกรัม และสามารถคำนวณได้ว่าหลังจากรับประทานยาเม็ดที่ 10 จะมีปริมาณยาอยู่ในร่างกาย $250 + 250(0.04) + 250(0.04)^2 + \dots + 250(0.04)^9$ มิลลิกรัม ซึ่งผลบวกที่ได้อยู่ในรูปอนุกรมเรขาคณิต มีค่าประมาณ 260.42 มิลลิกรัม จะเห็นว่าถ้าผู้ป่วยรับประทานยาติดต่อกันตามที่แพทย์สั่ง ผู้ป่วยจะมีปริมาณยาในร่างกายค่อนข้างคงที่ตลอดระยะเวลาการรักษา ซึ่งจะทำให้การรักษาเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ แต่ถ้าผู้ป่วยหยุดการรับประทานยาก่อนกำหนด อาจทำให้ปริมาณยาที่จะออกฤทธิ์ไม่เพียงพอต่อการรักษา และทำให้เชื้อแบคทีเรียสามารถปรับตัวให้ทนต่อฤทธิ์ของยาชนิดนั้นได้ กลายเป็นเชื้อแบคทีเรียที่ดื้อยา ซึ่งถ้าเกิดการติดเชื้อครั้งต่อไปก็จะไม่สามารถใช้ยาชนิดนั้นรักษาได้อีก



”



ความรู้ก่อนหน้า

- เลขยกกำลัง
- ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน



ipst.me/10550

1.1 ลำดับ

1.1.1 ความหมายของลำดับ

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

- 1) สุนัขเก็บเงินทุกเดือนเดือนละ 500 บาท เป็นเวลา 8 เดือน เขียนตารางแสดงจำนวนเงินสะสมในแต่ละเดือนได้ดังนี้

เดือนที่	1	2	3	4	5	6	7	8
จำนวนเงินสะสม (บาท)	500	1,000	1,500	2,000	2,500	3,000	3,500	4,000

จากตาราง จะเห็นว่า ความสัมพันธ์ระหว่างเดือนที่เก็บเงินกับจำนวนเงินสะสมในแต่ละเดือนเป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ และมีเรนจ์เป็น $\{500, 1000, 1500, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000\}$

- 2) จำนวนแบคทีเรียที่เพิ่มขึ้นด้วยการแบ่งเซลล์จากหนึ่งเป็นสอง โดยเริ่มต้นมีแบคทีเรียหนึ่งเซลล์และแบ่งเซลล์ทุกวินาที เขียนตารางแสดงจำนวนแบคทีเรียเมื่อเวลาผ่านไปในแต่ละวินาทีได้ดังนี้

เวลาที่ผ่านไป (วินาที)	1	2	3	4	5	6	...
จำนวนแบคทีเรีย (เซลล์)	2	4	8	16	32	64	...

จากตาราง จะเห็นว่า ความสัมพันธ์ระหว่างเวลาที่ผ่านไปกับจำนวนแบคทีเรีย ในแต่ละวินาทีเป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$ และมีเรนจ์เป็น $\{2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots\}$

ความสัมพันธ์ในข้อ 1) และ 2) เป็นความสัมพันธ์ที่มีโดเมนเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเต็มบวก และความสัมพันธ์ทั้งสองต่างก็เป็นฟังก์ชัน เรียกความสัมพันธ์เช่นนี้ว่า ลำดับ โดยให้นิยามของลำดับดังนี้

บทนิยาม 1

ลำดับ (sequence) คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ หรือมีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

ในการเขียนแสดงลำดับ จะเขียนเฉพาะสมาชิกของเรนจ์เรียงกัน กล่าวคือ ถ้า a เป็นลำดับ ซึ่ง $a(1) = a_1, a(2) = a_2, a(3) = a_3, \dots, a(n) = a_n$ แล้ว

เรียก a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของลำดับ

เรียก a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของลำดับ

เรียก a_3 ว่า พจน์ที่ 3 ของลำดับ

⋮

และเรียก a_n ว่า พจน์ที่ n ของลำดับ หรือพจน์ทั่วไปของลำดับ

เรียกลำดับที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ว่า ลำดับจำกัด (finite sequence) และเรียก

ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกว่า ลำดับอนันต์ (infinite sequence)

กรณี a เป็นลำดับจำกัด เขียนแสดงลำดับด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

กรณี a เป็นลำดับอนันต์ เขียนแสดงลำดับด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

ตัวอย่างของลำดับ

- | | |
|---|-----------------|
| 1) 7, 14, 21, 28, 35, 42 | เป็นลำดับจำกัด |
| 2) 1, 3, 5, 7, 9, ..., 99 | เป็นลำดับจำกัด |
| 3) 6, 11, 16, 21, 26, ..., $5n+1$, ... | เป็นลำดับอนันต์ |
| 4) 4, 9, 16, 25, 36, ..., $(n+1)^2$, ... | เป็นลำดับอนันต์ |

การศึกษาเรื่องลำดับต่อไปนี้จะกล่าวถึงเฉพาะลำดับซึ่งเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริงเท่านั้น และเรียกว่า ลำดับของจำนวนจริง

การเขียนแสดงลำดับ

สามารถเขียนแสดงลำดับได้หลายรูปแบบ ดังต่อไปนี้

การเขียนแสดงลำดับโดยเขียนแจกแจงพจน์ของลำดับ

ถ้าลำดับที่พิจารณาเป็นลำดับจำกัดและมีจำนวนพจน์ไม่มากนัก วิธีการกำหนดหรือเขียนแสดงลำดับจะใช้วิธีการเขียนพจน์ทั้งหมดของลำดับ ตัวอย่างเช่น

หยอดเงินลงในกระปุกออมสินวันละ 5 บาท จำนวนเงินในกระปุก 7 วันแรกสามารถเขียนเป็นลำดับได้ดังนี้ 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35

ในกรณีที่ลำดับที่พิจารณาเป็นลำดับจำกัดแต่มีจำนวนพจน์มาก อาจเขียนเพียงพจน์แรก ๆ และใช้เครื่องหมาย ... เพื่อละพจน์กลาง ๆ ไว้ แล้วเขียนพจน์สุดท้ายกำกับ ตัวอย่างเช่น

จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100 เขียนเป็นลำดับได้ดังนี้ 1, 2, 3, ..., 100

ในกรณีที่ลำดับที่พิจารณาเป็นลำดับอนันต์ จะเขียนเพียงพจน์แรก ๆ และใช้เครื่องหมาย ... เพื่อละพจน์ต่อ ๆ ไป โดยต้องเป็นที่เข้าใจตรงกันว่าพจน์ที่ละไว้หมายถึงอะไร ตัวอย่างเช่น

จำนวนแบคทีเรียที่เพิ่มขึ้นด้วยการแบ่งเซลล์จากหนึ่งเป็นสอง โดยเริ่มต้นมีแบคทีเรียหนึ่งเซลล์และแบ่งเซลล์ทุกวินาที เขียนจำนวนแบคทีเรียในวินาทีที่ 1, 2, 3, 4, 5, ... เป็นลำดับได้ดังนี้ 2, 4, 8, 16, 32, ...

การเขียนแสดงลำดับโดยเขียนพจน์ทั่วไปของลำดับ

วิธีการนี้จะเขียนลำดับในรูปสูตรของพจน์ทั่วไปของลำดับ ตัวอย่างเช่น

หยอดเงินลงในกระปุกออมสินวันละ 5 บาท เป็นเวลา 7 วัน จำนวนเงินในกระปุกในวันที่ n เขียนเป็นลำดับได้ดังนี้ $a_n = 5n$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100 เขียนเป็นลำดับได้ดังนี้ $a_n = n$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, \dots, 100\}$

จำนวนแบคที่เรียที่เพิ่มขึ้นด้วยการแบ่งเซลล์จากหนึ่งเป็นสอง โดยเริ่มต้นมีแบคที่เรียหนึ่งเซลล์และแบ่งเซลล์ทุกวินาที เขียนจำนวนแบคที่เรียในวินาทีที่ n เป็นลำดับได้ดังนี้ $a_n = 2^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

จากตัวอย่างทั้งหมดข้างต้น จะเห็นว่าการกำหนดพจน์ทั่วไปของลำดับจะทำให้ทราบทุกพจน์ในลำดับนั้น

ตัวอย่างที่ 1

จงหาสี่พจน์แรกของลำดับที่ $a_n = 3n - 2$

วิธีทำ แทน n ใน $a_n = 3n - 2$ ด้วย 1, 2, 3 และ 4 จะได้สี่พจน์แรกของลำดับดังนี้

$$a_1 = 3(1) - 2 = 1$$

$$a_2 = 3(2) - 2 = 4$$

$$a_3 = 3(3) - 2 = 7$$

$$a_4 = 3(4) - 2 = 10$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ 1, 4, 7 และ 10

ตัวอย่างที่ 2

จงหาพจน์แรกของลำดับที่ $a_n = n + (-1)^n n$

วิธีทำ แทน n ใน $a_n = n + (-1)^n n$ ด้วย 1, 2, 3, 4, 5 และ 6 จะได้พจน์แรกของลำดับดังนี้

$$a_1 = 1 + (-1)^1(1) = 0$$

$$a_2 = 2 + (-1)^2(2) = 4$$

$$a_3 = 3 + (-1)^3(3) = 0$$

$$a_4 = 4 + (-1)^4(4) = 8$$

$$a_5 = 5 + (-1)^5(5) = 0$$

$$a_6 = 6 + (-1)^6(6) = 12$$

ดังนั้น พจน์แรกของลำดับนี้ คือ 0, 4, 0, 8, 0 และ 12

ข้อสังเกต สามารถกำหนดลำดับในตัวอย่างที่ 2 ในอีกรูปแบบได้ดังนี้

$$a_n = \begin{cases} 2n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 0 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

การเขียนแสดงลำดับโดยใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิด

เมื่อกำหนดพจน์เริ่มต้นจำนวนหนึ่งพร้อมกับสูตรการหาพจน์ถัดไปจากพจน์ก่อนหน้า จะเรียกรากำหนดลำดับด้วยวิธีนี้ว่า การนิยามโดยใช้ **ความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relation)**

ตัวอย่างที่ 3

กำหนดลำดับ a_n ซึ่ง $a_1 = 2$ และ $a_n = a_{n-1} + 3$ เมื่อ $n \geq 2$ จงหาห้าพจน์แรกของลำดับนี้

วิธีทำ แทน n ใน $a_n = a_{n-1} + 3$ ด้วย 2, 3, 4 และ 5 จะได้

$$a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8$$

$$a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$$

$$a_5 = a_4 + 3 = 11 + 3 = 14$$

ดังนั้น ห้าพจน์แรกของลำดับนี้ คือ 2, 5, 8, 11 และ 14

ตัวอย่างที่ 4

กำหนดลำดับ b_n ซึ่ง $b_1 = 1$ และ $b_n = nb_{n-1}$ เมื่อ $n \geq 2$ จงหาหกพจน์แรกของลำดับนี้

วิธีทำ แทน n ใน $b_n = nb_{n-1}$ ด้วย 2, 3, 4, 5 และ 6 จะได้

$$b_2 = 2b_1 = 2(1) = 2$$

$$b_3 = 3b_2 = 3(2) = 6$$

$$b_4 = 4b_3 = 4(6) = 24$$

$$b_5 = 5b_4 = 5(24) = 120$$

$$b_6 = 6b_5 = 6(120) = 720$$

ดังนั้น หกพจน์แรกของลำดับนี้ คือ 1, 2, 6, 24, 120 และ 720

ข้อสังเกต สามารถกำหนดพจน์ทั่วไปของลำดับในตัวอย่างที่ 4 ได้เป็น $b_n = n!$



เสริมสมอง : ลำดับฟีโบนัชชีและลำดับลูคัส

ลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence) คือ ลำดับ F_n ซึ่ง $F_1 = 1, F_2 = 1$ และ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 3$ เรียกแต่ละพจน์ของลำดับฟีโบนัชชีว่า จำนวนฟีโบนัชชี (Fibonacci number) ซึ่งได้แก่ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... ส่วนลำดับลูคัส (sequence of Lucas numbers) คือ ลำดับ L_n ซึ่ง $L_1 = 1, L_2 = 3$ และ $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 3$ เรียกแต่ละพจน์ของลำดับลูคัสว่า จำนวนลูคัส (Lucas number) ซึ่งได้แก่ 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ... จะเห็นว่าลำดับฟีโบนัชชีและลำดับลูคัสเป็นลำดับที่กำหนดโดยใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิดเดียวกัน กล่าวคือ แต่ละพจน์ของลำดับได้จากผลบวกของสองพจน์ก่อนหน้า แต่การกำหนดสองพจน์แรกของลำดับทั้งสองต่างกัน ทำให้ลำดับทั้งสองแตกต่างกัน

การเขียนแสดงลำดับโดยการบอกเงื่อนไขของลำดับหรือสมบัติของพจน์ของลำดับ

ถ้าไม่ทราบสูตรของพจน์ทั่วไปของลำดับและไม่ทราบความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับแล้ว การกำหนดลำดับจำเป็นต้องใช้วิธีการบอกเงื่อนไขของลำดับหรือสมบัติของพจน์ของลำดับ ตัวอย่างเช่น

- 1) a_n เป็นจำนวนเฉพาะตัวที่ n คือลำดับ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...
- 2) b_n เป็นทศนิยมตำแหน่งที่ n ของ π คือลำดับ 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, ...



แบบฝึกหัด 1.1.1

1. จงหาสี่พจน์แรกของลำดับต่อไปนี้

$$1) a_n = 2n + 5$$

$$2) a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$3) a_n = (-2)^n$$

$$4) a_n = \frac{n+1}{n}$$

$$5) a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$$

$$6) a_n = \frac{2^n}{3^n}$$

$$7) a_n = (n-1)(n+1)$$

$$8) a_n = n(n-1)(n-2)$$

2. จงหาหำพจน์แรกของลำดับ a_n ที่กำหนดโดยใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิดต่อไปนี้

- 1) $a_1 = 0$ และ $a_n = a_{n-1} + n - 1$ เมื่อ $n \geq 2$
- 2) $a_1 = 1,000$ และ $a_n = 1 + (0.05)a_{n-1}$ เมื่อ $n \geq 2$
- 3) $a_1 = 2$ และ $a_n = 6a_{n-1}$ เมื่อ $n \geq 2$
- 4) $a_1 = 1, a_2 = 2$ และ $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 3$
- 5) $a_1 = 2, a_2 = 0$ และ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 3$

3. จงหาเจ็ดพจน์แรกของลำดับของจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 2 และ 7 ลงตัว โดยเรียงจากน้อยไปมาก

1.1.2 ลำดับเลขคณิต

พิจารณาลำดับ 4, 6, 8, 10, 12 จะเห็นว่าแต่ละพจน์ได้จากการบวกพจน์ก่อนหน้าที่อยู่ติดกันด้วย 2 หรือพจน์หลังลบด้วยพจน์หน้าที่อยู่ติดกันเป็นค่าคงตัวเท่ากับ 2 เสมอ นั่นคือ $6 - 4 = 8 - 6 = 10 - 8 = 12 - 10 = 2$ เรียกลำดับที่มีสมบัติเช่นนี้ว่า ลำดับเลขคณิต

บทนิยาม 2

ลำดับเลขคณิต (arithmetic sequence) คือ ลำดับซึ่งมีผลต่างที่ได้จากการนำพจน์ที่ $n + 1$ ลบด้วยพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และเรียกค่าคงตัวที่เป็นผลต่างนี้ว่า **ผลต่างร่วม (common difference)**

จากบทนิยาม ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ จะเป็นลำดับเลขคณิต ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงตัว d ที่ $a_{n+1} - a_n = d$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่างของลำดับเลขคณิต

- 1) 5, 10, 15, 20, 25, ..., $5n$, ... ลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิตที่มี 5 เป็นผลต่างร่วม
- 2) 1, 1, 1, 1, 1, ... ลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิตที่มี 0 เป็นผลต่างร่วม
- 3) 5, 3, 1, -1, -3, ... ลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิตที่มี -2 เป็นผลต่างร่วม

นอกจากนี้ยังสามารถกำหนดลำดับเลขคณิต $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ได้ดังนี้ จาก $a_{n+1} - a_n = d$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า $a_{n+1} = a_n + d$ ให้ a_1 และ d เป็นค่าคงตัว จะได้

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$ เมื่อ a_1 เป็นพจน์แรก และ d เป็นผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 5

จงเขียนสี่พจน์ถัดไปของลำดับเลขคณิต -1, 6, 13, ...

วิธีทำ จากลำดับเลขคณิต -1, 6, 13, ... ถ้าให้ d เป็นผลต่างร่วม

จะได้ $d = 6 - (-1) = 7$ และเนื่องจาก $a_3 = 13$

จะได้ $a_4 = a_3 + d = 13 + 7 = 20$

$$a_5 = a_4 + d = 20 + 7 = 27$$

$$a_6 = a_5 + d = 27 + 7 = 34$$

$$a_7 = a_6 + d = 34 + 7 = 41$$

ดังนั้น สี่พจน์ถัดไปของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 20, 27, 34 และ 41

ตัวอย่างที่ 6

ถ้าลำดับเลขคณิตมี $a_1 = 22$ และ $a_2 = 35$ จงหาพจน์ที่ 100 ของลำดับนี้

วิธีทำ เนื่องจาก $a_1 = 22$ และ $a_2 = 35$ ดังนั้น ผลต่างร่วม คือ $d = 35 - 22 = 13$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d \text{ จะได้ } a_{100} = 22 + (100-1)(13) = 1,309$$

นั่นคือ พจน์ที่ 100 ของลำดับนี้ คือ 1,309

ตัวอย่างที่ 7

จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต 6, 2, -2, -6, ...

วิธีทำ จากลำดับเลขคณิต 6, 2, -2, -6, ... จะได้ $a_1 = 6$ และ $d = 2 - 6 = -4$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้ } a_n = 6 + (n-1)(-4)$$

$$= 6 - 4n + 4$$

$$= 10 - 4n$$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $10 - 4n$

ตัวอย่างที่ 8

ถ้าลำดับเลขคณิตมีพจน์ที่ 5 คือ 3 และพจน์ที่ 10 คือ 13 จงหาพจน์ที่ 100

วิธีทำ จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\text{จะได้ } 3 = a_1 + (5-1)d \quad \text{----- (1)}$$

$$\text{และ } 13 = a_1 + (10-1)d \quad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $d = 2$ และ $a_1 = -5$

$$\text{ดังนั้น } a_{100} = -5 + (100-1)(2) = 193$$

นั่นคือ พจน์ที่ 100 ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 193

ตัวอย่างที่ 9

ถ้า 6 และ 10 เป็นพจน์สองพจน์ของลำดับเลขคณิตที่มีพจน์อีกหนึ่งพจน์อยู่ระหว่างพจน์ทั้งสองนี้ จงหาพจน์ที่อยู่ระหว่างพจน์ทั้งสองนี้

วิธีทำ ให้ a เป็นพจน์ที่อยู่ระหว่าง 6 และ 10 จะได้ 6, a , 10 เป็นลำดับเลขคณิต

$$\text{นั่นคือ } a - 6 = 10 - a$$

$$2a = 16$$

$$a = 8$$

ดังนั้น พจน์ที่อยู่ระหว่าง 6 และ 10 คือ 8

ตัวอย่างที่ 10

จงหาว่าจำนวนนับที่มากกว่า 7 แต่น้อยกว่า 1,610 ซึ่งหารด้วย 6 ลงตัว มีทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ จำนวนนับที่น้อยที่สุดที่มากกว่า 7 ซึ่งหารด้วย 6 ลงตัว คือ 12

เนื่องจาก 1,610 หารด้วย 6 ได้ผลหารเป็น 268 และได้เศษเป็น 2 ดังนั้น จำนวนนับที่มากที่สุดที่น้อยกว่า 1,610 ซึ่งหารด้วย 6 ลงตัว คือ $1,610 - 2$ หรือ 1,608

จะได้ว่าลำดับของจำนวนนับที่มากกว่า 7 แต่น้อยกว่า 1,610 ซึ่งหารด้วย 6 ลงตัว เป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 12 ผลต่างร่วมเป็น 6 และพจน์ที่ n เป็น 1,608

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้ } 1,608 = 12 + (n-1)(6)$$

$$1,608 = 12 + 6n - 6$$

$$6n = 1,602$$

$$n = 267$$

ดังนั้น จำนวนนับที่มากกว่า 7 แต่น้อยกว่า 1,610 ซึ่งหารด้วย 6 ลงตัว มีทั้งหมด 267 จำนวน

ตัวอย่างที่ 11

นภาเริ่มต้นทำงานที่บริษัทแห่งหนึ่ง ในปีแรก นภาได้รับเงินเดือนเดือนละ 15,000 บาท ถ้านภาได้รับเงินเดือนเพิ่มขึ้นปีละ 300 บาท จงหาว่าในอีก 10 ปีข้างหน้า นภาจะได้รับเงินเดือนเดือนละเท่าใด

วิธีทำ เขียนลำดับเลขคณิตแทนเงินเดือนที่นภาได้รับแต่ละปีได้ดังนี้
15000, 15300, 15600, ..., a_{11}

ลำดับที่ได้เป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 15,000 และมีผลต่างร่วมเป็น 300

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้ } a_{11} = 15,000 + (11-1)(300) = 18,000$$

ดังนั้น ในอีก 10 ปีข้างหน้า นภาจะได้รับเงินเดือนเดือนละ 18,000 บาท ■

ตัวอย่างที่ 12

กำหนดลำดับเลขคณิต 1, 4, 7, 10, 13, ... จงพิจารณาว่า 12,345 อยู่ในลำดับนี้หรือไม่

วิธีทำ ลำดับเลขคณิตที่กำหนดให้มีพจน์แรกเป็น 1 และมีผลต่างร่วมเป็น 3

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d \text{ จะได้ } a_1 = 1 \text{ และ } d = 3$$

ถ้า 12,345 เป็นพจน์ของลำดับนี้ จะได้ว่าเมื่อแทน a_n ใน $a_n = a_1 + (n-1)d$

ด้วย 12,345 แล้ว n ต้องเป็นจำนวนเต็มบวก

$$\text{จะได้ } 12,345 = 1 + (n-1)(3)$$

$$= 1 + 3n - 3$$

$$= 3n - 2$$

$$\text{นั่นคือ } n = \frac{12,345 + 2}{3} = 4,115\frac{2}{3} \text{ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็มบวก}$$

ดังนั้น 12,345 ไม่อยู่ในลำดับนี้ ■



แบบฝึกหัด 1.1.2

1. จงหาสี่พจน์แรกของลำดับเลขคณิต เมื่อกำหนดให้

1) $a_1 = 2$ และ $d = 4$

2) $a_1 = 3$ และ $d = 5$

3) $a_1 = -3$ และ $d = 3$

4) $a_1 = -4$ และ $d = 2$

5) $a_1 = 5$ และ $d = -2$

6) $a_1 = -3$ และ $d = -4$

7) $a_1 = \frac{1}{2}$ และ $d = \frac{1}{2}$

8) $a_1 = \frac{5}{2}$ และ $d = -\frac{3}{2}$

2. จงหาพจน์ของลำดับเลขคณิตที่กำหนดในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) a_3 เมื่อกำหนดให้ $a_1 = 4$ และ $d = 3$

2) a_{12} เมื่อกำหนดให้ $a_1 = 7$ และ $d = -3$

3) a_{20} เมื่อกำหนดให้ $a_1 = \frac{4}{5}$ และ $d = -1$

4) a_{11} เมื่อกำหนดให้ $a_1 = 4$ และ $d = \frac{1}{2}$

3. จงหาพจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิตต่อไปนี้

1) $-2, 4, 10, \dots$

2) $-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \dots$

3) $11, \frac{27}{2}, 16, \dots$

4) $19.74, 22.54, 25.34, \dots$

5) $x, x+2, x+4, \dots$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

6) $3a+2b, 2a+4b, a+6b, \dots$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

4. จงหาพจน์ที่ขาดหายไปของลำดับเลขคณิตต่อไปนี้

1) $13, 25, _, _, _$

2) $18, _, 11, _, _$

3) $13, _, _, _, 33, _$

4) $_, _, 100, _, _, 142, _$

5. จงหาพจน์ที่ 15 ของลำดับเลขคณิต 3, 8, 13, 18, 23, ...
6. จงหาพจน์ที่ 20 และพจน์ที่ 50 ของลำดับเลขคณิตที่มีพจน์ที่ n เป็น $-n-3$
7. จงหาพจน์แรกของลำดับเลขคณิตที่มี $a_6 = 12$ และ $a_{10} = 16$
8. จงหาพจน์ที่ 25 ของลำดับเลขคณิตที่มี $a_3 = 20$ และ $a_7 = 32$
9. จงหา a_n และ d ของลำดับเลขคณิตที่มี $a_2 = 16$ และ $a_{12} = 116$
10. -176 เป็นพจน์ที่เท่าใดของลำดับเลขคณิต $-1, -6, -11, \dots$
11. ถ้า 39 และ 51 เป็นพจน์สองพจน์ของลำดับเลขคณิตที่มีพจน์อีกหนึ่งพจน์อยู่ระหว่างพจน์ทั้งสองนี้ จงหาพจน์ที่อยู่ระหว่างพจน์ทั้งสองนี้
12. จงหาว่าจำนวนนับที่อยู่ระหว่าง 100 ถึง 1,000 ซึ่งหารด้วย 13 ลงตัว มีทั้งหมดกี่จำนวน
13. ถ้าสามพจน์แรกของลำดับเลขคณิต คือ $a, 6a+2$ และ $8a+1$ จงหา a และพจน์ทั่วไปของลำดับนี้
14. ถ้าผลบวกของสามพจน์แรกของลำดับเลขคณิต คือ 12 และผลบวกของกำลังสามของแต่ละพจน์ของทั้งสามพจน์นี้ คือ 408 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับนี้
15. สมศักดิ์ทำงานที่บริษัทแห่งหนึ่งได้รับเงินเดือนเดือนละ 25,000 บาท และได้รับเงินเดือนเพิ่มขึ้นปีละ 1,000 บาท จงหาว่าเมื่อสมศักดิ์ทำงานได้ 6 ปี เขาจะได้รับเงินเดือนเดือนละเท่าใด

16. บริษัทขายรถยนต์แห่งหนึ่งรับซื้อรถยนต์คืนจากผู้ซื้อ โดยจะซื้อรถยนต์ที่ใช้แล้ว 1 ปี ในราคาที่ต่ำกว่าราคาที่บริษัทขาย 100,000 บาท สำหรับรถยนต์ที่ใช้แล้วเกิน 1 ปี ราคาซื้อคืนจะลดลงอีกปีละ 70,000 บาท ถ้าซื้อรถยนต์จากบริษัทนี้มาในราคาหนึ่งล้านบาท จงหาว่าเมื่อใช้รถยนต์ไปแล้ว 5 ปี บริษัทจะรับซื้อรถยนต์คืนในราคาที่ต่ำกว่าราคาที่ซื้อจากบริษัทเท่าใด

1.1.3 ลำดับเรขาคณิต

พิจารณาลำดับ 2, 6, 18, 54, 162 จะเห็นว่าแต่ละพจน์ได้จากการคูณพจน์ก่อนหน้าที่อยู่ติดกันด้วย 3 หรืออัตราส่วนของพจน์หลังต่อพจน์หน้าที่อยู่ติดกันเป็นค่าคงตัวเท่ากับ 3 เสมอ นั่นคือ

$$\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = \frac{162}{54} = 3 \text{ เรียกลำดับที่มีสมบัติเช่นนี้ว่า ลำดับเรขาคณิต}$$

บทนิยาม 3

ลำดับเรขาคณิต (geometric sequence) คือ ลำดับซึ่งมีอัตราส่วนของพจน์ที่ $n+1$ ต่อพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และเรียกค่าคงตัวที่เป็นอัตราส่วนนี้ว่า **อัตราส่วนร่วม (common ratio)**

จากบทนิยาม ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิต ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงตัว r ที่ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่างของลำดับเรขาคณิต

- 1) $1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}, \dots$ ลำดับนี้เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี 2 เป็นอัตราส่วนร่วม
- 2) $-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$ ลำดับนี้เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี -1 เป็นอัตราส่วนร่วม
- 3) $16, 8, 4, 2, 1, \dots$ ลำดับนี้เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี $\frac{1}{2}$ เป็นอัตราส่วนร่วม
- 4) $-1, 4, -16, 64, -256, \dots$ ลำดับนี้เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี -4 เป็นอัตราส่วนร่วม

สามารถกำหนดลำดับเรขาคณิต $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ได้ดังนี้

จาก $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า $a_{n+1} = a_n r$

ให้ a_1 และ r เป็นค่าคงตัว จะได้

$$a_2 = a_1 r$$

$$a_3 = a_2 r = (a_1 r) r = a_1 r^2$$

$$a_4 = a_3 r = (a_1 r^2) r = a_1 r^3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} r = (a_1 r^{n-2}) r = a_1 r^{n-1}$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$ เมื่อ a_1 เป็นพจน์แรก และ r เป็นอัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิต

ตัวอย่างที่ 13

จงหาสี่พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตที่มี $\frac{3}{4}$ เป็นพจน์แรก และ 4 เป็นอัตราส่วนร่วม

วิธีทำ ให้ $a_1 = \frac{3}{4}$ และ $r = 4$

$$\text{จะได้ } a_2 = a_1 r = \frac{3}{4}(4) = 3$$

$$a_3 = a_2 r = 3(4) = 12$$

$$a_4 = a_3 r = 12(4) = 48$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{3}{4}, 3, 12$ และ 48

ตัวอย่างที่ 14

จงหาพจน์ที่ 7 ของลำดับเรขาคณิต $4, 20, 100, \dots$

วิธีทำ จากลำดับเรขาคณิต $4, 20, 100, \dots$ จะได้ $a_1 = 4$ และ $r = \frac{20}{4} = 5$

$$\text{จาก } a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\text{จะได้ } a_7 = 4(5^{7-1})$$

$$= 4(5^6)$$

$$= 4(15,625)$$

$$= 62,500$$

ดังนั้น พจน์ที่ 7 ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ 62,500

ตัวอย่างที่ 15

จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต $8, 16, 32, 64, \dots$

วิธีทำ จากลำดับเรขาคณิต $8, 16, 32, 64, \dots$ จะได้ $a_1 = 8$ และ $r = \frac{16}{8} = 2$

$$\text{จาก } a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\text{จะได้ } a_n = 8(2^{n-1})$$

$$= 2^3(2^{n-1})$$

$$= 2^{n+2}$$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ 2^{n+2}

ตัวอย่างที่ 16

ถ้า 6 และ 24 เป็นพจน์สองพจน์ของลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์อีกหนึ่งพจน์อยู่ระหว่างพจน์ทั้งสองนี้ จงหาพจน์ที่อยู่ระหว่างพจน์ทั้งสองนี้ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

วิธีทำ ให้ a เป็นพจน์ที่อยู่ระหว่าง 6 และ 24 จะได้ 6, a , 24 เป็นลำดับเรขาคณิต

$$\text{ซึ่ง } \frac{a}{6} = \frac{24}{a}$$

$$a^2 = 144$$

$$\text{จะได้ } a = 12 \text{ หรือ } a = -12$$

ดังนั้น พจน์ที่อยู่ระหว่าง 6 และ 24 คือ 12 หรือ -12

ตัวอย่างที่ 17

จงหา a , b และ c ของลำดับเรขาคณิต $8, a, b, c, \frac{1}{2}, \dots$

วิธีทำ จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$\text{จะได้ } \frac{1}{2} = 8r^{5-1}$$

$$\frac{1}{16} = r^4$$

$$\text{นั่นคือ } r = \frac{1}{2} \text{ หรือ } r = -\frac{1}{2}$$

ดังนั้น เมื่ออัตราส่วนร่วมเป็น $\frac{1}{2}$ จะได้ a, b และ c คือ $8\left(\frac{1}{2}\right)^1, 8\left(\frac{1}{2}\right)^2, 8\left(\frac{1}{2}\right)^3$

หรือ 4, 2 และ 1 ตามลำดับ

และเมื่ออัตราส่วนร่วมเป็น $-\frac{1}{2}$ จะได้ a, b และ c คือ $8\left(-\frac{1}{2}\right)^1, 8\left(-\frac{1}{2}\right)^2, 8\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

หรือ -4, 2 และ -1 ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 18

ในเมืองหนึ่งมีประชากรอาศัยอยู่ 100,000 คน ถ้าจำนวนประชากรในเมืองนี้เพิ่มขึ้น 2% ทุกปี ในอีก 10 ปีข้างหน้า จะมีจำนวนประชากรในเมืองนี้ประมาณกี่คน

วิธีทำ พิจารณาจำนวนประชากรใน 2 ปีแรก ดังนี้

เริ่มต้น	ครบ 1 ปี	ครบ 2 ปี
100,000	ประชากรเดิม + ประชากรที่เพิ่ม $100,000 + 100,000(0.02)$ $= 100,000(1 + 0.02)$ $= 100,000(1.02)$	ประชากรเดิม + ประชากรที่เพิ่ม $100,000(1.02) + 100,000(1.02)(0.02)$ $= 100,000(1.02)(1 + 0.02)$ $= 100,000(1.02)(1.02)$ $= 100,000(1.02)^2$

จะเห็นว่าเมื่อนำจำนวนประชากรในแต่ละปีมาเขียนเรียงตามลำดับ จะเป็นลำดับเรขาคณิตที่มี 1.02 เป็นอัตราส่วนร่วม ดังนี้

$$100000, 100000(1.02), 100000(1.02)^2, \dots$$

ดังนั้น จำนวนประชากรเมื่อครบปีที่ 10 คือ พจน์ที่ 11 ของลำดับนี้

$$\text{จาก } a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\text{จะได้ } a_{11} = 100,000(1.02)^{11-1}$$

$$= 100,000(1.02)^{10}$$

$$\approx 100,000(1.218994)$$

$$\approx 121,899$$

นั่นคือ ในอีก 10 ปีข้างหน้า เมืองนี้จะมีประชากรประมาณ 121,899 คน



แบบฝึกหัด 1.1.3

1. จงพิจารณาว่าลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นลำดับเลขคณิตหรือลำดับเรขาคณิต ถ้าเป็นลำดับเลขคณิต จงหาผลต่างร่วม ถ้าเป็นลำดับเรขาคณิต จงหาอัตราส่วนร่วม

1) $7, 9, 11, 13, \dots, 2n+5$ 2) $6, -6, 6, -6, \dots, 6(-1)^{n-1}$

3) $4, 2, 0, -2, \dots, 6-2n$ 4) $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots, 9\left(\frac{1}{3}\right)^n$

5) $-\frac{1}{4}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{7}, \dots, -\frac{n}{n+3}$

2. จงหาสามพจน์ถัดไปของลำดับเรขาคณิตต่อไปนี้

1) $1, 7, 49, 343, \dots$

2) $-1, 2, -4, 8, \dots$

3) $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$

3. จงหาพจน์ที่ 9 ของลำดับเรขาคณิต $2, 4, 8, 16, \dots$

4. จงหาพจน์ที่ 11 ของลำดับเรขาคณิต $2, -10, 50, -250, \dots$

5. จงหาพจน์ที่ 8 ของลำดับเรขาคณิต $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \dots$

6. จงหาพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตต่อไปนี้

1) $-3, -6, -12, \dots$ 2) $10, -5, \frac{5}{2}, \dots$

3) $\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{25}{4}, \dots$ 4) $\frac{5}{6}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \dots$

5) $-\frac{2}{9}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{32}, \dots$ 6) $2, 2\sqrt{3}, 6, \dots$

7) $-1, 0.3, -0.09, \dots$

8) $ab^3, a^2b^2, a^3b, \dots$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์

7. จงหาพจน์แรกของลำดับเรขาคณิตที่มี 16 เป็นพจน์ที่ห้า และ 2 เป็นอัตราส่วนร่วม

8. จงหาอัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตที่มี $a_3 = 12$ และ $a_6 = 96$

9. 162 เป็นพจน์ที่เท่าใดของลำดับเรขาคณิต $2, -6, 18, \dots$

10. จงหาพจน์ที่ขาดหายไปของลำดับเรขาคณิตต่อไปนี้

1) $4, 1, _, _, _$

2) $2, _, \frac{2}{9}, _, _$

3) $\frac{3}{7}, _, _, _, \frac{3}{343}, _$

4) $_, _, 1, _, _, \frac{8}{27}, _$

11. จงหาพจน์ที่อยู่ระหว่างพจน์สองพจน์ของลำดับเรขาคณิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) 5 และ 20

2) 8 และ 12

12. ถ้าสามพจน์แรกของลำดับเรขาคณิต คือ $a+3, a+20$ และ $a+105$ จงหา a และพจน์ทั่วไปของลำดับนี้

13. ใน พ.ศ. 2550 อำเภอหนึ่งมีประชากร 60,000 คน ถ้าประชากรในอำเภอนี้เพิ่มขึ้นปีละ 2% จงหาสูตรการคำนวณจำนวนประชากรในแต่ละปี พร้อมทั้งหาจำนวนประชากรใน พ.ศ. 2565

14. เมื่อปล่อยลูกบอลที่มีความสูง 2 เมตร จากระดับพื้นดิน แล้วในแต่ละครั้งที่ลูกบอลกระทบพื้น ลูกบอลจะกระดอนขึ้น โดยความสูงของลูกบอลจากระดับพื้นดินจะลดลง 8% จงเขียนฟังก์ชันแสดงความสูงของลูกบอล เมื่อลูกบอลกระทบพื้นไป n ครั้ง

1.1.4 ลำดับฮาร์มอนิก

บทนิยาม 4

ลำดับฮาร์มอนิก (harmonic sequence) คือ ลำดับ a_n ซึ่งมีสมบัติว่า ลำดับของส่วนกลับ $b_n = \frac{1}{a_n}$ เป็นลำดับเลขคณิต

ลำดับฮาร์มอนิกจะศึกษาผ่านลำดับของส่วนกลับซึ่งเป็นลำดับเลขคณิต ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 19

จงแสดงว่าลำดับที่ $a_n = \frac{2}{3n}$ เป็นลำดับฮาร์มอนิก

วิธีทำ กำหนด $b_n = \frac{1}{a_n}$ จะได้ว่า $b_n = \frac{3n}{2}$

$$\text{สังเกตว่า } b_{n+1} - b_n = \frac{3(n+1)}{2} - \frac{3n}{2} = \frac{3}{2}$$

ดังนั้น ลำดับ b_n เป็นลำดับเลขคณิต นั่นคือ ลำดับ a_n เป็นลำดับฮาร์มอนิก

ตัวอย่างที่ 20

กำหนด a_n เป็นลำดับฮาร์มอนิกซึ่ง $a_2 = \frac{1}{3}$ และ $a_3 = \frac{1}{5}$ จงหา a_1

วิธีทำ กำหนด $b_n = \frac{1}{a_n}$ จะได้ว่า b_n เป็นลำดับเลขคณิต

$$\text{จาก } b_2 = \frac{1}{a_2} = 3 \text{ และ } b_3 = \frac{1}{a_3} = 5$$

ดังนั้น ผลต่างร่วมของลำดับ b_n คือ $d = 5 - 3 = 2$

$$\text{จาก } b_2 = b_1 + d \text{ จะได้ } b_1 = b_2 - d = 3 - 2 = 1$$

$$\text{นั่นคือ } a_1 = \frac{1}{b_1} = \frac{1}{1} = 1$$



แบบฝึกหัด 1.1.4

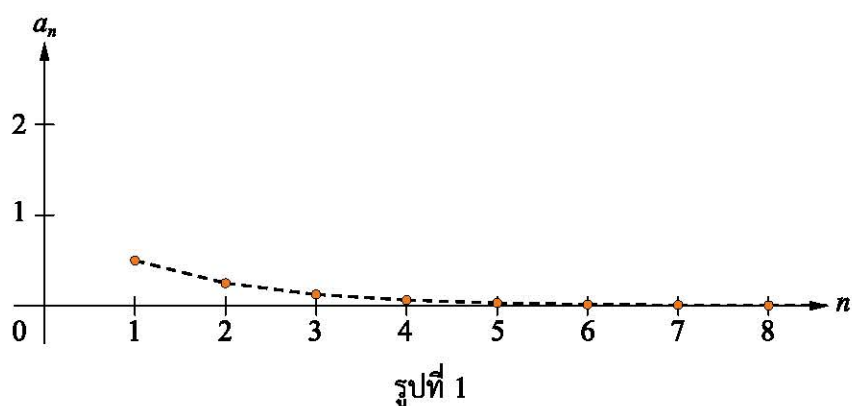
1. ให้ a_n เป็นลำดับฮาร์มอนิกซึ่ง $a_3 = 3$ และ $a_6 = 6$ จงหา $a_4 + a_5$
2. จงพิจารณาว่าลำดับ $\log_2 3, \log_4 3, \log_8 3, \dots, \log_{2^n} 3, \dots$ เป็นลำดับฮาร์มอนิกหรือไม่
3. ให้ a_n เป็นลำดับฮาร์มอนิกซึ่ง $a_1 = 1$ และ $a_2 + a_3 = 1$ จงหาค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ a_2

1.2 ลิมิตของลำดับอนันต์

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสมบัติบางประการของลำดับ โดยจะพิจารณาพจน์ที่ n ของลำดับ เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด

1) พิจารณากราฟของลำดับ เมื่อ $a_n = \frac{1}{2^n}$ ในรูปที่ 1

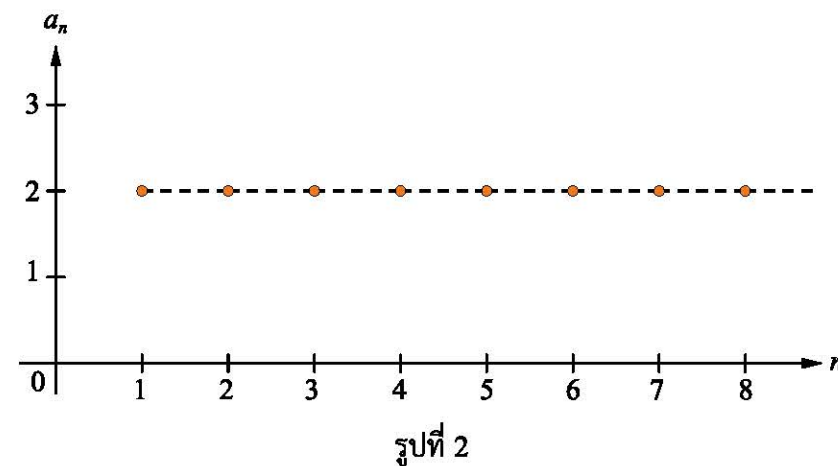
n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	...



จากกราฟในรูปที่ 1 จะเห็นว่า ถ้า n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว a_n จะลดลงและเข้าใกล้ 0 แต่จะไม่เท่ากับ 0

หมายเหตุ จะใช้เส้นประเพื่อแสดงให้เห็นแนวของจุด แต่เส้นประมิใช่ส่วนหนึ่งของกราฟของลำดับ

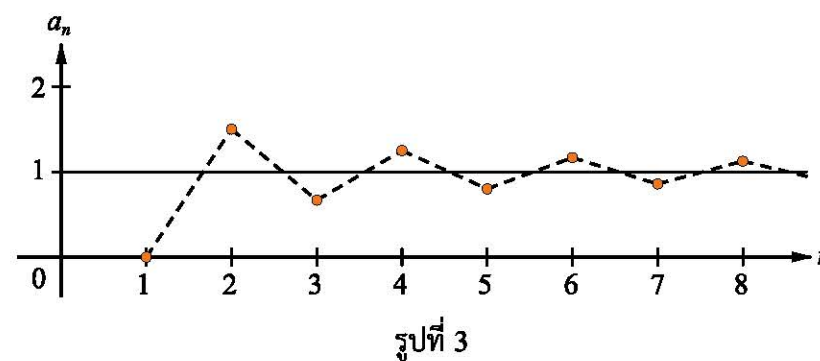
2) พิจารณากราฟของลำดับ เมื่อ $a_n = 2$ ในรูปที่ 2



จากกราฟในรูปที่ 2 จะเห็นว่า a_n เป็น 2 เสมอ สำหรับทุก n เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด

3) พิจารณากราฟของลำดับ เมื่อ $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ ในรูปที่ 3

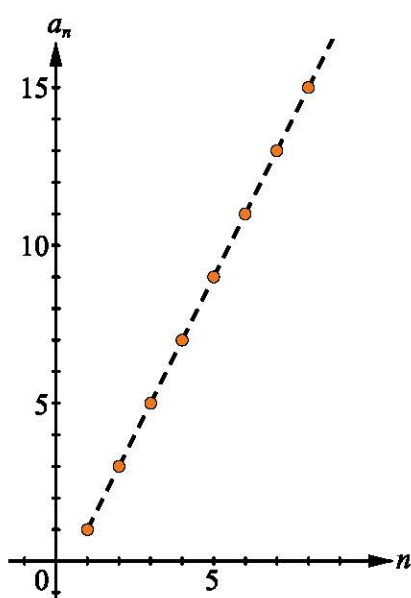
n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{9}{8}$	...



จากกราฟในรูปที่ 3 จะเห็นว่าแนวของจุดในกราฟจะเข้าใกล้เส้นตรง $y=1$ ซึ่งหมายความว่าเมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n จะเข้าใกล้ 1 แต่จะไม่เท่ากับ 1

4) พิจารณากราฟของลำดับ เมื่อ $a_n = 2n - 1$ ในรูปที่ 4

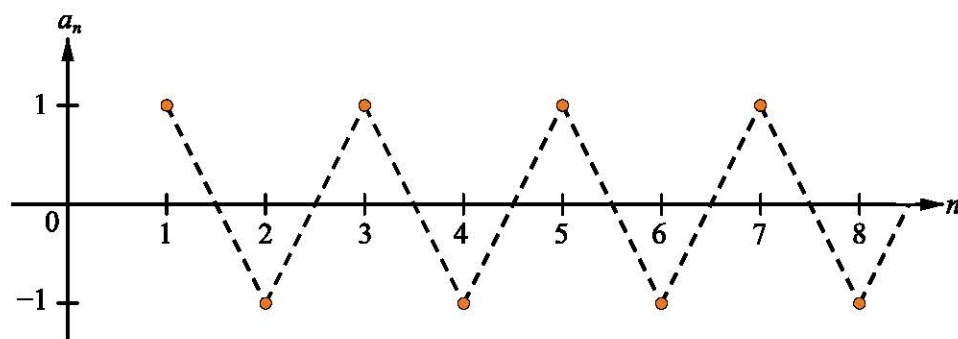
n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	1	3	5	7	9	11	13	15	...



รูปที่ 4

จากกราฟในรูปที่ 4 จะเห็นว่า เมื่อ n มากขึ้น โดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับจะมากขึ้น และไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง

5) พิจารณากราฟของลำดับ เมื่อ $a_n = (-1)^{n+1}$ ในรูปที่ 5



รูปที่ 5

จากกราฟในรูปที่ 5 จะเห็นว่า เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ พจน์ที่ n เป็น 1 และเมื่อ n เป็นจำนวนคู่ พจน์ที่ n เป็น -1 ดังนั้น เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับนี้ จึงไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง

บทนิยาม 5

ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับอนันต์ ถ้า n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว a_n เข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น จะเขียน $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ (อ่านว่า ลิมิตของลำดับ a_n เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด เท่ากับ L) และจะเรียก L ว่า **ลิมิตของลำดับ (limit of a sequence)** และกล่าวว่าลำดับนี้มีลิมิตเท่ากับ L เรียกลำดับอนันต์ที่มีลิมิตว่า **ลำดับลู่เข้า (convergent sequence)** และเรียกลำดับอนันต์ที่ไม่ใช่ลำดับลู่เข้าว่า **ลำดับลู่ออก (divergent sequence)**

เมื่อพิจารณาลำดับในข้อ 1) ถึง 5) จะได้ว่า

ในข้อ 1) ลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{1}{2^n}$ เป็น 0 และลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า

ในข้อ 2) ลิมิตของลำดับ $a_n = 2$ เป็น 2 และลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า

ในข้อ 3) ลิมิตของลำดับ $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ เป็น 1 และลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า

ในข้อ 4) เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว $a_n = 2n - 1$ ไม่เข้าใกล้จำนวนจริงใด จะกล่าวว่าลิมิตของลำดับ $a_n = 2n - 1$ ไม่มีค่า ลำดับนี้จึงไม่ใช่ลำดับลู่เข้า ดังนั้น ลำดับ $a_n = 2n - 1$ เป็นลำดับลู่ออก

ในข้อ 5) เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว $a_n = (-1)^{n+1}$ ไม่เข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียว จะกล่าวว่าลิมิตของลำดับ $a_n = (-1)^{n+1}$ ไม่มีค่า ดังนั้น ลำดับนี้จึงเป็นลำดับลู่ออก และจะเรียกลำดับลู่ออกที่มีลักษณะของกราฟขึ้นและลงสลับกันโดยไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่งเช่นนี้ว่า **ลำดับแกว่งกวัด (oscillating sequence)**

เสริมสมอง : ค่าคงตัว e

e ซึ่งเป็นจำนวนอตรรกยะ มีค่าประมาณ 2.71828 นั้น ได้รับการค้นพบโดย Jacob Bernoulli ใน ค.ศ. 1683 ในขณะที่เขากำลังศึกษาเรื่องดอกเบี้ยทบต้น โดยถ้ากำหนดลำดับ $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ จะได้ว่า $a_1 = 2$, $a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$, $a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \approx 2.3704$ และเมื่อ n มากขึ้นเรื่อย ๆ จะได้ $a_{1,000} \approx 2.7169$, $a_{10,000} \approx 2.7181$, $a_{100,000} \approx 2.7183$ และเมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว ลำดับ a_n จะเข้าสู่ค่า 2.718281828459... นั่นคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

ตัวอย่างที่ 21

จงหาลิมิตของลำดับ เมื่อ

$$1) a_n = \frac{1}{n^2}$$

$$2) a_n = n^3$$

วิธีทำ 1) จาก $a_n = \frac{1}{n^2}$ เขียนลำดับได้เป็น $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$

จะเห็นว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับจะลดลงและเข้าใกล้ 0

$$\text{ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

2) จาก $a_n = n^3$ เขียนลำดับได้เป็น $1, 8, 27, 64, \dots, n^3, \dots$

จะเห็นว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับจะมากขึ้นและไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง

$$\text{ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \text{ ไม่มีค่า}$$

ลิมิตของลำดับในตัวอย่างที่ 21 สอดคล้องกับทฤษฎีบทต่อไปนี้ ทั้งนี้ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับในบทนี้จะนำไปใช้โดยขอละการพิสูจน์ไว้

ทฤษฎีบท 1

ให้ r เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r$ ไม่มีค่า

ตัวอย่างที่ 22

จงหาลิมิตของลำดับ เมื่อ

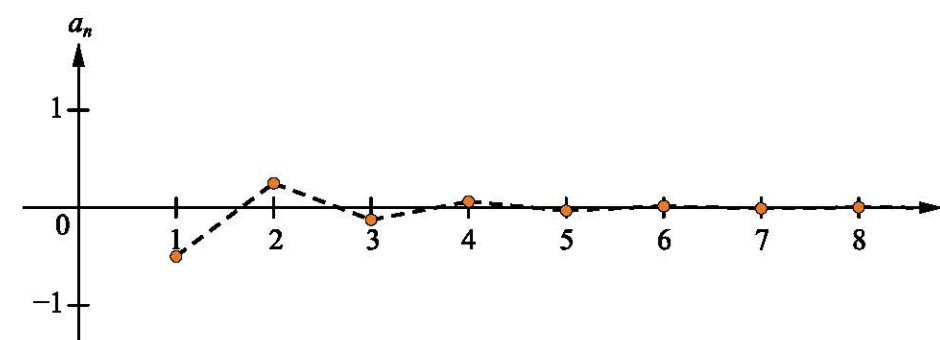
$$1) a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$2) a_n = \left(-\frac{5}{4}\right)^n$$

$$3) a_n = 2^n$$

วิธีทำ 1) จาก $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ เขียนลำดับได้เป็น $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \dots$

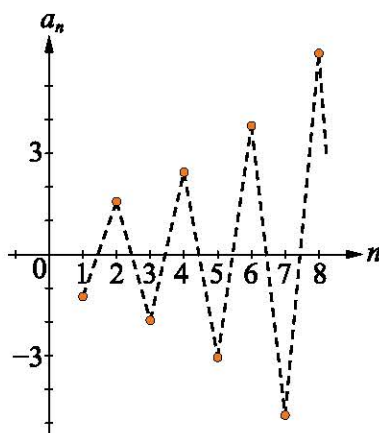
เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



$$\text{จากกราฟ จะได้ว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

2) จาก $a_n = \left(-\frac{5}{4}\right)^n$ เขียนลำดับได้เป็น $-\frac{5}{4}, \frac{25}{16}, -\frac{125}{64}, \dots, \left(-\frac{5}{4}\right)^n, \dots$

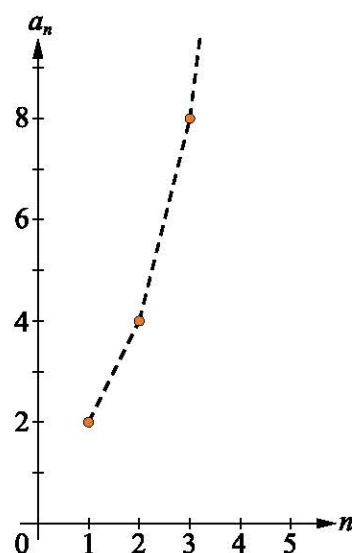
เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



จากกราฟ จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{5}{4}\right)^n$ ไม่มีค่า

3) จาก $a_n = 2^n$ เขียนลำดับได้เป็น $2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$

เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



จากกราฟ จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n$ ไม่มีค่า

ลิมิตของลำดับในตัวอย่างที่ 22 สอดคล้องกับทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2

ให้ r เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

ถ้า $|r| < 1$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$

ถ้า $|r| > 1$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ ไม่มีค่า

ทฤษฎีบท 3

ให้ a_n, b_n, t_n เป็นลำดับของจำนวนจริง A, B เป็นจำนวนจริง และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ โดยที่

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ จะได้ว่า

1. ถ้า $t_n = c$ ทุกจำนวนเต็มบวก n แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c = c$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = cA$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A + B$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A - B$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = AB$

6. ถ้า $b_n \neq 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n และ $B \neq 0$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{B}$

ตัวอย่างที่ 23

จงหาลิมิตของลำดับ เมื่อ $a_n = 5$

วิธีทำ เนื่องจาก 5 เป็นค่าคงตัว ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} 5 = 5$

ตัวอย่างที่ 24

จงหาขีดจำกัดของลำดับ เมื่อ $a_n = \frac{5}{n}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} &= 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ &= 5(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 25

จงหาขีดจำกัดของลำดับ เมื่อ $a_n = \frac{4-3n+n^2}{2n^3-3n^2+5}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-3n+n^2}{2n^3-3n^2+5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(\frac{4}{n^3} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n} \right)}{n^3 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^3} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{n^3} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n}}{2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^3}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^3} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^3}} \\ &= \frac{0-0+0}{2-0+0} \\ &= 0\end{aligned}$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 25 ขีดจำกัดของลำดับที่พจน์ทั่วไปอยู่ในรูปของเศษส่วนของพหุนาม ถ้าดีกรีของพหุนามที่เป็นตัวส่วนมากกว่าดีกรีของพหุนามที่เป็นตัวเศษแล้ว ลำดับจะมีขีดจำกัดเป็นศูนย์

ตัวอย่างที่ 26

จงแสดงว่าลำดับที่มีพจน์ทั่วไปในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นลำดับลู่เข้า

$$1) a_n = \frac{3+2n}{n} \qquad 2) b_n = \frac{3n^3-n}{5n^3+17}$$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } 1) \text{ เนื่องจาก } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+2n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \\ &= 0+2 \\ &= 2\end{aligned}$$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า

$$\begin{aligned}2) \text{ เนื่องจาก } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3-n}{5n^3+17} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(3 - \frac{1}{n^2} \right)}{n^3 \left(5 + \frac{17}{n^3} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{17}{n^3}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 5 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{17}{n^3}} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 26 ขีดจำกัดของลำดับที่พจน์ทั่วไปอยู่ในรูปของเศษส่วนของพหุนาม ถ้าดีกรีของพหุนามที่เป็นตัวเศษเท่ากับดีกรีของพหุนามที่เป็นตัวส่วนแล้ว ลำดับจะเป็นลำดับลู่เข้าที่มีขีดจำกัดไม่เป็นศูนย์

ในการแสดงว่าลำดับที่กำหนดให้นั้นลู่ออก นอกจากการพิจารณากราฟแล้ว ยังสามารถใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4

ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับซึ่ง $a_n \neq 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n
 ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ แล้ว ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ จะลู่ออก

ตัวอย่างที่ 27

จงตรวจสอบว่าลำดับ เมื่อ $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}$$

$$= 0 + 0$$

$$= 0$$

จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่าลำดับ a_n ลู่ออก

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 27 ลิมิตของลำดับที่พจน์ทั่วไปอยู่ในรูปของเศษส่วนของพหุนาม ถ้าดีกรีของพหุนามที่เป็นตัวส่วนน้อยกว่าดีกรีของพหุนามที่เป็นตัวเศษแล้ว ลำดับจะลู่ออก

ตัวอย่างที่ 28

จงหาลิมิตของลำดับ เมื่อ $a_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{n^2-3}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{n^2-3} = \frac{n^2(n^2-3) - n^3(n+1)}{(n+1)(n^2-3)}$

$$= \frac{n^4 - 3n^2 - n^4 - n^3}{n^3 + n^2 - 3n - 3}$$

$$= \frac{-3n^2 - n^3}{n^3 + n^2 - 3n - 3}$$

$$= \frac{n^3 \left(-\frac{3}{n} - 1 \right)}{n^3 \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} - \frac{3}{n^3} \right)}$$

$$= \frac{-\frac{3}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} - \frac{3}{n^3}}$$

จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{n^2-3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{3}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} - \frac{3}{n^3}}$

$$= \frac{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^3}}$$

$$= \frac{0 - 1}{1 + 0 - 0 - 0}$$

$$= -1$$

ทฤษฎีบท 5

ให้ a_n เป็นลำดับของจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ L เป็นจำนวนจริง และ m เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับสอง จะได้ว่า

$$\text{ถ้า } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \text{ แล้ว } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt[m]{L}$$

ตัวอย่างที่ 29

จงหาลิมิตของลำดับ เมื่อ $a_n = \sqrt{\frac{4n-1}{n+1}}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(4-\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{4}{1} = 4$$

จากทฤษฎีบท 5 จะได้

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n-1}{n+1}} &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{n+1}} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$



แบบฝึกหัด 1.2

1. จงเขียนกราฟเพื่อตรวจสอบว่าลำดับที่มีพจน์ทั่วไปในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้า จงหาลิมิต

1) $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$

2) $a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$

3) $a_n = \frac{5}{n+1}$

4) $a_n = \frac{2^n}{n}$

5) $a_n = n(1+(-1)^n)$

6) $a_n = 4 - \frac{1}{2^n}$

7) $a_n = 4(0.5)^{n-1}$

8) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}}$

9) $a_n = \left(-\frac{4}{3}\right)^n$

10) $a_n = \frac{n}{2^n + 2}$

2. จงใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับเพื่อตรวจสอบว่าลำดับที่มีพจน์ทั่วไปในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้า จงหาลิมิต

1) $a_n = \frac{8}{3n}$

2) $a_n = \frac{8^n}{7^n}$

3) $a_n = \frac{4^{1-n}}{2^{8-2n}}$

4) $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

5) $a_n = 4 + \frac{1}{n}$

6) $a_n = \frac{6n-4}{6n}$

7) $a_n = \frac{3n+5}{6}$

8) $a_n = \frac{n}{n+1}$

9) $a_n = \frac{4+5n}{n^2}$

10) $a_n = \frac{2n-1}{3n+1}$

11) $a_n = \frac{3n^2-5n}{7n-1}$

12) $a_n = \frac{7n^2}{5n^2-3}$

13) $a_n = \frac{4n^2 - 2n + 3}{n^2}$

15) $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

17) $a_n = \frac{2^{n-1} + 3}{3^{n+2}}$

19) $a_n = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{4n}$

21) $a_n = \frac{2^{3n+2}}{3^{2n-1}}$

23) $a_n = \left(1 + \frac{r}{12}\right)^n$ เมื่อ $r > 0$

14) $a_n = \frac{3n^2 - 1}{10n - 5n^2}$

16) $a_n = \frac{3^{n+1}}{5^{n+2}}$

18) $a_n = \frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1}$

20) $a_n = \frac{\sqrt{4n^2 - 1}}{2n + \sqrt[3]{n^3 + 2}}$

22) $a_n = \frac{8n^2 + 5n + 2}{3 + 2n}$

24) $a_n = \frac{n^2 - 5}{n + 2} + \frac{1 - n^3}{n^2 + 3n}$

3. ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ ถ้าเป็นจริง จงให้เหตุผล ถ้าเป็นเท็จ จงยกตัวอย่างค้าน

- 1) ถ้า a_n และ b_n เป็นลำดับลู่ออก แล้ว $a_n + b_n$ เป็นลำดับลู่ออก
- 2) ถ้า a_n เป็นลำดับลู่เข้า และ b_n เป็นลำดับลู่ออก แล้ว $a_n + b_n$ เป็นลำดับลู่เข้า

4. บริษัทแห่งหนึ่งมีงบรายจ่ายของปีแรกอยู่ที่ 2.5 พันล้านบาท แต่เนื่องจากราคาน้ำมันที่สูงขึ้น บริษัทจึงวางแผนที่จะประหยัดงบประมาณโดยปรับลดงบรายจ่ายลง 20% ของปีก่อนหน้า

- 1) จงคำนวณงบรายจ่ายของสี่ปีแรกหลังจากปรับลดงบ
- 2) จงเขียนงบรายจ่ายในปีที่ n
- 3) จงตรวจสอบว่าลำดับของงบรายจ่ายนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือไม่

1.3 อนุกรม

ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับจำกัดที่มี n พจน์ จะเรียกการเขียนแสดงการบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ว่า **อนุกรมจำกัด (finite series)**

เรียก a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของอนุกรม

เรียก a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของอนุกรม

$\vdots$

และเรียก a_n ว่า พจน์ที่ n ของอนุกรม

ตัวอย่างของอนุกรมจำกัด

- 1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ เป็นอนุกรมจำกัดที่ได้จากลำดับจำกัด $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$
- 2) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ เป็นอนุกรมจำกัดที่ได้จากลำดับจำกัด $2, 4, 6, \dots, 2n$
- 3) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n}$ เป็นอนุกรมจำกัดที่ได้จากลำดับจำกัด $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, \frac{1}{3^n}$

ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม นั่นคือ

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$\vdots$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

1.3.1 อนุกรมเลขคณิต

อนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต เรียกว่า **อนุกรมเลขคณิต (arithmetic series)**

พิจารณาอนุกรมเลขคณิต $1 + 2 + 3 + \dots + 100$ ที่ได้จากลำดับเลขคณิต $1, 2, 3, \dots, 100$

การหาผลบวก 100 พจน์แรกของอนุกรมนี้ ทำได้ดังนี้

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 \\ 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 1 \\ \hline 101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101 \\ \hline 100 \text{ ตัว} \end{array}$$

เนื่องจาก $\underbrace{101+101+101+\dots+101}_{100 \text{ ตัว}} = 100 \times 101$

ดังนั้น $1+2+3+\dots+100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5,050$

จากวิธีการหาผลบวกข้างต้น สามารถหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต ได้ดังนี้

ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี d เป็นผลต่างร่วม

ดังนั้น $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

$$= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d) \quad \text{----- (1)}$$

หรืออาจเขียน S_n ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \\ &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_n - (n-1)d) \quad \text{----- (2)} \end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) จะได้

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ วงเล็บ}}$$

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

ดังนั้น ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ คือ $\frac{n}{2}(a_1 + a_n)$



เสริมสมอง : Carl Friedrich Gauss



Carl Friedrich Gauss (ค.ศ. 1777 – 1855) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน สามารถหาวิธีคำนวณผลบวกของจำนวนตั้งแต่ 1 ถึง 100 ได้ตั้งแต่ตอนที่เขายังศึกษาอยู่ชั้นประถมศึกษา โดยเขาสังเกตว่าการบวกของจำนวน 50 คู่ ได้แก่ $1+100, 2+99, 3+98, \dots, 50+51$ ซึ่งผลบวกของแต่ละคู่เป็น 101 จึงได้คำตอบว่า $1+2+3+\dots+100$ เท่ากับ 50×101 หรือ 5,050 แนวคิดนี้ของ Gauss ได้พัฒนาเป็นวิธีการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 30

จงหาผลบวก 7 พจน์แรกของอนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต 7, 15, 23, ...

วิธีทำ ลำดับที่กำหนดให้มี $a_1 = 7$ และ $d = 8$

แทน n ด้วย 7 ใน $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$\begin{aligned} a_7 &= 7 + (7-1)(8) \\ &= 55 \end{aligned}$$

จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

จะได้ $S_7 = \frac{7}{2}(7 + 55)$

$$= 217$$

ดังนั้น ผลบวก 7 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 217

ตัวอย่างที่ 31

จงหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิต $7+10+13+\dots+157$

วิธีทำ อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1=7, d=3$ และ $a_n=157$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้ } 157 = 7 + (n-1)(3)$$

$$157 = 7 + 3n - 3$$

$$157 = 3n + 4$$

$$153 = 3n$$

$$n = 51$$

จากโจทย์ แสดงว่าต้องการหาผลบวก 51 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

$7+10+13+\dots+157$ นั่นคือ ต้องการหา S_{51}

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\text{จะได้ } S_{51} = \frac{51}{2}(7+157)$$

$$= 4,182$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 4,182

ตัวอย่างที่ 32

จงหาผลบวกของจำนวนคู่ตั้งแต่ 18 ถึง 482

วิธีทำ เนื่องจาก $18+20+22+24+\dots+482$ เป็นอนุกรมเลขคณิต ที่มี $a_1=18, d=2$
และ $a_n=482$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้ } 482 = 18 + (n-1)(2)$$

$$482 = 18 + 2n - 2$$

$$2n = 466$$

$$n = 233$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\text{จะได้ } S_{233} = \frac{233}{2}(18+482)$$

$$= 58,250$$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนคู่ตั้งแต่ 18 ถึง 482 คือ 58,250

หมายเหตุ นอกจากจะหา S_n จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ เมื่อทราบ n, a_1 และ a_n แล้ว
ยังสามารถหา S_n เมื่อทราบ n, a_1 และ d ได้ดังนี้

$$\text{เนื่องจาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้ } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + (a_1 + (n-1)d))$$

$$= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี d เป็นผลต่างร่วม
ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต คือ

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \text{ หรือ } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

ตัวอย่างที่ 33

หอประชุมของโรงเรียนแห่งหนึ่งมีเก้าอี้จัดไว้แถวแรก 12 ตัว แถวที่สอง 14 ตัว แถวที่สาม 16 ตัว เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ถ้าจัดเก้าอี้ไว้ในหอประชุมทั้งหมด 15 แถว จะมีเก้าอี้ในหอประชุมนี้ทั้งหมดกี่ตัว

วิธีทำ ลำดับของจำนวนเก้าอี้แต่ละแถวในหอประชุม คือ ลำดับเลขคณิต $12, 14, 16, \dots, a_n$ ที่มี $a_1 = 12, d = 2$ และ $n = 15$

ดังนั้น จำนวนเก้าอี้ทั้งหมด 15 แถว ในหอประชุม คือ S_{15}

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } S_{15} &= \frac{15}{2}(2(12) + (15-1)2) \\ &= 390 \end{aligned}$$

ดังนั้น ในหอประชุมของโรงเรียนแห่งนี้มีเก้าอี้ทั้งหมด 390 ตัว



แบบฝึกหัด 1.3.1

1. จงหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต เมื่อกำหนดให้

- 1) $n = 4, a_1 = 3$ และ $d = 2$
- 2) $n = 11, a_1 = -7$ และ $d = 3$
- 3) $n = 14, a_1 = -5$ และ $d = -2$
- 4) $n = 7, a_1 = 5$ และ $a_n = 29$
- 5) $n = 9, a_1 = -3$ และ $a_n = 37$

2. จงหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต เมื่อกำหนดให้

- 1) $n = 50$ และลำดับเลขคณิต คือ $5, 7, 9, 11, 13, \dots$
- 2) $n = 30$ และลำดับเลขคณิต คือ $0, 2, 4, 6, 8, \dots$
- 3) $n = 60$ และลำดับเลขคณิต คือ $-2, 3, 8, 13, 18, \dots$

4) $n = 75$ และลำดับเลขคณิต คือ $5, 2, -1, -4, -7, \dots$

5) $n = 50$ และลำดับเลขคณิต คือ $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$

3. จงหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิตต่อไปนี้

- 1) $6 + 9 + 12 + 15 + \dots + 99$
- 2) $(-7) + (-10) + (-13) + (-16) + \dots + (-109)$
- 3) $(-7) + (-4) + (-1) + 2 + \dots + 131$

4. ลำดับเลขคณิตลำดับหนึ่งมีพจน์ที่ 10 คือ 20 และพจน์ที่ 5 คือ 10 จงหาผลบวกของพจน์ที่ 8 ถึงพจน์ที่ 15

5. ทับทิมเริ่มออมเงินวันแรก 1 บาท วันที่สอง 2 บาท วันที่สาม 3 บาท ถ้าทับทิมออมเงินเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนครบ 30 วัน ทับทิมจะมีเงินออมทั้งหมดเท่าใด

6. จงหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิตที่มีพจน์แรก คือ 6 ผลต่างร่วม คือ 4 และพจน์สุดท้าย คือ 26

7. จงหาผลบวกของจำนวนคี่บวก 100 จำนวนแรก

8. จงหาผลบวกของจำนวนเต็มบวกที่สิบจำนวนแรกที่เป็นพหุคูณของ 3

9. จงหาผลบวกของจำนวนคี่ตั้งแต่ 17 ถึง 379

10. จัดแผ่นไม้ที่มีขนาดเท่ากันกองหนึ่งวางซ้อนกัน โดยเริ่มจากวางแผ่นไม้ในชั้นล่างเรียงตามแนวยาวชิดกันจำนวน 30 แผ่น จากนั้นวางแผ่นไม้ในชั้นที่ 2 โดยให้แนวกึ่งกลางตามด้านยาวของแผ่นไม้แต่ละแผ่นอยู่ตรงกับรอยต่อของแผ่นไม้แต่ละคู่ในชั้นแรก ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนชั้นบนสุดมีแผ่นไม้ 5 แผ่น จงหาว่าแผ่นไม้กองนี้มีกี่ชั้น และมีแผ่นไม้ทั้งหมดกี่แผ่น

1.3.2 อนุกรมเรขาคณิต

อนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิต เรียกว่า อนุกรมเรขาคณิต (geometric series)

พิจารณาลำดับ $1, 3, 9, 27, \dots, 6561$ ซึ่งเป็นลำดับเรขาคณิตที่มี 3 เป็นอัตราส่วนร่วม

การหาผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับเรขาคณิตข้างต้นทำได้ดังนี้

$$\text{ให้ } S = 1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 6,561 \quad \text{----- (1)}$$

$$\text{นั่นคือ } 3S = 3 + 9 + 27 + \dots + 6,561 + 19,683 \quad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้

$$2S = 19,683 - 1 = 19,682$$

$$S = 9,841$$

$$\text{ดังนั้น } 1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 6,561 = 9,841$$

จากวิธีการหาผลบวกข้างต้น สามารถหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต ได้ดังนี้

ให้ $a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิต ซึ่งมี r เป็นอัตราส่วนร่วม

$$\text{ดังนั้น } S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \dots + a_1r^{n-1} \quad \text{----- (3)}$$

$$\text{และ } rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \dots + a_1r^{n-1} + a_1r^n \quad \text{----- (4)}$$

จาก (3) และ (4) จะได้

$$rS_n - S_n = a_1r^n - a_1$$

$$S_n(r-1) = a_1(r^n - 1)$$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \quad \text{เมื่อ } r \neq 1$$

$$\text{หรือ } S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \quad \text{เมื่อ } r \neq 1$$

ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับเรขาคณิต ซึ่งมี r เป็นอัตราส่วนร่วม

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต คือ $S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$ เมื่อ $r \neq 1$

ตัวอย่างที่ 34

จงหาผลบวก 8 พจน์แรกของอนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิต $1, 2, 4, 8, \dots$

วิธีทำ ลำดับที่กำหนดให้มี $a_1 = 1$ และ $r = 2$

แทน n ด้วย 8 ใน $S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$ จะได้

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{1(1 - 2^8)}{1 - 2} \\ &= \frac{2^8 - 1}{2 - 1} \\ &= 255 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 8 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ 255

ตัวอย่างที่ 35

จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิต $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \dots$

วิธีทำ ลำดับที่กำหนดให้มี $a_1 = \frac{1}{2}$ และ $r = \frac{1}{3}$

แทน n ด้วย 10 ใน $S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$ จะได้

$$\begin{aligned}
 S_{10} &= \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{10} \right)}{1 - \frac{1}{3}} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right) \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{10} \right)}{1 - \frac{1}{3}} \\
 &= \frac{3}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{10} \right)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{3}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{10} \right)$

ตัวอย่างที่ 36

จงหาผลบวกของอนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิต $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{256}$

วิธีทำ ลำดับที่กำหนดให้มี $a_1 = 1, r = \frac{1}{2}$ และ $a_n = \frac{1}{256}$

$$\text{จาก } a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\text{จะได้ } \frac{1}{256} = 1 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^8 = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$8 = n - 1$$

$$n = 9$$

$$\text{แทน } n \text{ ด้วย } 9 \text{ ใน } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$\text{จะได้ } S_9 = \frac{1 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^9 \right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 S_9 &= \frac{1 - \frac{1}{512}}{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\frac{511}{512}}{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{511}{256}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{511}{256}$

ตัวอย่างที่ 37

กานดาตั้งใจจะออมเงินเพื่อซื้ออุปกรณ์กีฬา โดยวันแรกจะออมเงิน 20 บาท วันที่สอง 40 บาท วันที่สาม 80 บาท เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ เมื่อครบ 7 วัน กานดาจะมีเงินออมทั้งหมดเท่าใด

วิธีทำ จำนวนเงินที่กานดาออมในแต่ละวัน คือ ลำดับเรขาคณิต $20, 40, 80, \dots, a_n$ ที่มี $a_1 = 20$ และ $r = 2$

ดังนั้น จำนวนเงินที่กานดาออมเมื่อครบ 7 วัน คือ S_7

$$\text{จาก } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } S_7 &= \frac{20(1-2^7)}{1-2} \\
 &= \frac{20(2^7-1)}{2-1} \\
 &= 2,540
 \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อครบ 7 วัน กานดาจะมีเงินออมทั้งหมด 2,540 บาท

ตัวอย่างที่ 38

วรรรัตน์เป็นแพทย์หญิงบรรจุใหม่ที่โรงพยาบาลแห่งหนึ่งในชนบทซึ่งเป็นบ้านเกิดของเธอ ในความเป็นจริงแล้ววรรรัตน์สามารถเลือกที่จะบรรจุที่โรงพยาบาลใหญ่ในกรุงเทพฯ ได้เพราะมีผลการเรียนดีเด่น แต่เธอเลือกที่จะกลับมาพัฒนาบ้านเกิดตามอุดมการณ์ของเธอ และดูแลบิดามารดาอย่างใกล้ชิด โดยวรรรัตน์จะให้เงินบิดามารดาไว้ใช้จ่ายส่วนตัวเดือนละ 2,000 บาท และจะเพิ่มเงินให้ร้อยละ 5 ต่อปี จงหาว่า

- 1) ในปีที่ 7 วรรรัตน์จะให้เงินบิดามารดาเดือนละเท่าใด
- 2) เมื่อเวลาผ่านไป 15 ปี วรรรัตน์ให้เงินบิดามารดาครบแล้วเป็นเงินเท่าใด

วิธีทำ 1) ในปีแรก วรรรัตน์ให้เงินบิดามารดาเดือนละ 2,000 บาท
 ในปีที่ 2 วรรรัตน์ให้เงินบิดามารดาเดือนละ
 $2,000 + 2,000(0.05) = 2,000(1.05)$ บาท
 ในปีที่ 3 วรรรัตน์ให้เงินบิดามารดาเดือนละ
 $2,000(1.05) + 2,000(1.05)(0.05) = 2,000(1.05)^2$ บาท
 จะเห็นว่าจำนวนเงินในแต่ละเดือนที่วรรรัตน์ให้บิดามารดาในปีที่ 1, 2, 3, ...
 เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = 2,000$ และ $r = 1.05$
 ดังนั้น จำนวนเงินในแต่ละเดือนที่วรรรัตน์ให้บิดามารดาในปีที่ 7 คือ a_7
 แทน n ด้วย 7 ใน $a_n = a_1 r^{n-1}$
 จะได้ $a_7 = 2,000(1.05)^{7-1}$
 $\approx 2,680$
 ดังนั้น ในปีที่ 7 วรรรัตน์จะให้เงินบิดามารดาเดือนละประมาณ 2,680 บาท

2) ในปีแรก วรรรัตน์ให้เงินบิดามารดาทั้งสิ้น $12(2,000)$ บาท
 ในปีที่ 2 วรรรัตน์ให้เงินบิดามารดาทั้งสิ้น $12(2,000)(1.05)$ บาท
 ในปีที่ 3 วรรรัตน์ให้เงินบิดามารดาทั้งสิ้น $12(2,000)(1.05)^2$ บาท
 จะเห็นว่าจำนวนเงินที่วรรรัตน์ให้บิดามารดาในปีที่ 1, 2, 3, ... เป็นลำดับเรขาคณิต
 ที่มี $a_1 = 12(2,000)$ และ $r = 1.05$

ดังนั้น จำนวนเงินที่วรรรัตน์ให้บิดามารดาในปีที่ 1 ถึง 15 คือ S_{15}

$$\text{แทน } n \text{ ด้วย } 15 \text{ ใน } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$\text{จะได้ } S_{15} = \frac{12(2,000)(1-(1.05)^{15})}{1-1.05} = \frac{12(2,000)((1.05)^{15}-1)}{1.05-1} \approx 517,885.53$$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 15 ปี วรรรัตน์ให้เงินบิดามารดาครบแล้วเป็นเงินประมาณ 517,885.53 บาท



แบบฝึกหัด 1.3.2

1. จงหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต เมื่อกำหนดให้
 - 1) $n=4, a_1=3$ และ $r=2$
 - 2) $n=7, a_1=5$ และ $r=4$
 - 3) $n=9, a_1=-3$ และ $r=5$
 - 4) $n=11, a_1=-7$ และ $r=3$
 - 5) $n=14, a_1=-5$ และ $r=-2$
2. จงหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต เมื่อกำหนดให้
 - 1) $n=9$ และลำดับเรขาคณิต คือ 2, 6, 18, 54, ...
 - 2) $n=8$ และลำดับเรขาคณิต คือ 9, 12, 16, $\frac{64}{3}$, ...
 - 3) $n=10$ และลำดับเรขาคณิต คือ $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}$, ...
3. จงหาผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตต่อไปนี้
 - 1) $9 + 27 + 81 + \dots + 729$
 - 2) $4 + 2 + 1 + \dots + \frac{1}{512}$
 - 3) $1 + (-2) + 4 + \dots + 256$

4. มังกรตั้งใจจะออมเงินเพื่อซื้อหนังสือ โดยวันแรกจะออมเงิน 1 บาท วันที่สอง 2 บาท วันที่สาม 4 บาท วันที่สี่ 8 บาท เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ เมื่อครบ 15 วัน มังกรจะมีเงินออมทั้งหมดเท่าใด
5. ผู้จัดการฝ่ายขายของบริษัทแห่งหนึ่งตั้งใจจะเพิ่มยอดขายให้มากขึ้น 3% ของยอดขายเดิมทุกไตรมาส (ทุก 3 เดือน) ถ้าในไตรมาสแรกของปีที่ 1 เขาทำยอดขายได้ 300,000 บาท จงหาว่า
 - 1) เขาควรทำยอดขายไตรมาสแรกของปีที่ 3 ให้ได้เท่าใด
 - 2) เมื่อครบสองปี เขาควรทำยอดขายรวมทั้งหมดให้ได้เท่าใด
6. ถังใบหนึ่งมีน้ำอยู่ 5,832 ลิตร ถ้าใช้น้ำในถังทุกวัน โดยในแต่ละวันใช้น้ำ $\frac{1}{3}$ ของปริมาณน้ำที่มีอยู่ในถัง เมื่อครบ 6 วัน จะมีน้ำเหลืออยู่ในถังกี่ลิตร
7. บริษัทแห่งหนึ่งซื้อรถยนต์มาในราคา 1,000,000 บาท ถ้าในแต่ละปี รถยนต์มีมูลค่าลดลง 20% ซึ่งหมายถึงราคารถยนต์คันนี้จะลดลง 20% ทุกปี จงหาว่าเมื่อครบห้าปี รถยนต์คันนี้จะมีมูลค่าเท่าใด
8. ลำดับเรขาคณิตลำดับหนึ่งมีพจน์แรก คือ 160 และอัตราส่วนร่วม คือ $\frac{3}{2}$ ถ้าผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ 2,110 จงหา n
9. ผลบวกของพจน์แรกและพจน์ที่สองของอนุกรมเรขาคณิต คือ -3 และผลบวกของพจน์ที่ 5 และพจน์ที่ 6 คือ $-\frac{3}{16}$ จงหาผลบวกของ 8 พจน์แรกของอนุกรมนี้
10. แบคทีเรียกลุ่มหนึ่งแบ่งเซลล์โดยมีจำนวนเพิ่มขึ้น 20% ในแต่ละชั่วโมง ถ้า ณ ปัจจุบันมีแบคทีเรีย 1,000 เซลล์ จงหาสูตรที่ใช้ในการหาจำนวนแบคทีเรียเมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง และเมื่อเวลาผ่านไป 10 ชั่วโมง จะมีแบคทีเรียทั้งหมดเท่าใด

1.3.3 อนุกรมอนันต์

ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับอนันต์ จะเรียกการเขียนแสดงการบวกในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ ว่า อนุกรมอนันต์ (infinite series)

เรียก a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของอนุกรม

เรียก a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของอนุกรม

$\vdots$

และเรียก a_n ว่า พจน์ที่ n ของอนุกรม

ตัวอย่างของอนุกรมอนันต์

1) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$ เป็นอนุกรมอนันต์ที่ได้จากลำดับอนันต์

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{2n-1}, \dots$$

2) $4 + 8 + 12 + \dots + 4n + \dots$ เป็นอนุกรมอนันต์ที่ได้จากลำดับอนันต์ $4, 8, 12, \dots, 4n, \dots$

3) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ เป็นอนุกรมอนันต์ที่ได้จากลำดับอนันต์

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

การหาผลบวกของอนุกรมอนันต์โดยการบวกโดยตรงจนครบทุกพจน์เป็นไปได้ไม่ได้ เพราะอนุกรมอนันต์มีจำนวนพจน์ไม่จำกัด

พิจารณาอนุกรมอนันต์ต่อไปนี้ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

แม้ว่าจะไม่สามารถหาผลบวกของอนุกรมดังกล่าวโดยการบวกทีละพจน์จนครบทุกพจน์ได้ แต่สามารถหาผลบวก S_n พจน์แรกของอนุกรมอนันต์ดังกล่าวได้ เช่น

$$\text{ผลบวก 2 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$\text{ผลบวก 3 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0.875$$

$$\text{ผลบวก 4 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0.9375$$

$$\text{ผลบวก 5 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0.96875$$

ผลบวก k พจน์แรกของอนุกรมนี้แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

k	ผลบวก k พจน์แรกของอนุกรม
5	0.96875
10	0.99902344
15	0.99996948
20	0.99999905
25	0.99999997

จากตารางข้างต้น พบว่า เมื่อ k มากขึ้น ผลบวก k พจน์แรกของอนุกรมจะเข้าใกล้ 1

บทนิยาม 6

กำหนด $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ เป็นอนุกรมอนันต์

$$\begin{aligned} \text{ให้ } S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

เรียก S_n ว่า ผลบวกย่อย (partial sum) n พจน์แรกของอนุกรม เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก เรียกลำดับอนันต์ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ ว่า ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม (sequence of partial sums)

จากตัวอย่างอนุกรมอนันต์ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$ จะได้

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$\vdots$

เนื่องจากอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีพจน์แรก คือ $\frac{1}{2}$ และอัตราส่วนร่วม คือ $\frac{1}{2}$ จากสูตรการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต จะได้

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2^n-1}{2^n} \end{aligned}$$

ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมอนันต์นี้ คือ $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots$ และเมื่อหาลิมิตของลำดับนี้ จะได้

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n-1}{2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

จากตัวอย่างอนุกรมอนันต์ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ จะเห็นว่า 1 เป็นลิมิตของลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ จะกล่าวว่าอนุกรมอนันต์ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ มีผลบวกและเรียก 1 ว่าเป็นผลบวกของอนุกรมนี้

พิจารณาอนุกรมอนันต์

1) $1+1+1+\dots+1+\dots$

2) $-1+1-1+1+\dots+(-1)^n+\dots$

ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมในข้อ 1) คือ $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$

ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมในข้อ 2) คือ $-1, 0, -1, 0, -1, 0, \dots$

จะเห็นว่าลำดับทั้งสองไม่มีลิมิต จึงกล่าวว่าอนุกรมอนันต์ทั้งสองไม่มีผลบวก

จากตัวอย่างที่กล่าวมาแล้ว พบว่า อนุกรมอนันต์บางอนุกรมมีผลบวก แต่บางอนุกรมไม่มีผลบวก

จะนิยามผลบวกของอนุกรมอนันต์ ดังนี้

บทนิยาม 7

กำหนดอนุกรมอนันต์ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$

ให้ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้

ถ้าลำดับ S_n เป็นลำดับลู่เข้า โดย $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ เมื่อ S เป็นจำนวนจริง แล้วจะกล่าวว่าอนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ เป็น **อนุกรมลู่เข้า (convergent series)** และเรียก S ว่าผลบวกของอนุกรม

ถ้าลำดับ S_n เป็นลำดับลู่ออก จะกล่าวว่าอนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ เป็น **อนุกรมลู่ออก (divergent series)**

จากบทนิยามข้างต้น การแสดงว่าอนุกรมอนันต์ใดจะเป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออกทำได้ดังนี้

- 1) พิจารณาลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม และหาสูตรทั่วไปของผลบวกย่อย n พจน์แรก (S_n) ของอนุกรม
- 2) พิจารณาลิมิตของ S_n ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ เมื่อ S เป็นจำนวนจริง แล้วอนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และมีผลบวกเท่ากับ S แต่ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ไม่มีค่า แล้วอนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่างที่ 39

จงพิจารณาว่าอนุกรม $1+3+5+\dots+(2n-1)+\dots$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้า จงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ อนุกรมที่กำหนดให้ได้จากลำดับเลขคณิต $1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots$

ซึ่งมี $a_1 = 1$ และ $a_n = 2n-1$

หาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมจากสูตร $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(1 + (2n-1)) \\ &= n^2 \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2$

จากทฤษฎีบท 1 จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2$ ไม่มีค่า

ดังนั้น อนุกรมอนันต์ที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่างที่ 40

จงพิจารณาว่าอนุกรม $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1,000} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก
ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้า จงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ อนุกรมที่กำหนดให้ได้จากลำดับเรขาคณิต $\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1,000}, \dots, \frac{3}{10^n}, \dots$

$$\text{ซึ่งมี } a_1 = \frac{3}{10} \text{ และ } r = \frac{1}{10}$$

หาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมจากสูตร $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\frac{3}{10} \left(1 - \left(\frac{1}{10} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) \end{aligned}$$

$$\text{จากทฤษฎีบท 2 และ 3 จะได้ } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) = \frac{1}{3}$$

ดังนั้น อนุกรมอนันต์ที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่เข้าและมีผลบวกเท่ากับ $\frac{1}{3}$ ■

อนุกรมบางอนุกรมไม่ใช่ทั้งอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต การหาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมดังกล่าวอาจทำได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 41

จงหาผลบวกย่อยสิบพจน์แรกของอนุกรม $1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^4 + \cdots + n \cdot 3^n + \cdots$

วิธีทำ ให้ S_n แทนผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมที่กำหนดให้

$$\text{จะได้ } S_n = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^4 + \cdots + n \cdot 3^n \quad \text{----- (1)}$$

$$\text{และ } 3S_n = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^5 + \cdots + n \cdot 3^{n+1} \quad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้

$$-2S_n = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^n - n \cdot 3^{n+1}$$

จากสูตรการหาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต จะได้

$$-2S_n = \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} - n \cdot 3^{n+1}$$

$$-2S_n = \frac{3}{2}(3^n - 1) - n \cdot 3^{n+1}$$

$$S_n = -\frac{3}{4}(3^n - 1) + \frac{n}{2} \cdot 3^{n+1} \quad \text{----- (3)}$$

แทน n ใน (3) ด้วย 10 จะได้

$$S_{10} = -\frac{3}{4}(3^{10} - 1) + \frac{10}{2}(3^{11})$$

$$= -\frac{3^{11}}{4} + \frac{3}{4} + 5(3^{11})$$

$$= \frac{3}{4} + \left(5 - \frac{1}{4} \right) 3^{11}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{19}{4}(3^{11})$$

ดังนั้น ผลบวกย่อยสิบพจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\frac{3}{4} + \frac{19}{4}(3^{11})$ ■

ตัวอย่างที่ 42

จงหาผลบวกย่อยสี่สิบพจน์แรกของอนุกรม $1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{1}{27} + 4 \cdot \frac{1}{81} + \dots + n \cdot \frac{1}{3^n} + \dots$

วิธีทำ ให้ S_n แทนผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมที่กำหนดให้

$$\text{จะได้ } S_n = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{1}{27} + 4 \cdot \frac{1}{81} + \dots + n \cdot \frac{1}{3^n} \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{และ } \frac{1}{3} S_n = 1 \cdot \frac{1}{3^2} + 2 \cdot \frac{1}{3^3} + 3 \cdot \frac{1}{3^4} + 4 \cdot \frac{1}{3^5} + \dots + (n-1) \cdot \frac{1}{3^n} + n \cdot \frac{1}{3^{n+1}} \quad \text{--- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้

$$\frac{2}{3} S_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^n} \right) - \frac{n}{3^{n+1}}$$

จากสูตรการหาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต จะได้

$$\frac{2}{3} S_n = \frac{\frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{2}{3} S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) - \frac{n}{3^{n+1}}$$

$$S_n = \frac{3}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) - \frac{n}{2 \cdot 3^n} \quad \text{--- (3)}$$

แทน n ใน (3) ด้วย 20 จะได้

$$\begin{aligned} S_{20} &= \frac{3}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{20} \right) - \frac{20}{2(3^{20})} \\ &= \frac{3}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{20} \right) - \frac{10}{3^{20}} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{43}{4(3^{20})} \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกย่อยสี่สิบพจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\frac{3}{4} - \frac{43}{4(3^{20})}$

ตัวอย่างที่ 43

จงพิจารณาว่าอนุกรม $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้า จงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ สำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{k+1-k}{k(k+1)} \\ &= \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad \text{--- (1)} \end{aligned}$$

จาก (1) เขียนผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมได้ใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

จากทฤษฎีบท 1 และ 3 จะได้

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

ดังนั้น อนุกรมอนันต์ที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่เข้าและมีผลบวกเท่ากับ 1

ตัวอย่างที่ 44

จงพิจารณาว่าอนุกรม $1 + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} + \dots$

เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้า จงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ สำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} &= \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} \left(\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{k-(k-1)} \\ &= \sqrt{k}-\sqrt{k-1} \end{aligned} \quad \text{———— (1)}$$

จาก (1) เขียนผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมได้ใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned} S_n &= (\sqrt{1}-\sqrt{0}) + (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + \dots + (\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2}) + (\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) \\ &= \sqrt{n} \end{aligned}$$

จากทฤษฎีบท 1 จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}$ ไม่มีค่า

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ไม่มีค่า

นั่นคือ อนุกรมอนันต์ที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่ออก

สำหรับอนุกรมเรขาคณิตนั้น การจะพิจารณาว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก มีสมบัติเฉพาะที่ช่วยให้สามารถพิจารณาได้สะดวกขึ้น โดยมีข้อสังเกตดังนี้

จากอนุกรมเรขาคณิต $a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \dots + a_1r^{n-1} + \dots$ เมื่อ $a_1 \neq 0$

พิจารณากรณี $|r|=1$ จะได้ $r=1$ หรือ $r=-1$

ถ้า $r=1$ จะได้ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมเป็น $a_1, 2a_1, 3a_1, \dots, na_1, \dots$ ซึ่งไม่มีลิมิต เพราะ $\lim_{n \rightarrow \infty} na_1$ ไม่มีค่า

ถ้า $r=-1$ จะได้ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมเป็นลำดับแกว่งกวัด $a_1, 0, a_1, 0, \dots$ ซึ่งไม่มีลิมิต

ดังนั้น อนุกรมเรขาคณิต เมื่อ $|r|=1$ เป็นอนุกรมลู่ออก
ต่อไปพิจารณากรณี $|r| \neq 1$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad S_n &= \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \\ &= \frac{a_1}{1-r} - \frac{a_1r^n}{1-r} \end{aligned}$$

ถ้า $|r| < 1$ จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ ซึ่งทำให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1r^n}{1-r} = 0$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1}{1-r} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1r^n}{1-r} \\ &= \frac{a_1}{1-r} \end{aligned}$$

ดังนั้น อนุกรมเรขาคณิต เมื่อ $|r| < 1$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรมเท่ากับ $\frac{a_1}{1-r}$

ถ้า $|r| > 1$ จากทฤษฎีบท 2 จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ ไม่มีค่า ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{1-r} - \frac{a_1r^n}{1-r} \right)$ ไม่มีค่า

ดังนั้น อนุกรมเรขาคณิต เมื่อ $|r| > 1$ เป็นอนุกรมลู่ออก

สรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6

กำหนดให้อนุกรมเรขาคณิตมี a_1 เป็นพจน์แรก และ r เป็นอัตราส่วนร่วม

ถ้า $|r| < 1$ แล้ว อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าและผลบวกของอนุกรมเท่ากับ $\frac{a_1}{1-r}$

ถ้า $|r| \geq 1$ แล้ว อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่างที่ 45

จงพิจารณาว่าอนุกรม $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \dots + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \dots$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก
ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้า จงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ อนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = 1$ และ $r = -\frac{2}{3}$
เนื่องจาก $|r| = \frac{2}{3} < 1$ ดังนั้น จากทฤษฎีบท 6 จะได้ว่าอนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า
และผลบวกของอนุกรม คือ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{5}$ ■

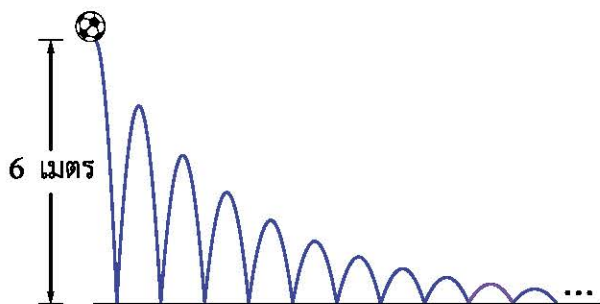
ตัวอย่างที่ 46

จงพิจารณาว่าอนุกรม $\frac{2}{3} + \frac{8}{9} + \frac{32}{27} + \frac{128}{81} + \dots + \frac{2^{2n-1}}{3^n} + \dots$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก
ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้า จงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ อนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{2}{3}$ และ $r = \frac{4}{3}$
เนื่องจาก $|r| = \frac{4}{3} > 1$ ดังนั้น จากทฤษฎีบท 6 จะได้ว่าอนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก ■

ตัวอย่างที่ 47

ถ้าปล่อยลูกบอลจากความสูง 6 เมตร แล้วลูกบอลกระดอนขึ้นมา 75% ของความสูงเดิมในแต่ละครั้ง จงหาระยะเคลื่อนที่ทั้งหมดในแนวตั้งของลูกบอล



วิธีทำ ระยะเคลื่อนที่ในแนวตั้งของลูกบอลเมื่อเริ่มปล่อยลูกบอลถึงพื้นดินมีระยะทาง 6 เมตร ลูกบอลกระดอนขึ้นมา 75% ของความสูงเดิม นั่นคือ ระยะเคลื่อนที่ขึ้นในแนวตั้งเมื่อลูกบอลกระดอนครั้งที่ 1 เท่ากับ $\frac{3}{4}$ ของความสูงเดิม

ดังนั้น ระยะเคลื่อนที่ในแนวตั้งของลูกบอลเมื่อกระดอนขึ้นครั้งที่ 1 จนตกถึงพื้นดิน คือ

$$6\left(\frac{3}{4}\right) + 6\left(\frac{3}{4}\right) = 12\left(\frac{3}{4}\right)$$

ระยะเคลื่อนที่ในแนวตั้งของลูกบอลเมื่อกระดอนขึ้นครั้งที่ 2 จนตกถึงพื้นดิน คือ

$$6\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + 6\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = 12\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

ระยะเคลื่อนที่ในแนวตั้งของลูกบอลเมื่อกระดอนขึ้นครั้งต่อไปเป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จะได้ระยะเคลื่อนที่ทั้งหมดในแนวตั้งของลูกบอลเท่ากับ

$$6 + 12\left(\frac{3}{4}\right) + 12\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 12\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots$$

จากทฤษฎีบท 6 จะได้

$$\begin{aligned} 6 + 12\left(\frac{3}{4}\right) + 12\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 12\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots &= 6 + 12\left(\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots\right) \\ &= 6 + 12\left(\frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}}\right) \\ &= 6 + 36 \\ &= 42 \end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะเคลื่อนที่ทั้งหมดในแนวตั้งของลูกบอล คือ 42 เมตร ■

ตัวอย่างที่ 48

จงเขียนทศนิยมซ้ำ $5.4\overline{27}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

วิธีทำ จาก $5.4\overline{27} = 5.4272727\ldots$
 $= 5.4 + 0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \cdots$

จากทฤษฎีบท 6 จะได้

$$\begin{aligned} & 5.4 + 0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \cdots \\ &= 5.4 + \frac{27}{10^3} + \frac{27}{10^5} + \frac{27}{10^7} + \cdots \\ &= 5.4 + 27 \left(\left(\frac{1}{10} \right)^3 + \left(\frac{1}{10} \right)^5 + \left(\frac{1}{10} \right)^7 + \cdots \right) \\ &= 5.4 + 27 \left(\frac{\left(\frac{1}{10} \right)^3}{1 - \frac{1}{100}} \right) \\ &= 5.4 + 27 \left(\frac{1}{990} \right) \\ &= \frac{54}{10} + \frac{3}{110} \\ &= \frac{597}{110} \end{aligned}$$

ดังนั้น เขียนทศนิยมซ้ำ $5.4\overline{27}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้เป็น $\frac{597}{110}$



แบบฝึกหัด 1.3.3

1. จงหาลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมต่อไปนี้

- 1) $3 + 2 + \frac{4}{3} + \cdots + 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \cdots$
- 2) $\frac{1}{2} + \frac{5}{2} + \frac{25}{2} + \cdots + \frac{1}{2}(5)^{n-1} + \cdots$
- 3) $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} + \cdots$
- 4) $2 + (-1) + (-4) + \cdots + (5 - 3n) + \cdots$
- 5) $\frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \cdots$
- 6) $-\frac{1}{10} + \frac{1}{100} - \frac{1}{1,000} + \cdots + \left(\frac{-1}{10}\right)^n + \cdots$
- 7) $100 + 10 + 1 + 0.1 + \cdots + 10^{3-n} + \cdots$
- 8) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{0}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} + \cdots$

2. จงพิจารณาว่าอนุกรมในข้อ 1 อนุกรมใดบ้างที่เป็นอนุกรมลู่เข้าและมีผลบวกของอนุกรมเป็นเท่าใด

3. จงหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

- 1) $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{3}{2^{n-1}} + \cdots$
- 2) $\frac{4+1}{9} + \frac{8+1}{27} + \frac{16+1}{81} + \cdots + \frac{2^{n+1}+1}{3^{n+1}} + \cdots$
- 3) $\frac{1}{2+x^2} + \frac{1}{(2+x^2)^2} + \frac{1}{(2+x^2)^3} + \cdots + \frac{1}{(2+x^2)^n} + \cdots$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

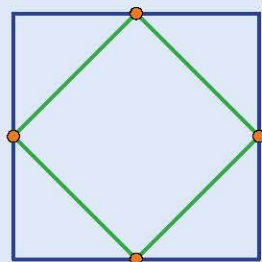
4. จงแสดงว่า $0.\dot{9} = 1$

5. จงเขียนทศนิยมซ้ำต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

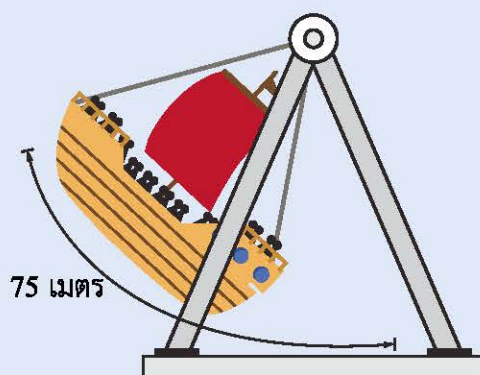
- 1) $0.\dot{2}\dot{1}$
- 2) $0.6\dot{1}0\dot{4}$
- 3) $7.2\dot{5}\dot{6}$
- 4) $4.3\dot{8}\dot{7}$
- 5) $0.0737373\ldots$
- 6) $2.999\ldots$

6. จงหาคำตอบของสมการ $1+x+x^2+x^3+\dots+x^{n-1}+\dots=\frac{2}{3}$

7. ถ้าลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จะได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ดังรูป



- 1) ถ้ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปใหญ่มีเส้นรอบรูปยาว 20 หน่วย แล้วรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปเล็กมีเส้นรอบรูปยาวเท่าใด
 - 2) ถ้ากระบวนการเกิดรูปใหม่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเกิดขึ้นอย่างต่อเนื่องไม่สิ้นสุด แล้วผลบวกของความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งหมดเป็นเท่าใด
8. เรือไวกิงเป็นเครื่องเล่นชนิดหนึ่งในสวนสนุก ถ้าในการแกว่งครั้งแรก วัดระยะทางของหัวเรือไวกิงเมื่อแกว่งจากตำแหน่งซ้ายสุดไปถึงขวาสุดได้ 75 เมตร และการแกว่งครั้งต่อไปมีระยะสั้นลงเป็น $\frac{3}{5}$ ของระยะเดิม จงหาว่าหากไม่มีการหยุดกะทันหัน เรือไวกิงจะแกว่งไปมาตั้งแต่เริ่มต้นเป็นระยะทางทั้งหมดเท่าใด



9. จงพิจารณาว่าวิธีการหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ถูกต้องหรือไม่ ถ้าไม่ถูกต้อง จงให้เหตุผล

1) ให้ $x = 1+2+4+8+16+32+\dots$
 จะได้ $2x = 2+4+8+16+32+64+\dots$
 $= (1+2+4+8+16+32+64+\dots)-1$
 $= x-1$
 ดังนั้น $x = -1$
 นั่นคือ ผลบวกของอนุกรม $1+2+4+8+\dots+2^{n-1}+\dots$ เท่ากับ -1

2) ให้ $S = 1-2+4-8+16-32+64-\dots$ ----- (1)
 และ $2S = 2-4+8-16+32-64+\dots$ ----- (2)
 จาก (1) และ (2) จะได้ $3S=1$ นั่นคือ $S=\frac{1}{3}$
 ดังนั้น ผลบวกของอนุกรม $1-2+4-8+\dots+(-2)^{n-1}+\dots$ เท่ากับ $\frac{1}{3}$

1.4 สัญลักษณ์แสดงการบวก

เพื่อความสะดวกในการเขียนอนุกรมจะใช้ตัวอักษรกรีกตัวพิมพ์ใหญ่ Σ (อ่านว่า ซิกมา) เป็นสัญลักษณ์แสดงการบวก กล่าวคือ จะเขียนแทนอนุกรมจำกัด $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ด้วยสัญลักษณ์ $\sum_{i=1}^n a_i$ (อ่านว่า ซัมเมชัน a_i เมื่อ i เท่ากับ 1 ถึง n) และเขียนแทนอนุกรมอนันต์ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ ด้วยสัญลักษณ์ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ (อ่านว่า ซัมเมชัน a_i เมื่อ i เท่ากับ 1 ถึง ∞)

เรียกตัวแปร i ที่ปรากฏในสัญลักษณ์ $\sum_{i=1}^n a_i$ หรือ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ว่า ดัชนี (index) ซึ่งอาจจะใช้ตัวแปรอื่นแทน i ได้

$$1) \sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

$$2) \sum_{k=1}^4 (2k-1) = (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + (2 \cdot 4 - 1)$$

$$3) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$4) \sum_{i=1}^{\infty} (i+3) = (1+3) + (2+3) + (3+3) + \dots + (n+3) + \dots$$

$$5) \sum_{i=1}^{\infty} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + \dots$$

นอกจากนี้ การใช้สัญลักษณ์ $\sum$ แทนการบวก อาจเขียนได้หลายรูปแบบ เช่น $\sum_{i=1}^4 (i-1)i$ และ

$\sum_{i=0}^3 i(i+1)$ ต่างก็แทนอนุกรม $0+2+6+12$ เช่นเดียวกัน จะเห็นว่าดัชนีไม่จำเป็นต้องเริ่มจาก 1

เสมอไป

ตัวอย่างที่ 49

จงแสดงว่า $\sum_{i=1}^{10} 3 = 30$

วิธีทำ $\sum_{i=1}^{10} 3 = \underbrace{3+3+3+\dots+3}_{10 \text{ ตัว}} = 30$

ตัวอย่างที่ 50

จงหา $\sum_{i=1}^4 (i^2 - i + 1)$

วิธีทำ $\sum_{i=1}^4 (i^2 - i + 1) = (1^2 - 1 + 1) + (2^2 - 2 + 1) + (3^2 - 3 + 1) + (4^2 - 4 + 1)$
 $= 1 + 3 + 7 + 13$
 $= 24$

ตัวอย่างที่ 51

ให้ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ จงเขียน $2x + 4x^2 + 6x^3 + 8x^4 + 10x^5$ โดยใช้สัญลักษณ์ $\sum$

วิธีทำ $2x + 4x^2 + 6x^3 + 8x^4 + 10x^5 = 2 \cdot 1x^1 + 2 \cdot 2x^2 + 2 \cdot 3x^3 + 2 \cdot 4x^4 + 2 \cdot 5x^5$
 $= \sum_{i=1}^5 2ix^i$

ตัวอย่างที่ 52

จงหา $\sum_{i=1}^5 i^2$

วิธีทำ $\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$
 $= 1 + 4 + 9 + 16 + 25$
 $= 55$

ตัวอย่างที่ 53

จงแสดงว่า $\sum_{i=1}^{10} 2i^2 = 2 \sum_{i=1}^{10} i^2$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{10} 2i^2 &= 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + 2 \cdot 10^2 \\ &= 2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2) \\ &= 2 \sum_{i=1}^{10} i^2 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 54

จงแสดงว่า $\sum_{i=1}^{10} (i+3) = \sum_{i=1}^{10} i + \sum_{i=1}^{10} 3$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{10} (i+3) &= (1+3) + (2+3) + (3+3) + \cdots + (10+3) \\ &= (1+2+3+\cdots+10) + \underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{10 \text{ ตัว}} \\ &= \sum_{i=1}^{10} i + \sum_{i=1}^{10} 3 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 53 และ 54 สอดคล้องกับทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จะได้ว่า

1. $\sum_{i=1}^n c = nc$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
2. $\sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
3. $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$
4. $\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i$

การคำนวณหา $\sum_{i=1}^5 i^2$ โดยการบวกโดยตรงดังตัวอย่างที่ 52 ทำได้ง่าย เนื่องจากมีจำนวนพจน์น้อย แต่ในกรณีที่มีจำนวนพจน์มาก เช่น $\sum_{i=1}^{100} i^2$ อาจต้องใช้เครื่องคำนวณช่วย เพราะการบวกโดยตรงต้องใช้เวลามาก

ต่อไปนี้จะเป็นการหาสูตรผลบวกของอนุกรม $\sum_{i=1}^n i$, $\sum_{i=1}^n i^2$ และ $\sum_{i=1}^n i^3$ ซึ่งสูตรที่ได้จะช่วยให้การหาผลบวกของอนุกรมบางอนุกรมง่ายขึ้น

สูตรผลบวกของอนุกรม $\sum_{i=1}^n i$

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$$

เนื่องจาก $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$ เป็นอนุกรมเลขคณิต

$$\text{ดังนั้น } \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

สูตรผลบวกของอนุกรม $\sum_{i=1}^n i^2$

พิจารณา $\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$

เนื่องจาก $n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$ ----- (1)

$(n-1)^3 - (n-2)^3 = 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1$ ----- (2)

$(n-2)^3 - (n-3)^3 = 3(n-2)^2 - 3(n-2) + 1$ ----- (3)

 $\vdots$

$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1$ ----- (n-2)

$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1$ ----- (n-1)

$1^3 - 0^3 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1$ ----- (n)

จาก (1), (2), (3), ..., (n) จะได้

$$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n$$

$$= 3 \sum_{i=1}^n i^2 - 3 \frac{n(n+1)}{2} + n$$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3} \left(n^3 + \frac{3}{2}n(n+1) - n \right)$

$$= \frac{n}{3} \left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{2} \right)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

นั่นคือ $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

สูตรผลบวกของอนุกรม $\sum_{i=1}^n i^3$

พิจารณา $\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

เนื่องจาก $n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$ ----- (1)

$(n-1)^4 - (n-2)^4 = 4(n-1)^3 - 6(n-1)^2 + 4(n-1) - 1$ ----- (2)

$(n-2)^4 - (n-3)^4 = 4(n-2)^3 - 6(n-2)^2 + 4(n-2) - 1$ ----- (3)

 $\vdots$

$3^4 - 2^4 = 4 \cdot 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 1$ ----- (n-2)

$2^4 - 1^4 = 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 1$ ----- (n-1)

$1^4 - 0^4 = 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 1$ ----- (n)

จาก (1), (2), (3), ..., (n) จะได้

$$n^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) - 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 4(1 + 2 + 3 + \dots + n) - n$$

$$= 4 \sum_{i=1}^n i^3 - 6 \sum_{i=1}^n i^2 + 4 \sum_{i=1}^n i - n$$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{4} \left(n^4 + 6 \sum_{i=1}^n i^2 - 4 \sum_{i=1}^n i + n \right)$

$$= \frac{1}{4} \left(n^4 + 6 \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) - 4 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + n \right)$$

$$= \frac{1}{4} (n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n)$$

$$= \frac{1}{4} (n^4 + n(2n^2 + 3n + 1 - 2n - 2 + 1))$$

$$= \frac{1}{4} (n^4 + n(2n^2 + n))$$

$$= \frac{1}{4} (n^4 + 2n^3 + n^2)$$

$$= \frac{1}{4} (n^2 + n)^2$$

$$= \frac{1}{4} (n(n+1))^2$$

จะได้ $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{4} (n(n+1))^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2$

สรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 8

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จะได้ว่า

- $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2$

ตัวอย่างที่ 55

ถ้า $1+2+3+4+\dots+n=153$ จงหา n วิธีทำ เนื่องจาก $1+2+3+4+\dots+n=\sum_{i=1}^n i=\frac{n(n+1)}{2}$

$$\text{จะได้ } \frac{n(n+1)}{2} = 153$$

$$n^2 + n - 306 = 0$$

$$(n-17)(n+18) = 0$$

ดังนั้น $n=17$ หรือ $n=-18$ แต่ n เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น n คือ 17

ตัวอย่างที่ 56

จงแสดงว่าผลบวกของจำนวนคี่บวก n ตัวแรกเท่ากับ n^2 วิธีทำ ผลบวกของจำนวนคี่บวก n ตัวแรกเขียนแทนได้ด้วยอนุกรม $\sum_{k=1}^n (2k-1)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2k-1) &= \sum_{k=1}^n 2k - \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 2 \sum_{k=1}^n k - n \\ &= 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) - n \\ &= n(n+1) - n \\ &= n^2 + n - n \\ &= n^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนคี่บวก n ตัวแรกเท่ากับ n^2

ตัวอย่างที่ 57

จงหาผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรม $\sum_{i=1}^n (2i+5)^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n (2i+5)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (4i^2 + 20i + 25) \\ &= 4 \sum_{i=1}^n i^2 + 20 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 25 \\ &= 4 \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) + 20 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + 25n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น} \quad S_{20} &= 4\left(\frac{20(20+1)(2(20)+1)}{6}\right) + 20\left(\frac{20(20+1)}{2}\right) + 25(20) \\ &= 11,480 + 4,200 + 500 \\ &= 16,180\end{aligned}$$

นั่นคือ ผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรม $\sum_{i=1}^n (2i+5)^2$ เท่ากับ 16,180

ตัวอย่างที่ 58

จงหาผลบวกของอนุกรม $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (2n-1) \cdot 2n$

วิธีทำ ให้ S_n แทน $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (2n-1) \cdot 2n$

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad S_n &= \sum_{i=1}^n (2i-1)(2i) \\ &= \sum_{i=1}^n (4i^2 - 2i) \\ &= 4 \sum_{i=1}^n i^2 - 2 \sum_{i=1}^n i \\ &= 4\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) - 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= n(n+1)\left(\frac{2}{3}(2n+1) - 1\right) \\ &= n(n+1)\left(\frac{4n+2-3}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(4n-1)\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (2n-1) \cdot 2n = \frac{1}{3}n(n+1)(4n-1)$$

ตัวอย่างที่ 59

จงหาผลบวกของอนุกรม $\sum_{i=1}^n (i^3 - i + 1)$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \sum_{i=1}^n (i^3 - i + 1) &= \sum_{i=1}^n i^3 - \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} - \frac{n^2 + n}{2} + n \\ &= \frac{n^4 + 2n^3 - n^2 + 2n}{4} \\ &= \frac{n}{4}(n^3 + 2n^2 - n + 2)\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \sum_{i=1}^n (i^3 - i + 1) = \frac{n}{4}(n^3 + 2n^2 - n + 2)$$

ตัวอย่างที่ 60

จงหาผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรม $\sum_{i=1}^n \frac{4}{(4i-3)(4i+1)}$

$$\text{วิธีทำ} \quad \text{ให้ } S_n = \sum_{i=1}^n \frac{4}{(4i-3)(4i+1)}$$

$$\text{เนื่องจาก } \frac{4}{(4i-3)(4i+1)} = \frac{4i+1-4i+3}{(4i-3)(4i+1)} = \frac{1}{4i-3} - \frac{1}{4i+1} \text{ สำหรับทุกจำนวนนับ } i$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น} \quad S_n &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{4i-3} - \frac{1}{4i+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{4n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad S_{20} &= 1 - \frac{1}{4(20)+1} \\ &= \frac{80}{81}\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรม $\sum_{i=1}^n \frac{4}{(4i-3)(4i+1)}$ คือ $\frac{80}{81}$



แบบฝึกหัด 1.4

1. จงเขียนแทนสัญลักษณ์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปการบวก

- | | |
|---------------------------|------------------------------|
| 1) $\sum_{i=1}^4 2i$ | 2) $\sum_{i=4}^6 (3i-2)$ |
| 3) $\sum_{i=2}^7 (2-i)$ | 4) $\sum_{i=1}^{52} (i+2)$ |
| 5) $\sum_{k=1}^4 (10-2k)$ | 6) $\sum_{i=1}^{20} (i^2+4)$ |

2. จงหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $\sum_{j=1}^5 3j$ | 2) $\sum_{k=1}^{50} 8$ |
| 3) $\sum_{i=1}^4 i^2(i-3)$ | 4) $\sum_{k=2}^6 \frac{k+4}{k-1}$ |
| 5) $\sum_{k=1}^5 (k^2+3)$ | 6) $\sum_{i=1}^{15} (i+5)$ |
| 7) $\sum_{i=10}^{20} (2i+1)$ | 8) $\sum_{k=1}^{15} (k+5)(k-5)$ |
| 9) $\sum_{j=1}^{20} j^2(2j-3)$ | 10) $\sum_{i=1}^{10} (i-2)^3$ |

3. จงเขียนอนุกรมต่อไปนี้โดยใช้สัญลักษณ์ $\sum$

- 1) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + n(n+2) + \dots$
- 2) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n}$
- 3) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$
- 4) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{(3)(2^{n-1})} + \dots$
- 5) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} + \dots$

4. จงแสดงว่า

- | | |
|---|---|
| 1) $\sum_{i=1}^n 6i = 3n(n+1)$ | 2) $\sum_{i=1}^k (2i+1) = k^2 + 2k$ |
| 3) $\sum_{i=1}^m 3 \cdot 4^i = 4^{m+1} - 4$ | 4) $\sum_{i=1}^n (i^2 - i) = \frac{n^3 - n}{3}$ |

5. จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมต่อไปนี้

- 1) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) + \dots$
- 2) $1 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 5 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 9 + 4 \cdot 7 \cdot 10 + \dots + n(n+3)(n+6) + \dots$
- 3) $1(2+3) + 4(4+3) + 9(6+3) + 16(8+3) + \dots + n^2(2n+3) + \dots$
- 4) $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + (2n-1)^2 + \dots$
- 5) $1\left(1+\frac{1}{1}\right) + 2\left(1+\frac{1}{2}\right) + 3\left(1+\frac{1}{3}\right) + 4\left(1+\frac{1}{4}\right) + \dots + n\left(1+\frac{1}{n}\right) + \dots$

6. จงหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

- 1) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + \dots + 10 \cdot 11 \cdot 12$
- 2) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots + 99 \cdot 100$

7. จงหาผลบวกของจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100 ที่หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 3

8. จงหาผลบวก n พจน์แรก และผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรมต่อไปนี้

$$\begin{array}{ll} 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} & 2) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} \\ 3) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(i+2)} & 4) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+2)} \end{array}$$

9. จงหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมต่อไปนี้

$$\begin{array}{l} 1) 0+3+8+\cdots+(n^2-1)+\cdots \\ 2) -1+0+9+\cdots+(n^3-2n^2)+\cdots \end{array}$$

10. จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้า จงหาผลบวกของอนุกรม

$$\begin{array}{ll} 1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)} & 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{n-1} \\ 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{100^n} & 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} \\ 5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) & 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{5^n} \end{array}$$

11. ถ้าพจน์ที่ n ของอนุกรม คือ $2n-5$ จงหาผลบวก 15 พจน์แรกของอนุกรมนี้

12. จงหาผลบวกของจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 9 และ 199

- 1) เมื่อจำนวนดังกล่าวหารด้วย 8 ลงตัว
- 2) เมื่อจำนวนดังกล่าวหารด้วย 8 ไม่ลงตัว

1.5 การประยุกต์ของลำดับและอนุกรม

ในหัวข้อนี้เป็นการนำความรู้เรื่องลำดับและอนุกรมไปใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ดังนี้

ดอกเบี้ยทบต้น

การคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นเป็นกลไกที่นำดอกเบี้ยที่ได้รับทบเข้าไปกับเงินต้น ทำให้เงินต้นใหม่มียอดสูงขึ้น ดังนั้น เมื่อคิดดอกเบี้ยรอบใหม่ ดอกเบี้ยก็จะสูงขึ้น และเมื่อทบเข้าไปกับเงินต้นใหม่จะทำให้มีมูลค่าเงินสูงขึ้นเรื่อย ๆ โดยทั่วไปสถาบันการเงินจะแจ้งให้ทราบว่าคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นเมื่อสิ้นสุดระยะเวลาแต่ละงวดเท่าใด เช่น คำนวณดอกเบี้ยทุก 3 เดือน ทุก 6 เดือน หรือทุกปี เมื่อนำดอกเบี้ยที่คำนวณได้ไปรวมกับเงินต้น จะเรียกผลรวมนี้ว่าเงินรวม ซึ่งจะเป็นเงินต้นของการคำนวณดอกเบี้ยในงวดถัดไป ทำเช่นเดียวกันนี้ไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะครบระยะเวลาที่ลงทุน

ตัวอย่างที่ 61

ฝากเงิน 10,000 บาท กับธนาคารซึ่งให้อัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี จงหา

- 1) เงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 1 ปี
- 2) เงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 2 ปี

วิธีทำ 1) เงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 1 ปี หาได้จาก จำนวนเงินต้นรวมกับดอกเบี้ยของเงินต้น ดังนั้น เงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 1 ปี คือ $10,000 + 10,000(0.03) = 10,300$ บาท

2) เงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 2 ปี หาได้จาก เงินรวมของปีแรกรวมกับดอกเบี้ยที่ได้รับในปีที่สอง ดังนั้น เงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 2 ปี คือ $10,300 + 10,300(0.03) = 10,609$ บาท

ในกรณีทั่วไป ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น P บาท และอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี เมื่อกำหนดให้ $r = \frac{i}{100}$ จะสามารถหาจำนวนเงินรวมเมื่อสิ้นปีที่ n ได้ดังนี้

- เมื่อสิ้นปีที่ 1 ได้รับดอกเบี้ย Pr บาท รวมกับเงินต้น P บาท
จะได้ เงินรวม $P + Pr = P(1+r)$ บาท ซึ่งเงินจำนวนนี้จะเป็นเงินต้นของปีถัดไป

- เมื่อสิ้นปีที่ 2 ได้รับดอกเบี้ย $P(1+r) \cdot r$ บาท รวมกับเงินต้น $P(1+r)$ บาท
จะได้ เงินรวม $P(1+r) + P(1+r) \cdot r = P(1+r)(1+r) = P(1+r)^2$ บาท
ในทำนองเดียวกัน
- เมื่อสิ้นปีที่ 3 จะได้ เงินรวม $P(1+r)^3$ บาท
 $\vdots$
- เมื่อสิ้นปีที่ n จะได้ เงินรวม $P(1+r)^n$ บาท

ซึ่งสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 9

ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้น
ทุกปี (ปีละครั้ง) แล้วเมื่อสิ้นปีที่ n จะได้ เงินรวม $P(1+r)^n$ บาท เมื่อ $r = \frac{i}{100}$

เมื่อพิจารณาลำดับของเงินรวมเมื่อสิ้นปีที่ 1 ถึง n จะเห็นว่า $P(1+r), P(1+r)^2, \dots, P(1+r)^n$ เป็น
ลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรก คือ $P(1+r)$ และอัตราส่วนร่วม คือ $1+r$

ในกรณีที่มีการคิดดอกเบี้ยทบต้นมากกว่าปีละครั้ง เช่น ธนาคารคิดดอกเบี้ยทบต้นสำหรับเงินฝากใน
บัญชีออมทรัพย์ทุก 6 เดือน จะสามารถคำนวณเงินรวมได้จาก $P(1+r)^n$ เมื่อ P แทนเงินต้น n แทน
จำนวนงวด และ r แทนอัตราดอกเบี้ยที่คิดแบบทบต้นต่องวด

ในทางปฏิบัติอัตราดอกเบี้ยที่ระบุจะเป็นอัตราดอกเบี้ยต่อปี ดังนั้น ในการคำนวณจะต้องแปลงให้เป็น
อัตราดอกเบี้ยต่องวดเสียก่อน เช่น อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดทบต้นทุก 3 เดือน แสดงว่าใน 1 ปี
จะคิดดอกเบี้ยทบต้น 4 ครั้ง จะได้ อัตราดอกเบี้ยต่องวด คือ $\frac{6\%}{4} = 1.5\%$ หรือ 0.015

ตัวอย่างที่ 62

ฝากเงิน 50,000 บาท กับสถาบันการเงินที่ให้อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้น
ทุกสามเดือน เมื่อเวลาผ่านไป 5 ปี จะมีเงินรวมเท่าใด โดยที่ไม่มีการฝากและถอนเงินในระหว่างนี้

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ อัตราดอกเบี้ยต่องวด คือ $\frac{6\%}{4} = 1.5\%$ หรือ 0.015

จำนวนงวดทั้งหมดเท่ากับ $5(4) = 20$ งวด

ให้ a_i แทนเงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ i

จะได้ $a_1 = 50,000 + 50,000(0.015) = 50,000(1.015)$

$a_2 = a_1 + a_1(0.015) = a_1(1.015) = 50,000(1.015)^2$

$a_3 = a_2 + a_2(0.015) = a_2(1.015) = 50,000(1.015)^3$

$\vdots$

$a_{20} = a_{19} + a_{19}(0.015) = a_{19}(1.015) = 50,000(1.015)^{20}$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 5 ปี คือ $50,000(1.015)^{20}$ หรือประมาณ 67,342.75 บาท

หมายเหตุ จากตัวอย่างที่ 62 จะเห็นว่า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วม
เป็น 1.015

สามารถสรุปวิธีหาเงินรวมที่ได้จากการคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 10

ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้น
ปีละ k ครั้ง แล้วเมื่อฝากเงินครบ n ปี จะได้ เงินรวม $P\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kn}$ บาท เมื่อ $r = \frac{i}{100}$

ตัวอย่างที่ 63

ฝากเงิน 10,000 บาท กับธนาคารแห่งหนึ่งให้อัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละครั้ง จงหาเงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 10 ปี โดยที่ไม่มีการฝากและถอนเงินในระหว่างนี้

วิธีทำ ในที่นี้ $P = 10,000$, $k = 1$, $n = 10$ และ $r = 0.03$

จากทฤษฎีบท 10 จำนวนเงินรวม คือ $10,000(1+0.03)^{10}$ หรือประมาณ 13,439.16 บาท

ดังนั้น เมื่อฝากเงินครบ 10 ปี จะมีเงินรวมประมาณ 13,439.16 บาท ■

ตัวอย่างที่ 64

ฝากเงิน 10,000 บาท กับสถาบันการเงินแห่งหนึ่งให้อัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 6 เดือน จงหาเงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 10 ปี โดยที่ไม่มีการฝากและถอนเงินในระหว่างนี้

วิธีทำ ในที่นี้ $P = 10,000$, $k = 2$, $n = 10$ และ $r = 0.03$

จากทฤษฎีบท 10 จำนวนเงินรวม คือ $10,000\left(1+\frac{0.03}{2}\right)^{20}$ หรือประมาณ 13,468.55 บาท

ดังนั้น เมื่อฝากเงินครบ 10 ปี จะมีเงินรวมประมาณ 13,468.55 บาท ■

ตัวอย่างที่ 65

ฝากเงิน 10,000 บาท กับธนาคารแห่งหนึ่ง โดยธนาคารคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน เมื่อสิ้นปีที่ 3 ธนาคารแจ้งว่ามีเงินในบัญชีประมาณ 10,938 บาท จงหาอัตราดอกเบี้ยต่อปีที่ธนาคารกำหนด

วิธีทำ ในที่นี้ $P = 10,000$, $k = 4$ และ $n = 3$

จากทฤษฎีบท 10 จะได้

$$10,000\left(1+\frac{r}{4}\right)^{12} = 10,938$$

$$\left(1+\frac{r}{4}\right)^{12} = 1.0938$$

$$1+\frac{r}{4} = \sqrt[12]{1.0938}$$

$$r = 4\left(\sqrt[12]{1.0938}-1\right)$$

$$\approx 0.029998$$

ดังนั้น ธนาคารกำหนดอัตราดอกเบี้ยสำหรับเงินฝากนี้ประมาณ 3% ต่อปี ■

มูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต

สมมติว่าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น 1,000 บาท อัตราดอกเบี้ย 5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละครั้ง เมื่อฝากครบ 2 ปี จะได้เงินรวม $1,000(1+0.05)^2$ หรือ 1,102.5 บาท ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าเงิน 1,102.5 บาท เป็นมูลค่าอนาคต ส่วนเงิน 1,000 บาท เป็นมูลค่าปัจจุบัน

ถ้าลงทุน P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย $r\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง เป็นเวลา n ปี กำหนดให้ $r = \frac{i}{100}$ แล้วเมื่อครบ n ปี เงินรวมที่ได้ คือ

$$S = P\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kn}$$

เรียก S ว่า มูลค่าอนาคตของเงินต้น P

ในทางกลับกัน จะเรียก P ว่า มูลค่าปัจจุบันของเงินรวม S

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบัน P ของเงินรวม S คือ

$$P = S\left(1+\frac{r}{k}\right)^{-kn}$$

ตัวอย่างที่ 66

สายชลต้องการฝากเงินกับธนาคารแห่งหนึ่งซึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ย 5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน ถ้าสายชลต้องการให้มีเงินในบัญชีประมาณ 10,000 บาท เมื่อสิ้นสุดปีที่ 3 เขาต้องฝากเงินต้นไว้อย่างน้อยเท่าใด

วิธีทำ ในที่นี้ $S = 10,000$, $k = 12$, $n = 3$ และ $r = 0.05$
จะได้ มูลค่าปัจจุบันของเงินรวม 10,000 บาท คือ

$$P = 10,000 \left(1 + \frac{0.05}{12} \right)^{-36}$$

$$\approx 8,609.76$$

ดังนั้น สายชลควรนำเงินไปฝากอย่างน้อย 8,609.76 บาท

จากตัวอย่างที่ 66 จะกล่าวว่า 8,609.76 บาท เป็นมูลค่าปัจจุบันของเงิน 10,000 บาท

ตัวอย่างที่ 67

ดำรงได้รับมรดกเป็นเงิน 94,349.42 บาท จากคุณพ่อซึ่งฝากเงินจำนวนหนึ่งไว้กับธนาคารเมื่อ 15 ปีที่แล้ว โดยที่ไม่มีการฝากและถอนเงินในระหว่างนี้ ถ้าธนาคารคงอัตราดอกเบี้ย 2% ต่อปี และคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 6 เดือน จงหาเงินต้นที่คุณพ่อของดำรงฝากไว้เมื่อ 15 ปีก่อน

วิธีทำ ในที่นี้ $S = 94,349.42$, $k = 2$, $n = 15$ และ $r = 0.02$
จะได้ มูลค่าปัจจุบันของเงินรวม 94,349.42 บาท คือ

$$P = 94,349.42 \left(1 + \frac{0.02}{2} \right)^{-30}$$

$$\approx 70,000$$

ดังนั้น เมื่อ 15 ปีก่อน คุณพ่อของดำรงฝากเงินต้นไว้ประมาณ 70,000 บาท

ตัวอย่างที่ 68

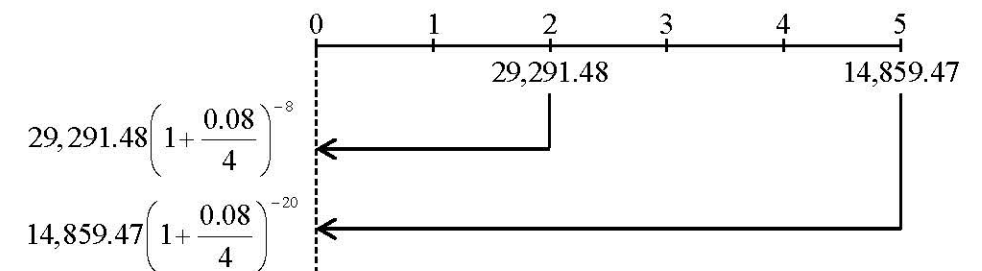
วารีกู้เงินจากณัชชา โดยมีกำหนดชำระหนี้ทั้งหมดในอีก 2 ปีข้างหน้า เป็นเงิน 46,656 บาท ถ้าณัชชากำหนดอัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี จงหาจำนวนเงินที่วารีกู้จากณัชชา

วิธีทำ ให้ P เป็นมูลค่าของหนี้ปัจจุบัน
ในที่นี้ $S = 46,656$, $k = 1$, $n = 2$ และ $r = 0.08$
จะได้ $P = 46,656(1+0.08)^{-2}$
 $= 40,000$
ดังนั้น วารีกู้เงินจากณัชชา 40,000 บาท

ตัวอย่างที่ 69

บุญตู่เงินจากวายุจำนวน 2 ยอด โดยยอดแรกต้องชำระ 29,291.48 บาท ในอีก 2 ปีข้างหน้า ส่วนยอดที่ 2 ต้องชำระ 14,859.47 บาท ในอีก 5 ปีข้างหน้า ถ้าวายุกำหนดอัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน จงหาจำนวนเงินทั้งหมดที่บุญตู่จากวายุ

วิธีทำ เนื่องจากบุญตู่เงินจากวายุจำนวน 2 ยอด ดังนั้น จะต้องหามูลค่าปัจจุบันของเงินแต่ละยอดแล้วจึงนำมารวมกัน



ยอดที่ 1 ในที่นี้ $S = 29,291.48$, $k = 4$, $n = 2$ และ $r = 0.08$

จะได้ มูลค่าปัจจุบันของเงิน 29,291.48 บาท คือ $29,291.48 \left(1 + \frac{0.08}{4} \right)^{-8}$
หรือประมาณ 25,000 บาท

ยอดที่ 2 ในที่นี้ $S = 14,859.47$, $k = 4$, $n = 5$ และ $r = 0.08$

จะได้ มูลค่าปัจจุบันของเงิน 14,859.47 บาท คือ $14,859.47 \left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^{-20}$

หรือประมาณ 10,000 บาท

ดังนั้น ปล่อยกู้เงินจากอายุทั้งหมดประมาณ $25,000 + 10,000 = 35,000$ บาท

ตัวอย่างที่ 70

ทุกวันที่ 1 มกราคม น้ำหวานจะฝากเงิน 1,000 บาท เข้าบัญชีธนาคารที่ให้ดอกเบี้ย 8% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี น้ำหวานจะได้เงินรวมเท่าใด

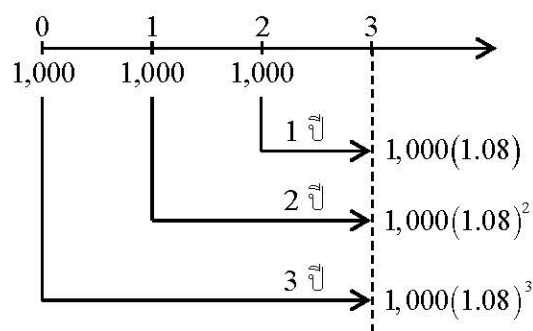
- 1) เมื่อสิ้นปีที่ 3
- 2) เมื่อสิ้นปีที่ 10

วิธีทำ 1) เมื่อสิ้นปีที่ 3

เงินฝากงวดแรกจะมีมูลค่าในอนาคตเท่ากับ $1,000(1.08)^3$ บาท

เงินฝากงวดที่สองจะมีมูลค่าในอนาคตเท่ากับ $1,000(1.08)^2$ บาท

เงินฝากงวดที่สามจะมีมูลค่าในอนาคตเท่ากับ $1,000(1.08)$ บาท



ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 3 น้ำหวานจะได้เงินรวม $1,000(1.08) + 1,000(1.08)^2 + 1,000(1.08)^3$ หรือประมาณ 3,506.11 บาท

- 2) เมื่อสิ้นปีที่ 10 เงินรวมของน้ำหวานคือ $1,000(1.08) + 1,000(1.08)^2 + \dots + 1,000(1.08)^{10}$ ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 10 พจน์ โดยพจน์แรก คือ $1,000(1.08)$ และอัตราส่วนร่วมคือ 1.08

จะได้ เงินรวม คือ $\frac{1,000(1.08)((1.08)^{10}-1)}{1.08-1}$ หรือประมาณ 15,645.49 บาท

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 10 น้ำหวานจะได้เงินรวมประมาณ 15,645.49 บาท

ตัวอย่างข้างต้นเป็นการแสดงวิธีหาเงินรวมจากการฝากเงินเป็นงวด ๆ จะเห็นว่าเมื่อจำนวนงวดมาก ๆ สามารถนำอนุกรมเรขาคณิตมาช่วยในการคำนวณได้ ซึ่งจะได้ศึกษารายละเอียดในหัวข้อต่อไป

ค่างวด

ในชีวิตประจำวัน นักเรียนคงได้พบเห็นการรับหรือจ่ายเงินเป็นงวด ๆ เช่น การฝากเงินในธนาคารเป็นประจำทุกเดือน การซื้อของแบบผ่อนส่ง การจ่ายค่าเช่าบ้านรายเดือน การจ่ายเบี้ยประกันรายปี การรับเงินเดือนทุกเดือน ซึ่งจะเรียกการรับหรือจ่ายเงินลักษณะนี้ว่า การรับหรือจ่ายค่างวด

การรับหรือจ่ายค่างวด มีลักษณะ 3 ประการ ดังนี้

1. รับหรือจ่ายเท่ากันทุกงวด
2. รับหรือจ่ายติดต่อกันทุกงวด
3. รับหรือจ่ายตอนต้นงวดหรือสิ้นงวด

ตัวอย่างการรับหรือจ่ายค่างวด เช่น การนำเงินไปฝากธนาคารทุกต้นปี ปีละ 20,000 บาท เป็นเวลา 6 ปี หรือการซื้อรถยนต์แบบผ่อนส่ง โดยทำสัญญากับผู้จำหน่ายรถยนต์ว่าจะผ่อนชำระทุกสิ้นเดือนเดือนละ 9,000 บาท เป็นเวลา 4 ปี

การหาเงินรวมของค่างวดทั้งหมด

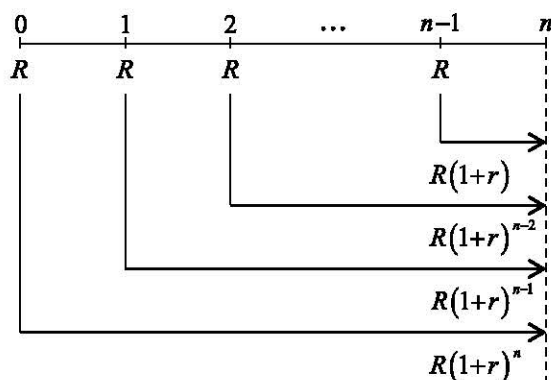
เมื่อมีการรับหรือจ่ายค่างวดติดต่อกันเป็นระยะเวลาหนึ่ง โดยกำหนดอัตราดอกเบี้ยคงที่ตลอดระยะเวลาดังกล่าว เมื่อสิ้นสุดระยะเวลาดังกล่าว เงินรวมของค่างวดทั้งหมดจะเท่ากับผลบวกของมูลค่าอนาคตของค่างวดแต่ละงวด การคำนวณหาเงินรวมทั้งหมดจะแบ่งเป็น 2 กรณี คือ ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนต้นงวด และค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนสิ้นงวด

ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนต้นงวด

พิจารณาการรับหรือจ่ายเงินแต่ละงวด โดยที่แต่ละงวดเป็นเงิน R บาท ซึ่งเริ่มรับหรือจ่ายเงินตอนต้นงวด รวมทั้งหมด n งวด และอัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น $i\%$

$$\text{ให้ } r = \frac{i}{100}$$

จะได้ แผนภาพแสดงค่างวดแต่ละงวด ดังนี้



จะได้ เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $R(1+r) + R(1+r)^2 + \dots + R(1+r)^n$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี n พจน์ โดยพจน์แรก คือ $R(1+r)$ และอัตราส่วนร่วม คือ $1+r$

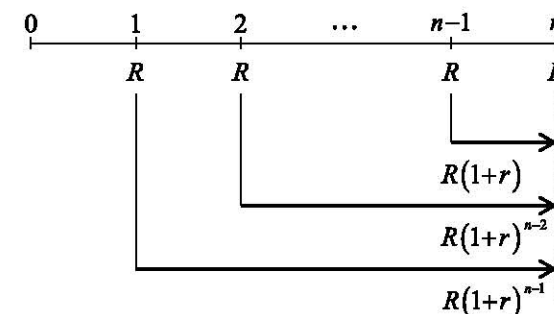
ดังนั้น เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $\frac{R(1+r)((1+r)^n - 1)}{(1+r) - 1}$ ซึ่งเท่ากับ $\frac{R(1+r)((1+r)^n - 1)}{r}$

ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนสิ้นงวด

พิจารณาการรับหรือจ่ายเงินแต่ละงวด โดยที่แต่ละงวดเป็นเงิน R บาท ซึ่งเริ่มรับหรือจ่ายเงินตอนสิ้นงวด รวมทั้งหมด n งวด และอัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น $i\%$

$$\text{ให้ } r = \frac{i}{100}$$

จะได้ แผนภาพแสดงค่างวดแต่ละงวด ดังนี้



จะได้ เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $R + R(1+r) + R(1+r)^2 + \dots + R(1+r)^{n-1}$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี n พจน์ โดยพจน์แรก คือ R และอัตราส่วนร่วม คือ $1+r$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $\frac{R((1+r)^n - 1)}{(1+r) - 1}$ ซึ่งเท่ากับ $\frac{R((1+r)^n - 1)}{r}$

ตัวอย่างที่ 71

เพ็ญฝากเงิน 100 บาท เข้าบัญชีธนาคารทุกต้นเดือน ได้รับอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 2 เพ็ญจะได้เงินรวมเท่าใด

วิธีทำ เพ็ญฝากเงินหรือจ่ายค่างวดตอนต้นงวดทุกเดือนเป็นเวลา 2 ปี

ในที่นี้ $R = 100$, $n = 24$, $i = \frac{6}{12} = 0.5$ และ $r = \frac{0.5}{100} = 0.005$

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 2 เงินรวมของเพ็ญ คือ

$$100(1.005) + 100(1.005)^2 + \dots + 100(1.005)^{24}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 24 พจน์ โดยพจน์แรก คือ $100(1.005)$ และอัตราส่วนร่วม คือ 1.005

จะได้ เงินรวม คือ $\frac{100(1.005)((1.005)^{24} - 1)}{1.005 - 1}$ หรือประมาณ 2,555.91 บาท

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 2 เพ็ญจะได้เงินรวมประมาณ 2,555.91 บาท

ตัวอย่างที่ 72

สายฟ้าฝากเงิน 100 บาท เข้าบัญชีธนาคารทุกสิ้นเดือน ได้รับอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 2 สายฟ้าจะได้เงินรวมเท่าใด

วิธีทำ สายฟ้าฝากเงินหรือจ่ายค่างวดตอนสิ้นงวดทุกเดือนเป็นเวลา 2 ปี

ในที่นี้ $R = 100$, $n = 24$, $i = \frac{6}{12} = 0.5$ และ $r = \frac{0.5}{100} = 0.005$

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 2 เงินรวมของสายฟ้า คือ

$$100 + 100(1.005) + 100(1.005)^2 + \dots + 100(1.005)^{23}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 24 พจน์ โดยพจน์แรก คือ 100 และอัตราส่วนร่วม คือ 1.005

จะได้ เงินรวม คือ $\frac{100((1.005)^{24} - 1)}{1.005 - 1}$ หรือประมาณ 2,543.20 บาท

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 2 สายฟ้าจะได้เงินรวมประมาณ 2,543.20 บาท

จากตัวอย่างที่ 71 และ 72 จะได้ว่าการฝากเงินทุกต้นงวดและทุกสิ้นงวด มีผลทำให้เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n มีจำนวนแตกต่างกัน โดยการฝากตอนต้นงวดจะได้รับเงินรวมมากกว่าการฝากตอนสิ้นงวด

อีกตัวอย่างหนึ่งของค่างวดที่พบเห็นได้ทั่วไป คือ ในการซื้อสินค้าแบบผ่อนส่ง โดยจะประกอบด้วยสองส่วน คือ เงินดาวน์ ซึ่งจ่ายทันทีเมื่อมีการตกลงซื้อขายกัน และเงินผ่อน ซึ่งจ่ายเป็นรายงวด โดยจ่ายเท่ากันทุกงวดติดต่อกันจนครบกำหนด ซึ่งเมื่อนำเงินดาวน์บวกกับผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนแต่ละงวด จะต้องเท่ากับราคาสินค้าเมื่อซื้อด้วยเงินสด

ตัวอย่างที่ 73

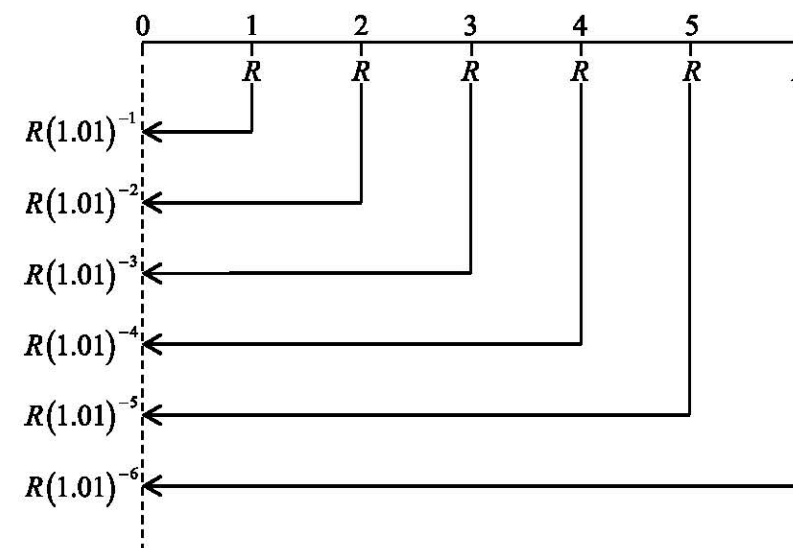
น้ำทิพย์ซื้อเครื่องซักผ้าราคา 20,000 บาท โดยตกลงจ่ายเงินดาวน์ 5,000 บาท และผ่อนชำระส่วนที่เหลือเป็นจำนวนเงินเท่ากันทุกเดือน เป็นเวลา 6 เดือน โดยผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน ถ้าอัตราดอกเบี้ย 12% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือนแล้ว น้ำทิพย์จะต้องผ่อนชำระเดือนละเท่าใด

วิธีทำ ให้ R แทนค่างวดที่น้ำทิพย์ต้องผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน

ในที่นี้ $i = \frac{12}{12} = 1$ และ $r = 0.01$

เนื่องจากน้ำทิพย์จ่ายเงินดาวน์ 5,000 บาท ทำให้เหลือเงินที่ต้องชำระอีก 15,000 บาท

โดยน้ำทิพย์จะผ่อนชำระทุกสิ้นเดือนเป็นเวลา 6 เดือน ดังนั้น จะต้องหามูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนแต่ละงวด แล้วจึงนำมารวมกัน



จากแผนภาพ จะได้ มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 1, 2, ..., 6 คือ

$R(1.01)^{-1}, R(1.01)^{-2}, \dots, R(1.01)^{-6}$ ตามลำดับ

นั่นคือ ผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนทั้งหมดคือ

$$R(1.01)^{-1} + R(1.01)^{-2} + \dots + R(1.01)^{-6}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 6 พจน์ โดยพจน์แรก คือ $R(1.01)^{-1}$ และอัตราส่วนร่วมคือ $(1.01)^{-1}$

ดังนั้น ผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนทั้งหกงวด คือ $\frac{R(1.01)^{-1}(1-(1.01)^{-6})}{1-(1.01)^{-1}}$

เนื่องจากน้ำทิพย์เหลือเงินที่ต้องชำระอีก 15,000 บาท จะได้ว่า

$$15,000 = \frac{R(1.01)^{-1}(1-(1.01)^{-6})}{1-(1.01)^{-1}}$$

$$R = \frac{15,000(1-(1.01)^{-1})}{(1.01)^{-1}(1-(1.01)^{-6})}$$

$$\approx 2,588.23$$

ดังนั้น น้ำทิพย์จะต้องผ่อนชำระเดือนละประมาณ 2,588.23 บาท



แบบฝึกหัด 1.5

1. สมมติว่าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น 100,000 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย 4% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี จงหา
 - 1) จำนวนเงินเมื่อฝากเงินครบ 10 ปี
 - 2) จำนวนปีที่จะทำให้มีเงินเพิ่มขึ้นเป็นอย่างน้อยสามเท่าของเงินต้น
2. ฝากเงินกับธนาคารจำนวน 100,000 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี จงหาจำนวนเงินในบัญชีเมื่อครบปีที่ n เมื่อ
 - 1) ธนาคารคิดดอกเบี้ยให้ครั้งสุดท้ายครั้งเดียว
 - 2) ธนาคารนำดอกเบี้ยเข้าบัญชีเงินฝากทุกปี
3. สมมติว่าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น 100,000 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย 4% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกไตรมาส (ทุก 3 เดือน) จงหาเงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 10 ปี
4. สมมติว่าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น 100,000 บาท เมื่อฝากเงินครบ 10 ปี มีเงินทั้งสิ้น 141,060 บาท ถ้าธนาคารคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี จงหาอัตราดอกเบี้ยต่อปี

5. เมื่อต้นปีปัญญาฝากเงิน 100,000 บาท กับธนาคารแห่งหนึ่ง และฝากเงินเพิ่มอีก 100,000 บาท ทุกต้นปี โดยธนาคารกำหนดอัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี และคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี จงหาเงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 15 ปี
6. ราตรีต้องการฝากเงินกับธนาคารแห่งหนึ่ง ซึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ย 4% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี ถ้าราตรีต้องการให้มีเงินในบัญชี 1,000,000 บาท ในอีก 20 ปีข้างหน้า ราตรีต้องฝากเงินต้นไว้อย่างน้อยเท่าใด โดยที่
 - 1) ราตรีไม่ฝากเงินเพิ่มอีก
 - 2) ราตรีฝากเงินเพิ่มอีกปีละ 2,000 บาท
7. อนันต์กู้เงินจากวิเชียรจำนวน 2 ยอด โดยยอดแรกต้องชำระ 12,682.42 บาท ในอีก 3 ปีข้างหน้า ส่วนยอดที่ 2 ต้องชำระ 26,115.36 บาท ในอีก 7 ปีข้างหน้า ถ้าวิเชียรกำหนดอัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน จงหาจำนวนเงินทั้งหมดที่อนันต์กู้จากวิเชียร
8. สุดาฝากเงิน 2,000 บาท เข้าบัญชีธนาคารทุกต้นเดือน ได้รับอัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 5 สุดาจะได้เงินรวมเท่าใด
9. ทอแสงฝากเงิน 3,000 บาท เข้าบัญชีธนาคารทุกสิ้นไตรมาส (1 ไตรมาส เท่ากับ 3 เดือน) ได้รับอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกไตรมาส เมื่อสิ้นปีที่ 4 ทอแสงจะได้เงินรวมเท่าใด
10. ใบเตยซื้อรถยนต์ราคา 700,000 บาท โดยตกลงจ่ายเงินดาวน์ 200,000 บาท และผ่อนชำระส่วนที่เหลือเป็นจำนวนเงินเท่ากันทุกเดือน เป็นเวลา 5 ปี โดยผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน ถ้าอัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือนแล้ว ใบเตยจะต้องผ่อนชำระเดือนละเท่าใด
11. วัชรฝากเงิน 10,000 บาท เข้าบัญชีธนาคารทุกต้นเดือน ได้รับอัตราดอกเบี้ย 3.6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 4 วัชรจะได้เงินรวมเท่าใด



แบบฝึกหัดท้ายบท

- 1 จงหาพจน์ของลำดับเลขคณิตที่กำหนดในแต่ละข้อต่อไปนี้
 - 1) a_8 เมื่อกำหนดให้ $a_1 = -4$ และ $d = -5$
 - 2) a_9 เมื่อกำหนดให้ $a_1 = -5$ และ $d = 2$
 - 3) a_{15} เมื่อกำหนดให้ $a_1 = -\frac{1}{2}$ และ $d = -2$
 - 4) a_{15} เมื่อกำหนดให้ $a_1 = \frac{4}{3}$ และ $d = \frac{1}{3}$
- 2 จงหาพจน์ที่ 100 ของลำดับเลขคณิตที่มีพจน์ที่ 7 คือ 5 และพจน์ที่ 12 คือ 10
- 3 ถ้าสามพจน์แรกของลำดับเลขคณิต คือ 20, 16 และ 12 แล้ว -96 เป็นพจน์ที่เท่าใดของลำดับนี้
- 4 ถ้า 5 และ 29 เป็นพจน์สองพจน์ของลำดับเลขคณิตที่มีพจน์อีกห้าพจน์อยู่ระหว่างพจน์ทั้งสองนี้ จงหาพจน์ห้าพจน์ดังกล่าว
- 5 ถ้า $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ เป็นลำดับเลขคณิตแล้ว จงแสดงว่า a^2, b^2, c^2 เป็นลำดับเลขคณิต
6. จงหาผลบวกของมุมภายในของรูป n เหลี่ยม โดยใช้ความรู้เรื่องลำดับเลขคณิต พร้อมทั้งแสดงวิธีคิด
- 7 จัดแผ่นไม้ที่มีขนาดเท่ากันกองหนึ่งวางซ้อนกัน โดยเริ่มจากวางแผ่นไม้ในชั้นล่างเรียงตามแนวยาวชิดกันจำนวน 52 แผ่น จากนั้นวางแผ่นไม้ในชั้นที่ 2 โดยให้แนวกึ่งกลางตามด้านยาวของแผ่นไม้แต่ละแผ่นอยู่ตรงกับรอยต่อของแผ่นไม้แต่ละคู่ในชั้นแรก ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนชั้นบนสุดมีแผ่นไม้ 7 แผ่น จงหาความสูงของแผ่นไม้กองนี้ ถ้าแผ่นไม้แต่ละแผ่นหนา 3 เซนติเมตร

- 8 ฟางข้าวมีเงินเก็บ 4,200 บาท และไบบัวมีเงินเก็บ 7,000 บาท ถ้าตั้งแต่เดือนตุลาคม 2560 ฟางข้าวออมเงินเพิ่มเติมเดือนละ 300 บาท และไบบัวออมเงินเพิ่มเติมเดือนละ 250 บาท จงหาว่า
 - 1) เมื่อใดฟางข้าวจึงจะมีเงินเก็บ 12,300 บาท และขณะนั้นไบบัวจะมีเงินเก็บเท่าใด
 - 2) ถ้าไบบัวต้องการนำเงินเก็บไปซื้อคอมพิวเตอร์ราคา 24,700 บาท ไบบัวจะต้องออมเงินอย่างน้อยกี่เดือน
 - 3) เมื่อใดฟางข้าวจึงจะมีเงินเก็บมากกว่าไบบัว
- 9 จงหาพจน์ที่ 12 ของลำดับเรขาคณิต $-162, 54, -18, 6, \dots$
- 10 จงหาอัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตที่มี $a_2 = \frac{8}{3}$ และ $a_5 = \frac{64}{81}$
- 11 5,103 เป็นพจน์ที่เท่าใดของลำดับเรขาคณิต $7, -21, 63, -189, \dots$
- 12 จงหาจำนวนที่บวกกับ 5, 22 และ 107 แล้ว ผลบวกที่ได้เป็นพจน์สามพจน์ที่เรียงติดกันในลำดับเรขาคณิต
- 13 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิตที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่มีผลบวกและผลคูณของสามพจน์แรกเป็น -3 และ 8 ตามลำดับ
- 14 การรณรงค์ลดการใช้ถุงพลาสติกในอำเภอหนึ่ง ทำให้จำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้วลดลงปีละ 5% ถ้าในปีที่เริ่มต้นการรณรงค์มีจำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้ว 100,000 ถุง จงหาสูตรการคำนวณจำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้วในแต่ละปี พร้อมทั้งหาจำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้วในปีที่ 10
- 15 เมือง A มีพื้นที่ป่า 400 ตารางกิโลเมตร โดยพื้นที่ป่าลดลงทุกปีเฉลี่ยปีละ 4% และเมือง B มีพื้นที่ป่า 60 ตารางกิโลเมตร โดยพื้นที่ป่าเพิ่มขึ้นทุกปีเฉลี่ยปีละ 2% จงหาว่า
 - 1) อีก 10 ปีข้างหน้า เมืองใดจะมีพื้นที่ป่ามากกว่ากัน และมีพื้นที่ป่ามากกว่าอีกเมืองเท่าใด
 - 2) อีกอย่างน้อยกี่ปี เมือง B จึงจะมีพื้นที่ป่ามากกว่าเมือง A

16 จงหาพจน์ที่ขาดหายไปของลำดับเลขคณิตหรือลำดับเรขาคณิตต่อไปนี้

- 1) $11, \frac{27}{2}, 16, _, _, _ \quad 2) \frac{7}{11}, \frac{11}{7}, _, \frac{265}{77}, _, _$
 3) $6, 4, \frac{8}{3}, _, _, _ \quad 4) \frac{5}{6}, -\frac{5}{3}, _, -\frac{20}{3}, _, _$

17. จงหาจำนวนจริง a, b และ c ทั้งหมดที่ a, b, c เป็นลำดับเรขาคณิต และ b, a, c เป็นลำดับเลขคณิต

18 ให้พจน์ที่หนึ่งและพจน์ที่สองของลำดับเลขคณิตเท่ากับพจน์ที่หนึ่งและพจน์ที่สองของลำดับเรขาคณิต ตามลำดับ และพจน์ที่สามของลำดับเรขาคณิตมากกว่าพจน์ที่สามของลำดับเลขคณิตอยู่ 2.5 ถ้าพจน์แรกของลำดับทั้งสอง คือ 10 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิตดังกล่าว

19 บริษัท A และบริษัท B มีเงื่อนไขในการให้เงินเดือนเจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคล ดังนี้

- บริษัท A ให้เงินเดือนเริ่มต้น 20,000 บาท และแต่ละปีจะขึ้นเงินเดือนให้ 1,500 บาท
- บริษัท B ให้เงินเดือนเริ่มต้น 20,000 บาท และแต่ละปีจะขึ้นเงินเดือนให้ 5%

1) จงเขียนลำดับแทนเงินเดือนเจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของบริษัท A และบริษัท B ในแต่ละปี

2) จงหาผลต่างของเงินเดือนในปีที่ 10 ของเจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของทั้งสองบริษัท

20 จงเขียนกราฟเพื่อตรวจสอบว่าลำดับที่มีพจน์ทั่วไปในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้า จงหาขีดจำกัด

- 1) $a_n = 2 \cos \frac{n\pi}{6} \quad 2) a_n = \frac{1}{n} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{12} \right)$
 3) $a_n = \frac{8}{n^2 + 8} \quad 4) a_n = \frac{\log(n+10)}{n}$
 5) $a_n = \frac{2^n}{n^2} \quad 6) a_n = \frac{2^n}{n!}$

21 จงใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับขีดจำกัดของลำดับเพื่อตรวจสอบว่าลำดับที่มีพจน์ทั่วไปในแต่ละข้อเป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้า จงหาขีดจำกัด

- 1) $a_n = \frac{1}{2n^2 + 1} \quad 2) a_n = \frac{2^n}{7^n}$
 3) $a_n = (-1)^{4n+3} \quad 4) a_n = 3 \left(\frac{5}{2} \right)^n$
 5) $a_n = 2 + \frac{n}{3} \quad 6) a_n = \frac{3n^2(n-2)!}{n!}$
 7) $a_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{n} \quad 8) a_n = \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{2n}$
 9) $a_n = \frac{(n+1)^2}{(n-1)^2 + 1} \quad 10) a_n = \frac{3^{n-3}}{2^{n+3}}$
 11) $a_n = \frac{4^{n+1} + 2^{3n+2}}{3^{2n}} \quad 12) a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n+1}}$
 13) $a_n = \sqrt{\frac{n^3 + 8}{8n^3 + n - 8}} \quad 14) a_n = \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{2n}$
 15) $a_n = n - \frac{n^2 + 3}{n - 7} \quad 16) a_n = \frac{n+1}{2} + \frac{n-3n^2}{6n-5}$

22 กำหนดลำดับ $a_n = \frac{2n^4 - n^2}{3n^4 + 13}$ จงพิจารณาว่าวิธีการหาขีดจำกัดของลำดับ a_n ที่แสดงดังต่อไปนี้ถูกต้องหรือไม่ ถ้าไม่ถูกต้อง จงให้เหตุผล

$$\text{โดยทฤษฎีบทเกี่ยวกับขีดจำกัดของลำดับ จะได้ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - n^2}{3n^4 + 13} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^4 - n^2)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^4 + 13)}$$

แต่เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^4 - n^2)$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^4 + 13)$ ไม่มีค่า

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - n^2}{3n^4 + 13}$ จึงไม่มีค่า

23 กำหนดลำดับ $a_n = \left(\frac{2x^2 + 1}{x^2 + 5} \right)^n$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็ม จงหา x ที่ทำให้ a_n เป็นลำดับลูเข้า

24 จงหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิต $19 + 23 + 27 + \dots + 999$

25 จงหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต เมื่อกำหนดให้

- 1) $n = 40$ และลำดับเลขคณิต คือ 2, 6, 10, 14, ...
- 2) $n = 70$ และลำดับเลขคณิต คือ 20, 17, 14, 11, ...
- 3) $n = 100$ และลำดับเลขคณิต คือ $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \dots$

26 จงหาผลบวกของจำนวนที่ 7 หารลงตัว ตั้งแต่ 9 ถึง 357

27 ลำดับเลขคณิตลำดับหนึ่งมีพจน์ที่ 4 คือ 11 และพจน์ที่ 9 คือ -4 จงหาผลบวกของพจน์ที่ 12 ถึงพจน์ที่ 25

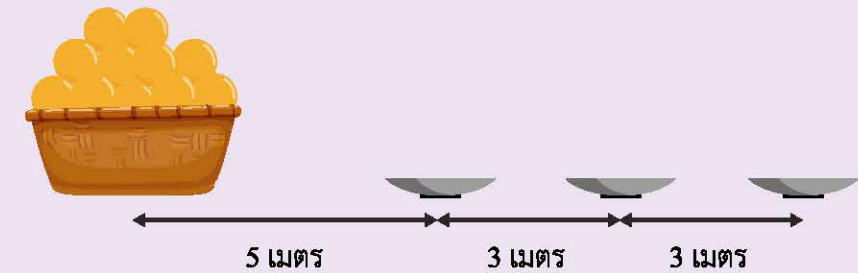
28 โรงละครแห่งหนึ่งต้องการจัดเก้าอี้สำหรับการแสดงใหญ่ที่จะจัดขึ้น โดยจัดเก้าอี้แถวแรกไว้ 12 ตัว แถวที่สอง 14 ตัว แถวที่สาม 16 ตัว เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จงหาว่า

- 1) ถ้าต้องการจัดเก้าอี้ไว้ทั้งหมด 20 แถว จะต้องใช้เก้าอี้ทั้งหมดกี่ตัว
- 2) ถ้าโรงละครแห่งนี้ต้องการจัดที่นั่ง 600 ที่นั่ง จะต้องจัดเก้าอี้ทั้งหมดกี่แถว และแถวสุดท้ายมีเก้าอี้ทั้งหมดกี่ตัว

29 โรงเรียนแห่งหนึ่งจัดการแข่งขันวิ่งวิบาก โดยมีกติกา ดังนี้

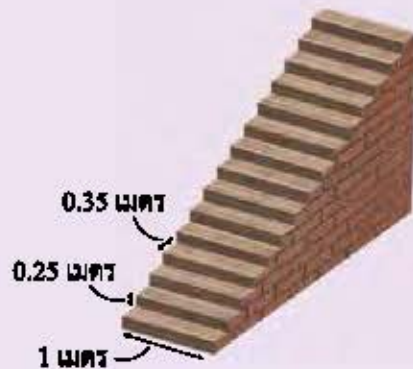
- ให้ผู้เข้าแข่งขันเริ่มต้นที่จุดวางตะกร้าใส่ลูกปิงปองของแต่ละคน
- ใช้ช้อนตักลูกปิงปอง 1 ลูกจากตะกร้า แล้วนำลูกปิงปองไปใส่ขามใบที่ใกล้ตะกร้าที่สุด
- กลับไปตักลูกปิงปองอีก 1 ลูกจากตะกร้า แล้วนำลูกปิงปองไปใส่ขามใบที่ใกล้ตะกร้าใบถัดไป
- ถ้าผู้เข้าแข่งขันทำลูกปิงปองตกจากช้อน ให้กลับไปตักลูกปิงปองจากตะกร้า แล้วจึงทำการแข่งขันต่อไป โดยไม่ต้องเริ่มใหม่
- ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนผู้เข้าแข่งขันนำลูกปิงปองไปใส่ขามครบทุกใบ แล้วกลับไปจุดเริ่มต้น
- ผู้เข้าแข่งขันที่ใช้เวลาน้อยที่สุดเป็นผู้ชนะ

ถ้าเรียกขามใบที่ใกล้ตะกร้าที่สุดว่า ขามใบที่ 1 เรียกขามใบที่ใกล้ตะกร้าใบถัดไปว่า ขามใบที่ 2 เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ โดยวางตะกร้าใส่ลูกปิงปองห่างจากขามใบที่ 1 เป็นระยะทาง 5 เมตร และขามใบที่ติดกันอยู่ห่างกัน 3 เมตร ดังรูป



- 1) จงหาระยะทางระหว่างตะกร้ากับขามใบที่ 1
- 2) จงหาระยะทางระหว่างตะกร้ากับขามใบที่ 2
- 3) จงหาระยะทางระหว่างตะกร้ากับขามใบที่ 3
- 4) จงหาระยะทางระหว่างตะกร้ากับขามใบที่ n
- 5) ถ้าระยะทางระหว่างตะกร้ากับขามใบสุดท้ายเท่ากับ 23 เมตร จงหาจำนวนขามทั้งหมด
- 6) จากข้อ 5) จงหาระยะทางจากจุดเริ่มต้นจนถึงจุดการแข่งขัน
 - 6.1) ถ้าผู้เข้าแข่งขันไม่ทำลูกปิงปองตกเลย
 - 6.2) ถ้าผู้เข้าแข่งขันทำลูกปิงปองตกระหว่างที่นำลูกปิงปองไปใส่ในขามใบที่ 4 โดยทำตกห่างจากตะกร้า 3 เมตร

- 30) บันไดทางขึ้นวัดแห่งหนึ่งสร้างด้วยอิฐเป็นทรงตันจำนวน 15 ชั้น โดยบันไดแต่ละชั้นยาว 1 เมตร กว้าง 0.35 เมตร และสูง 0.25 เมตร จงหาปริมาณของอิฐที่ใช้สร้างบันไดนี้



- 31) จงหาผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต $6+18+54+\dots+1,458$

- 32) จงหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต เมื่อกำหนดให้

- 1) $n=30$ และลำดับเรขาคณิต คือ 1, 4, 16, 64, ...
- 2) $n=43$ และลำดับเรขาคณิต คือ $-\frac{3}{32}, \frac{3}{16}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \dots$
- 3) $n=28$ และลำดับเรขาคณิต คือ $\frac{27}{32}, \frac{9}{16}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \dots$

- 33) ลำดับเรขาคณิตลำดับหนึ่งมีพจน์ที่ 5 คือ -4 และพจน์ที่ 8 คือ $\frac{1}{2}$ จงหาผลบวกของพจน์ที่ 2 ถึงพจน์ที่ 9

- 34) วิทยามีเงิน 6,561 บาท ถ้าเขาไปเที่ยวและใช้เงินทุกวัน โดยที่แต่ละวันใช้เงิน $\frac{1}{3}$ ของเงินที่มีอยู่ จงหาว่าเมื่อครบ 8 วัน เขาจะมีเงินเหลือเท่าใด

- 35) รายการถูกฟังเสียงทองเป็นรายการแข่งขันร้องเพลงถูกฟัง เพื่อค้นหาสุดยอดนักร้องถูกฟังเสียงทองจากผู้เข้าแข่งขันที่ผ่านการคัดเลือกมาแล้วจำนวน 32 คน โดยการแข่งขันรอบแรก ผู้เข้าแข่งขัน 16 คู่ จะต้องประชันเสียงร้องเพลง เพื่อให้กรรมการตัดสินว่าใครคือผู้ชนะในแต่ละคู่ ซึ่งผู้ชนะจะมีสิทธิ์ได้เข้าแข่งขันในรอบต่อไป และดำเนินการแข่งขันเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จนได้ผู้ชนะในรอบสุดท้ายเป็นสุดยอดนักร้องถูกฟังเสียงทอง จงหาว่า

- 1) ในรอบที่ ๘ มีผู้เข้าแข่งขันกี่คู่
- 2) รายการถูกฟังเสียงทองมีการแข่งขันทั้งหมดกี่รอบ
- 3) รายการถูกฟังเสียงทองมีการแข่งขันทั้งหมดกี่คู่

- 36) คอนโดมิเนียมแห่งหนึ่งมีโครงการกำจัดแมลงสาบภายในอาคาร โดยได้ประมาณจำนวนแมลงสาบที่มีอยู่ขณะเริ่มต้นโครงการไว้ 6,000 ตัว หลังจากวางยากำจัดแมลงสาบในจุดต่าง ๆ ภายในอาคาร พบว่า อัตราการลดลงของจำนวนแมลงสาบเท่ากับ 17% ต่อวัน ถ้าไม่มีแมลงสาบเพิ่มขึ้นในระยะเวลา 7 วัน นับจากเริ่มต้นโครงการ จงหา

- 1) จำนวนแมลงสาบที่ถูกกำจัดในวันที่เริ่มต้นโครงการ
- 2) จำนวนแมลงสาบที่เหลืออยู่หลังจากดำเนินโครงการไปแล้ว 1 วัน
- 3) จำนวนแมลงสาบทั้งหมดที่ถูกกำจัดหลังจากดำเนินโครงการไปแล้ว 7 วัน
- 4) จำนวนแมลงสาบที่เหลืออยู่หลังจากดำเนินโครงการไปแล้ว 7 วัน

- 37) เศรษฐีคนหนึ่งต้องการจ้างพรานป่าล่าทางไปหารากไม้หายากชนิดหนึ่งในป่าลึก เพื่อนำมาสกัดเป็นยาอายุวัฒนะ โดยพรานป่าได้คาดการณ์ไว้แล้วว่าน่าจะใช้เวลาในการปฏิบัติการทั้งหมดอย่างน้อย 25 วัน เขาจึงเสนอให้เศรษฐีเลือกจ่ายค่าตอบแทนแบบใดแบบหนึ่งในสองแบบต่อไปนี้

แบบที่ 1 จ่ายเงินวันละ 50,000 บาท

แบบที่ 2 วันแรกจ่ายเงิน 5 สตางค์ วันที่ 2 จ่ายเงิน 10 สตางค์ วันที่ 3 จ่ายเงิน 20 สตางค์ ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนปฏิบัติการเสร็จสิ้น

จงหาว่า

- 1) ถ้าเศรษฐีทราบระยะเวลาที่พรานป่าคาดการณ์ เศรษฐีควรเลือกจ่ายค่าตอบแทนแบบใด จึงจะประหยัดเงินที่สุด
- 2) ถ้าเศรษฐีเลือกจ่ายค่าตอบแทนแบบที่เลือกในข้อ 1) และการปฏิบัติการใช้เวลาทั้งสิ้น 30 วัน เศรษฐีจะประหยัดเงินกว่าการจ่ายค่าตอบแทนอีกแบบเป็นจำนวนเงินเท่าใด
- 3) ถ้าการปฏิบัติการผิดพลาดไปจากที่พรานป่าคาดการณ์ โดยใช้เวลาไม่ถึง 25 วัน การจ่ายค่าตอบแทนแบบที่เลือกในข้อ 1) ยังจะประหยัดกว่าอีกแบบหรือไม่

38 จงพิจารณาว่าอนุกรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นอนุกรมเลขคณิตหรืออนุกรมเรขาคณิต พร้อมทั้งหาผลบวกของอนุกรม

- 1) $2+8+32+\cdots+8,192$
- 2) $7+14+21+\cdots+98$
- 3) $\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\cdots+30$
- 4) $16+8+4+\cdots+\frac{1}{32}$
- 5) $(-1)+3+(-9)+\cdots+(-729)$
- 6) $-10-6-2+\cdots+90$

39 จงหาลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมต่อไปนี้

- 1) $5+3+\frac{9}{5}+\cdots+5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+\cdots$
- 2) $\frac{9}{25}+\frac{3}{5}+1+\cdots+\frac{9}{25}\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}+\cdots$
- 3) $\frac{1}{9}+\left(-\frac{1}{27}\right)+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n+1}}+\cdots$
- 4) $1+(-1)+(-3)+\cdots+(3-2n)+\cdots$
- 5) $4+0+(-14)+\cdots+(4+n^2-n^3)+\cdots$
- 6) $18+1.8+0.18+\cdots+18(0.1)^{n-1}+\cdots$
- 7) $\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\cdots$
- 8) $\frac{\sqrt{2}-1}{1\cdot\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot 2}+\cdots+\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}+\cdots$

40 จงพิจารณาว่าอนุกรมในข้อ 39 อนุกรมใดบ้างที่เป็นอนุกรมลู่เข้าและมีผลบวกของอนุกรมเป็นเท่าใด

41 อนุกรมเรขาคณิตอนุกรมหนึ่งเป็นอนุกรมลู่เข้าและผลบวกของอนุกรมเท่ากับ 1 ถ้าผลบวก 2 พจน์แรกของอนุกรมนี้คือ $\frac{3}{4}$ จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมนี้

42 จงเขียนทศนิยมซ้ำต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

- 1) $0.\dot{1}2\dot{3}$
- 2) $0.11\dot{2}$
- 3) $1.\dot{9}$
- 4) $0.0989898\ldots$

43 จงหา a_1 และ r เมื่อ $a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^3+\cdots+a_1r^{n-1}+\cdots=\frac{3}{2}$
และ $a_1-a_1r+a_1r^2-a_1r^3+\cdots+(-1)^{n-1}a_1r^{n-1}+\cdots=\frac{3}{4}$

44 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่งมีแต่ละด้านยาว 10 นิ้ว รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่สองเกิดจากการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปแรก และรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่สามเกิดจากการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่สอง ถ้าสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ไม่สิ้นสุด จงหาผลบวกของความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งหมด

☆ 45. หอยทากตัวหนึ่งตกลงไปที่ก้นบ่อน้ำซึ่งมีความลึก 10 เมตร ในช่วงเวลากลางวันของแต่ละวัน หอยทากตัวนี้จะคลานขึ้นมาได้วันละ 5 เมตร แต่ในเวลากลางคืนที่หอยทากหลับ หอยทากตัวนี้จะลื่นลงไปเป็นระยะทางครึ่งหนึ่งของระยะห่างระหว่างตัวมันกับก้นบ่อ จงพิจารณาว่าหอยทากตัวนี้จะสามารถคลานออกจากบ่อน้ำนี้ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

46 จงหาลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมต่อไปนี้

- 1) $(-2)+8+(-24)+\cdots+n(-2)^n+\cdots$
- 2) $1+0.2+0.03+\cdots+10\left(\frac{n}{10^n}\right)+\cdots$
- ☆ 3) $1+4+18+\cdots+n\cdot n!+\cdots$

47 พนักงานห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่งจัดเรียงส้มสายน้ำผึ้งให้มีลักษณะคล้ายพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยเขาได้วางส้มในชั้นแรก 100 ผล ชั้นที่สอง 81 ผล ชั้นที่สาม 64 ผล เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จงหาว่า

- 1) จะสามารถวางส้มได้ทั้งหมดกี่ผล
- 2) ถ้าไม่นับส้มในชั้นที่ 5 และ 7 จะมีส้มทั้งหมดกี่ผล
- 3) ถ้านำส้ม 1,015 ผล มาจัดเรียงเป็นพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส จะต้องวางส้มในชั้นแรกจำนวนกี่ผล และจะวางส้มได้ทั้งหมดกี่ชั้น

48 ผাগเงินกับธนาคารแห่งหนึ่งจำนวน 5,000 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 1.5 ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน จงหาจำนวนเงินในบัญชี เมื่อฝากเงินครบ 3 ปี

49 ผাগเงินกับธนาคารแห่งหนึ่งจำนวน 18,600 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 4 ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 6 เดือน จงหาจำนวนเงินในบัญชี เมื่อฝากเงินครบ 15 ปี

50 แม่ของสุทัศน์ชายที่ดินได้เงิน 10,000,000 บาท และต้องการนำเงินไปฝากธนาคารเพื่อเก็บไว้เป็นทุนการศึกษาของสุทัศน์ในอีก 10 ปีข้างหน้า โดยแม่ของสุทัศน์ได้ข้อมูลจากธนาคาร 2 แห่ง ดังนี้

- ธนาคาร A กำหนดอัตราดอกเบี้ย 12% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกสิ้นเดือน
 - ธนาคาร B กำหนดอัตราดอกเบี้ย 12.5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกสิ้นปี
- แม่ของสุทัศน์ควรเลือกฝากเงินกับธนาคารใด จึงจะได้เงินรวมมากที่สุด และจะได้เงินรวมเมื่อสิ้นปีที่ 10 เท่าใด

51 เอกฝากเงิน 100,000 บาท กับธนาคารแห่งหนึ่ง โดยธนาคารคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 6 เดือน เมื่อฝากเงินครบ 10 ปี เขาพบว่าเงินในบัญชีประมาณ 148,595 บาท จงหาอัตราดอกเบี้ยต่อปีที่ธนาคารกำหนด ถ้าอัตราดอกเบี้ยคงที่ตลอดระยะเวลาที่ฝากเงิน

52 ต้นตระกูลเงินจากวิทวัสเพื่อเป็นค่าผ่าตัดของแม่จำนวน 200,000 บาท โดยมีกำหนดชำระหนี้ทั้งหมดในอีก 2 ปีข้างหน้า เป็นเงิน 300,000 บาท จงหาว่าดอกเบี้ยวิทวัสเรียกเก็บคิดเป็นอัตราดอกเบี้ยต่อปีเท่าใด ถ้าคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี และอัตราดอกเบี้ยดังกล่าวเป็นไปตามที่กฎหมายกำหนดไว้หรือไม่ (อัตราดอกเบี้ยเงินกู้ยืมตามกฎหมายไม่เกินร้อยละ 15 ต่อปี)



เสริมสมอง : อัตราดอกเบี้ยเงินกู้ยืมตามกฎหมาย

บุคคลใดให้ผู้อื่นกู้ยืมเงินโดยเรียกดอกเบี้ยเกินอัตราที่กฎหมายกำหนดไว้ กล่าวคือ ร้อยละ 15 ต่อปี ตามที่บัญญัติไว้ในมาตรา 654 แห่งประมวลกฎหมายแพ่งและพาณิชย์ พ.ศ. 2535 จะมีความผิดตามพระราชบัญญัติห้ามเรียกดอกเบี้ยเกินอัตรา พ.ศ. 2560 ต้องระวางโทษจำคุกไม่เกินสองปี หรือปรับไม่เกินสองแสนบาท หรือทั้งจำทั้งปรับ

53 บริษัทแห่งหนึ่งต้องการปรับเปลี่ยนกลยุทธ์ทางธุรกิจจึงมีนโยบายปลดพนักงานจำนวน 2 คน แต่ด้วยสัญญาจ้างที่พนักงานทั้งสองทำไว้กับบริษัท ทำให้บริษัทต้องจ่ายเงินชดเชยรายเดือนให้กับพนักงานแต่ละคนเป็นจำนวนเงินเท่ากับเงินเดือนเดือนสุดท้ายที่พนักงานแต่ละคนได้รับจนครบอายุสัญญา โดยพนักงานทั้งสองมีอายุสัญญาจ้างกับบริษัทเหลืออยู่ 3 ปีเท่ากัน พนักงานคนแรกได้รับเงินเดือนเดือนสุดท้าย 23,000 บาท และพนักงานคนที่สองได้รับเงินเดือนเดือนสุดท้าย 37,000 บาท ถ้า ณ วันที่ปลดพนักงาน นายจ้างนำเงินจำนวนหนึ่งไปฝากไว้กับธนาคารซึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ย 5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เพื่อนำดอกเบี้ยที่ได้ในแต่ละเดือนไปจ่ายเป็นเงินชดเชยให้กับพนักงานทั้งสอง จงหาว่านายจ้างต้องฝากเงินไว้อย่างน้อยเท่าใด

54 วิชัยต้องการฝากเงินกับธนาคารแห่งหนึ่งซึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ย 5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี ถ้าวิชัยต้องการให้มีเงินในบัญชีประมาณ 250,000 บาท ในเวลา 10 ปี เขาต้องฝากเงินต้นไว้อย่างน้อยเท่าใด

55. ชีระฝากเงินจำนวนหนึ่งไว้กับธนาคารแห่งหนึ่ง เมื่อเวลาผ่านไป 10 ปี พบว่ามีเงินในบัญชี 122,079.42 บาท ถ้าธนาคารคงอัตราดอกเบี้ย 2% ต่อปี และคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน จงหาเงินต้นที่ชีระฝากไว้เมื่อ 10 ปีก่อน
56. หมากฝากเงินกับธนาคารแห่งหนึ่งเดือนละ 2,000 บาท ทุกสิ้นเดือน ถ้าธนาคารกำหนดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 3 ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นเดือนที่ 24 หมากจะมีเงินรวมเท่าใด
57. มะปรางมีรายรับเดือนละ 20,000 บาท ถ้ามะปรางต้องการออมเงินทุกสิ้นเดือนเดือนละ 10% ของรายรับ โดยฝากเข้าบัญชีธนาคารที่กำหนดอัตราดอกเบี้ย 12% ต่อปี และคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อเวลาผ่านไป 2 ปี มะปรางจะมีเงินออมทั้งหมดเท่าใด
58. ในวันที่ 1 มิถุนายน 2561 สัมชาฝากเงิน 100,000 บาท เข้าบัญชีเงินฝากออมทรัพย์ที่ให้อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 1.2 ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน ถ้าสัมชาโอนเงินให้น้องสาวผ่านบริการ e-Banking เดือนละ 5,000 บาท ทุกวันที่ 1 ของเดือน ตั้งแต่เดือนมิถุนายน 2561 โดยไม่เสียค่าธรรมเนียมในการโอนเงิน เมื่อครบ 1 ปี สัมชาจะได้รับดอกเบี้ยจากบัญชีเงินฝากนี้เท่าใด



เสริมสมอง : e-Banking

ระบบธนาคารผ่านทางอินเทอร์เน็ต หรือ e-Banking (electronic banking) คือ การทำธุรกรรมต่าง ๆ กับธนาคาร โดยผ่านเครือข่ายอินเทอร์เน็ต เช่น การฝากเงิน ถอนเงิน โอนเงิน หรือสอบถามยอดเงิน ปัจจุบันธนาคารพาณิชย์เกือบทุกแห่งเปิดให้บริการ e-Banking แล้วในชื่อต่าง ๆ เช่น internet banking, online banking, cyber banking ซึ่งผู้ใช้บริการสามารถทำธุรกรรมผ่านทางคอมพิวเตอร์โดยไม่ต้องเดินทางไปธนาคาร นอกจากนี้ ธนาคารยังเพิ่มช่องทางให้บริการผ่านทางโทรศัพท์มือถือ (mobile banking) ซึ่งพัฒนาขึ้นเพื่อรองรับการใช้งานบนสมาร์ทโฟนและแท็บเล็ต

59. ยอดรักผ่อนตู้เย็นราคา 30,000 บาท ด้วยยอดชำระเท่ากันทุกเดือนเป็นเวลา 6 เดือน โดยผ่อนชำระทุกต้นเดือน ถ้าอัตราดอกเบี้ย 18% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือนแล้ว ยอดรักจะต้องผ่อนชำระเดือนละเท่าใด
60. อนงค์ซื้อรถยนต์ราคา 600,000 บาท โดยตกลงจ่ายเงินดาวน์ 15% ของราคารถยนต์ และผ่อนชำระส่วนที่เหลือเป็นจำนวนเงินเท่ากันทุกเดือน เป็นเวลา 4 ปี โดยผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน ถ้าอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือนแล้ว อนงค์จะต้องผ่อนชำระเดือนละเท่าใด และเสียดอกเบี้ยทั้งหมดเท่าใด