

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เล่ม 1

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ผู้เรียบเรียง

รศ. ดร.กฤษณะ โสขมา

ผู้ตรวจ

ผศ. ดร.กันย์ สุนัยชั้น
ผศ.พัชรี หิรัญมาศสุวรรณ
พนิดา พิสิฐอมรชัย

บรรณาธิการ

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เล่ม 1

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ผู้เรียบเรียง	รศ. ดร.ภฤณ โสขมา
ผู้ตรวจ	ผศ. ดร.กันย์ สุนัยอัน ผศ.พัชรี หิรัญมาศสุวรรณ พนิดา พิสิฐอมรชัย
บรรณาธิการ	ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ
ภฤณ โสขมา.
หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เล่ม 1.
--กรุงเทพฯ : แม็คเอ็ดดูเคชั่น, 2567.
280 หน้า.
1. คณิตศาสตร์--การศึกษาและการสอน (มัธยมศึกษา).
I. ชื่อเรื่อง.
510.1
ISBN 978-616-345-291-7

พิมพ์ครั้งที่ 1
จำนวน 13,500 เล่ม
สงวนลิขสิทธิ์ : มกราคม 2568
สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย ห้ามลอกเลียน ไม่ว่าจะเป็นส่วนหนึ่งส่วนใด
ของหนังสือเล่มนี้ นอกจากจะได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษร

จัดทำโดย
MAC EDUCATION
ส่งหนาคัดส่งจ่าย ไปรษณีย์ลาดพร้าว
ในนาม บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด
9/99 อาคารแม็ค ซอยลาดพร้าว 38 ถนนลาดพร้าว
แขวงจันทระเกษม เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900
โทร. 0-2512-0661, 0-2938-2022-7 แฟกซ์ 0-2938-2028
www.MACEducation.com
พิมพ์ที่ : บจก. พี.เอ็น.เค แอนด์ สกายพริ้นตังส์

คำนำ

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เล่ม 1 ได้เรียบเรียงขึ้นตามมาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด และสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กิจกรรมการเรียนรู้ในหนังสือเรียนเล่มนี้เน้นการบูรณาการสาระการเรียนรู้กับทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ การแก้ปัญหา การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยง การให้เหตุผล และการคิดสร้างสรรค์ จัดเพื่อให้ผู้เรียนได้เรียนรู้สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ มีทักษะที่จำเป็นสอดคล้องกับการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 และมีคุณลักษณะที่พึงประสงค์ มีการฝึกทักษะตามสาระการเรียนรู้ มีการวัดผลประเมินผลด้วยตนเอง นอกจากนี้ยังมีกิจกรรมส่งเสริมให้เกิดความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

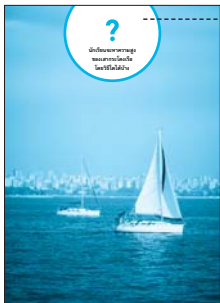
หนังสือเรียนเล่มนี้ประกอบด้วย 6 หน่วยการเรียนรู้ ได้แก่ หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 จำนวนจริง หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 สมบัติของเลขยกกำลัง หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 พหุนาม หน่วยการเรียนรู้ที่ 5 การแยกตัวประกอบของพหุนาม และหน่วยการเรียนรู้ที่ 6 สถิติ แต่ละหน่วยการเรียนรู้ได้มีสาระการเรียนรู้ระดับตัวชี้วัด มีภาพและคำถามที่นำเข้าสู่บทเรียนกิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้ กิจกรรมส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลายและท้าทายให้ผู้เรียนตรวจสอบเข้าใจ บทสรุปเนื้อหาและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์เพื่อเป็นการวัดและประเมินผลการเรียนรู้ของผู้เรียน

ผู้เรียบเรียงขอขอบคุณเป็นอย่างสูงที่ท่านได้เลือกใช้หนังสือเรียนเล่มนี้เป็นสื่อการเรียนรู้ ผู้เรียบเรียงหวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเรียนเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อครู นักเรียน และผู้สนใจโดยส่งผลการพัฒนาทั้งด้านความรู้ ทักษะ ค่านิยมและคุณลักษณะที่พึงประสงค์ ตามเจตนารมณ์ที่กำหนดไว้ในหลักสูตร

รศ. ดร.ภฤณ โสขมา

คำชี้แจง

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เล่ม 1 เล่มนี้ได้นำเสนอให้แต่ละหน่วยการเรียนรู้มีคำถามนำเพื่อให้ผู้เรียนเกิดความสนใจ ผักผ่อนทักษะและความเชี่ยวชาญด้วยกิจกรรมตามธรรมชาติวิชาเพื่อให้ผู้เรียนมีการเรียนรู้ที่คงทน มีการตรวจสอบความรู้ความเข้าใจเป็นระยะ ๆ โดยสอดแทรกกิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้ซึ่งสัมพันธ์กับเรื่องที่ได้อ่านผ่านมา ในท้ายหน่วยการเรียนรู้จะมีสรุปสำหรับทบทวนองค์ความรู้ทั้งหมด และประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ นอกจากนี้ยังเพิ่มเติมด้วยกิจกรรมส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้สอนสามารถนำไปประยุกต์หรือดัดแปลงให้เหมาะสมกับบริบทของโรงเรียนและผู้เรียน ในส่วนของเนื้อหาและแบบทดสอบเพิ่มเติมที่ผ่านการคัดกรองมาแล้วว่าเหมาะสมกับการเรียนรู้จะมีสัญลักษณ์  ซึ่งสามารถใช้สแกน QR Code ได้ เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจเนื้อหาในเรื่องนั้น ๆ มากยิ่งขึ้น



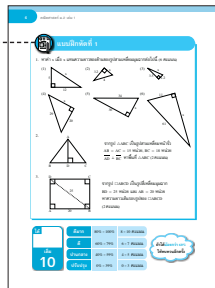
คำถามนำเข้าสู่บทเรียน

เป็นคำถามที่กระตุ้นความสนใจในสิ่งที่จะได้เรียนรู้ ผักผ่อนให้รู้จักแสดงความคิดเห็นและปรึกษาหารือร่วมกัน



แบบฝึกหัด

เป็นแบบฝึกที่ใช้วัดความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในเรื่องที่ผู้เรียนได้เรียนมาแล้ว พร้อมทั้งมีเกณฑ์การตรวจสอบด้วยตนเอง



กิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้

กิจกรรมเพื่อฝึกทักษะในการทำงานเป็นคู่หรือเป็นกลุ่มของผู้เรียน เพื่อแก้ปัญหาตามหลักการทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อนั้น ๆ ทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ได้ง่ายและรวดเร็ว



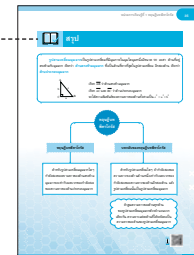
กิจกรรมส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

เป็นกิจกรรมที่ผู้เรียนสามารถประยุกต์ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เพื่อย่อยสลายในการทำกิจกรรมต่างๆ เพิ่มเติมจนเกิดชิ้นงาน



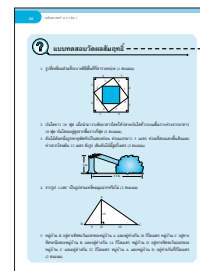
สรุป

เป็นการให้ผู้เรียนเข้าใจเนื้อหาโดยรวมของหน่วยการเรียนรู้ นั้น ๆ เพื่อทบทวนความรู้



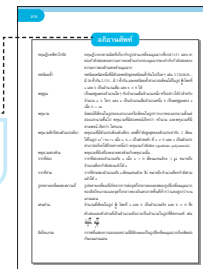
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์

เป็นแบบทดสอบที่ใช้วัดความรู้ ความเข้าใจ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ของหน่วยการเรียนรู้นั้น ๆ ให้เป็นไปตามตัวชี้วัดของหลักสูตรฯ พร้อมทั้งมีเกณฑ์การตรวจสอบด้วยตนเอง



อภิธานศัพท์

ให้ผู้เรียนเข้าใจคำสำคัญ คำยาก และคำใหม่ที่เป็นต้องรู้



แนะนำตัวละคร

ตัวละครที่กล้า
เกริ่นนำเข้าสู่
เนื้อหา



ตัวละครที่กล่าวถึง
ข้อควรระวังในเนื้อหา



ตัวละครที่สร้าง
กิจกรรมชวนคิด



ตัวละคร
ที่ไขถามคำถาม



ตัวละครที่ถามคำถาม
ส่งเสริมคุณธรรม จริยธรรม
และวัฒนธรรม



สารบัญ

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

(ตรงตามตัวชี้วัด ค 2.2 ม.2/5)

1. ความสัมพันธ์ของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก	1
2. ทฤษฎีบทพีทาโกรัส	3
3. บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส	8
4. การนำความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับไปใช้ในชีวิตจริง	21
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	29
	36

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 จำนวนจริง

(ตรงตามตัวชี้วัด ค 1.1 ม.2/1, 2)

1. จำนวนจริง	38
2. รากที่สองและรากที่สามของจำนวนตรรกยะ	40
3. การนำความรู้เกี่ยวกับจำนวนจริงไปใช้	56
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	83
	92

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 สมบัติของเลขยกกำลัง

(ตรงตามตัวชี้วัด ค 1.1 ม.2/1)

1. สมบัติของเลขยกกำลัง	94
2. การดำเนินการของเลขยกกำลัง	96
3. การเขียนจำนวนในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์	112
4. การนำความรู้เกี่ยวกับเลขยกกำลังไปใช้ในการแก้ปัญหา	117
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	123
	131

หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 พหุนาม

(ตรงตามตัวชี้วัด ค 1.2 ม.2/1)

1. เอกนาม	133
2. การบวกและการลบเอกนาม	135
3. พหุนาม	140
	145

4. การบวกและการลบพหุนาม	152
5. การคูณพหุนาม	156
6. การหารพหุนามด้วยเอกนามที่มีผลหารเป็นพหุนาม	162
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	170

หน่วยการเรียนรู้ที่ 5 การแยกตัวประกอบของพหุนาม

(ตรงตามตัวชี้วัด ค 1.2 ม.2/2)

1. การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองโดยใช้สมบัติการแจกแจง	172
2. การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว	174
3. การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองโดยใช้ผลต่างของกำลังสอง	180
4. การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองโดยใช้กำลังสองสมบูรณ์	191
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	196
	207

หน่วยการเรียนรู้ที่ 6 สถิติ

(ตรงตามตัวชี้วัด ค 3.1 ม.2/1)

1. การนำเสนอข้อมูล	209
2. ค่ากลางของข้อมูล	211
3. การแปลความหมายผลลัพธ์	233
4. การนำสถิติไปใช้ในชีวิตจริง	249
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	255
	263

บรรณานุกรม

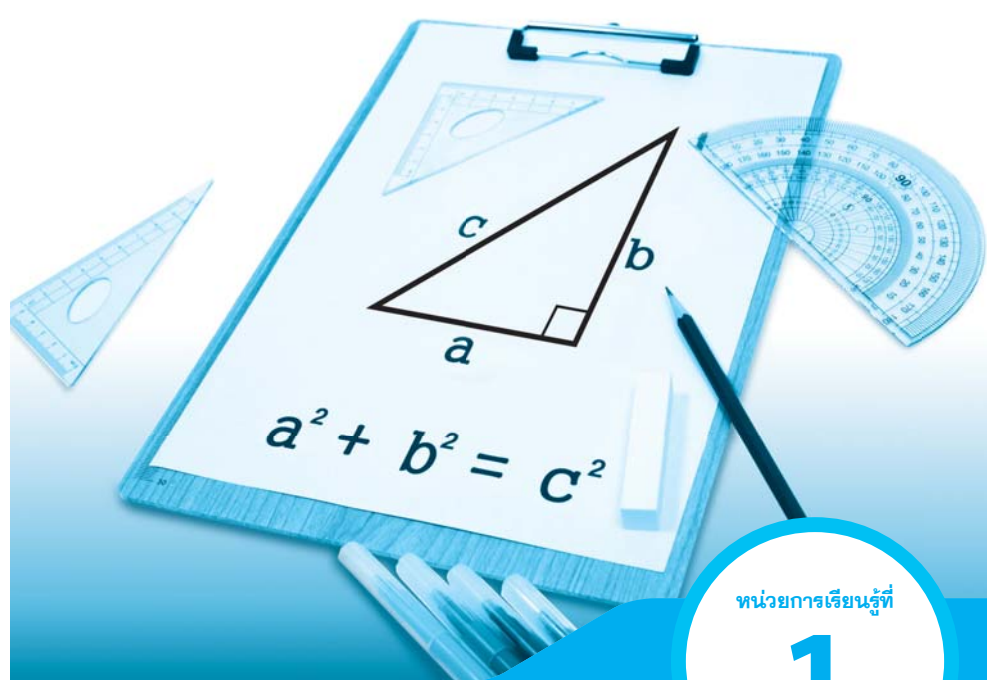
267

ภาคผนวก

269

อภิธานศัพท์

272



หน่วยการเรียนรู้ที่

1



ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

สาระการเรียนรู้

1. ความสัมพันธ์ของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
2. ทฤษฎีบทพีทาโกรัส
3. บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส
4. การนำความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับไปใช้ในชีวิตจริง

ตัวชี้วัด

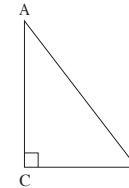
เข้าใจและใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริง (ค 2.2 ม.2/5)



นักเรียนจะหาความสูง
ของเสากระโดงเรือ
โดยวิธีใดได้บ้าง

1. ความสัมพันธ์ของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

รูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมภายในมุมใดมุมหนึ่งมีขนาด 90 องศา ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมฉาก เรียกว่า **ด้านตรงข้ามมุมฉาก (hypotenuse)** อีกสองด้าน เรียกว่า **ด้านประกอบมุมฉาก (legs of a right triangle)**



เรียก $\overline{AB}$ ว่า **ด้านตรงข้ามมุมฉาก**

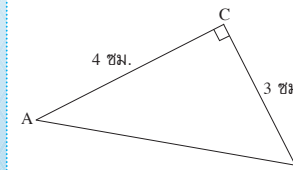
เรียก $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ ว่า **ด้านประกอบมุมฉาก**

จะเห็นว่ารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
มีด้านตรงข้ามมุมฉาก
เป็นด้านที่ยาวที่สุด



สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยให้ด้านประกอบมุมฉากและด้านตรงข้ามมุมฉากมีความยาวตามที่กำหนดให้ดังนี้

1. ด้านประกอบมุมฉากยาว 3 เซนติเมตร และ 4 เซนติเมตร

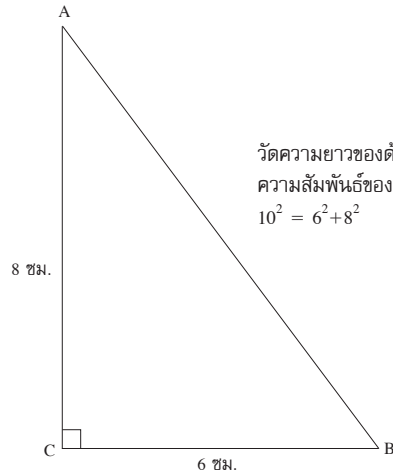


วัดความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากได้ 5 เซนติเมตร

ความสัมพันธ์ของความยาวของด้านทั้งสามคือ

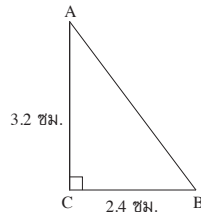
$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

2. ด้านประกอบมุมฉากยาว 6 เซนติเมตร และ 8 เซนติเมตร



วัดความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากได้ 10 เซนติเมตร
ความสัมพันธ์ของความยาวของด้านทั้งสามคือ
 $10^2 = 6^2 + 8^2$

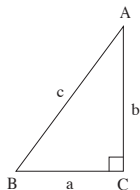
3. วัดความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากได้ 4 เซนติเมตร
ความสัมพันธ์ของความยาวของด้านทั้งสามคือ
 $4^2 = 3.2^2 + 2.4^2$



ข้อ 1, 2, 3 จะสอดคล้องกับความสัมพันธ์ของความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มี $\hat{A}CB$ เป็นมุมฉาก

ให้ c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก

a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉาก

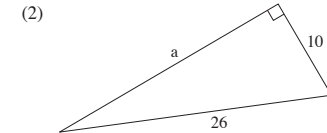
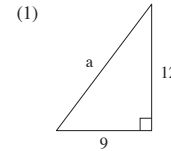


จะได้ความสัมพันธ์ของความยาวของด้านทั้งสามเป็น

$$c^2 = a^2 + b^2$$

สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ ความยาวของด้านรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีความสัมพันธ์กัน กล่าวคือ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก

ตัวอย่าง หาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้



วิธีทำ (1) จากความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
จะได้

$$\begin{aligned} a^2 &= 9^2 + 12^2 \\ &= 81 + 144 \\ &= 225 \\ &= 15^2 \text{ หรือ } (-15)^2 \\ a &= 15 \text{ หรือ } -15 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a = 15$

ตอบ 15 หน่วย

(2) จากความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
จะได้

$$\begin{aligned} 26^2 &= a^2 + 10^2 \\ a^2 &= 26^2 - 10^2 \\ &= 676 - 100 \\ &= 576 \\ &= 24^2 \text{ หรือ } (-24)^2 \\ a &= 24 \text{ หรือ } -24 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a = 24$

ตอบ 24 หน่วย

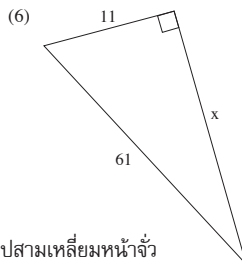
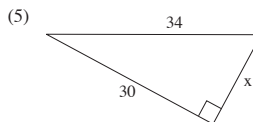
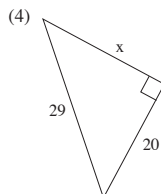
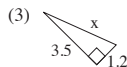
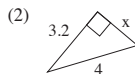
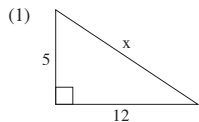
เนื่องจาก a เป็นความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีค่าเป็นบวกเสมอ

เนื่องจาก a เป็นความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีค่าเป็นบวกเสมอ

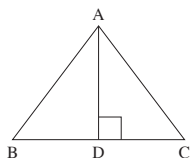


แบบฝึกหัดที่ 1

1. หาค่า x เมื่อ x แทนความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้ (6 คะแนน)

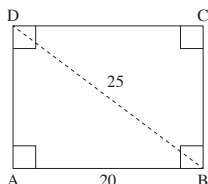


2.



จากรูป $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
 $AB = AC = 15$ หน่วย, $BC = 18$ หน่วย
 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ หาพื้นที่ $\triangle ABC$ (2 คะแนน)

3.

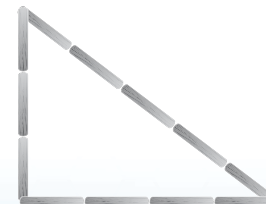


จากรูป $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
 $BD = 25$ หน่วย และ $AB = 20$ หน่วย
 หาความยาวเส้นรอบรูปของ $\square ABCD$
 (2 คะแนน)



กิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้ที่ 1

- ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 8 คน
- แต่ละกลุ่มทำตามขั้นตอนดังนี้
 - นำแท่งไม้ที่มีความยาวเท่ากันมาเรียงต่อเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยวางให้ปลายไม้ชิดกันทุกด้าน
 - กำหนดด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งเป็นด้าน a ด้านที่เหลือเป็นด้าน b และด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้าน c
 - นับจำนวนแท่งไม้แต่ละด้านและบันทึกข้อมูล
 - ใช้ความสัมพันธ์ $a^2 + b^2 = c^2$ เพื่อหาค่าของ c ซึ่งเป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก
 - เปรียบเทียบค่าของ c ที่ได้ในข้อ (3) และข้อ (4)



หลังจากทำกิจกรรมเสร็จแล้ว ให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

- แสดงวิธีการหาค่า c (ด้านตรงข้ามมุมฉาก) โดยใช้ความสัมพันธ์ $a^2 + b^2 = c^2$ ให้เพื่อนดู และมีการอภิปรายร่วมกัน
- อธิบายประโยชน์ที่ได้จากการทำกิจกรรมนี้

ได้

ดีมาก

80% - 100%

8 - 10 คะแนน

ดี

60% - 79%

6 - 7 คะแนน

ปานกลาง

40% - 59%

4 - 5 คะแนน

ปรับปรุง

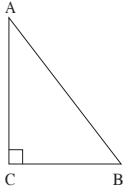
0% - 39%

0 - 3 คะแนน

เต็ม
10

ถ้าได้น้อยกว่า 60%
ให้ทบทวนอีกครั้ง

2. ทฤษฎีบทพีทาโกรัส



จากรูป $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

มี $\angle ACB$ เป็นมุมฉาก

มี $\overline{AB}$ เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

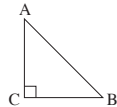
มี $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ เป็นด้านประกอบมุมฉาก

กิจกรรมความสัมพันธ์ของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส

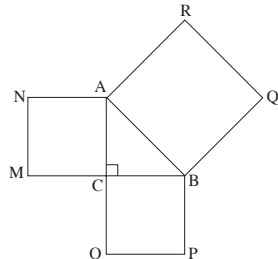
กิจกรรมต่อไปนี้จะช่วยให้นักเรียนเริ่มเห็นความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่สร้างจากด้านสามด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

กิจกรรมที่ 1

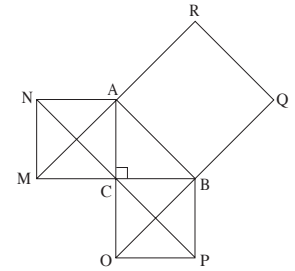
- ให้นักเรียนใช้กระดาษสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยมี $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ ซึ่งเป็นด้านประกอบมุมฉากที่ยาวเท่ากัน และ $\overline{AB}$ เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก



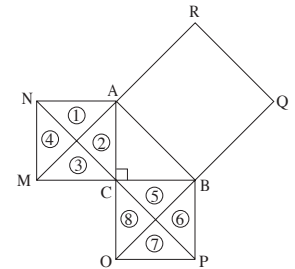
- สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบน $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AB}$ กำหนดชื่อเป็น $\square ACMN$, $\square BCOP$ และ $\square ABQR$ ตามลำดับ



- ลาก $\overline{AM}$, $\overline{CN}$, $\overline{BO}$ และ $\overline{CP}$



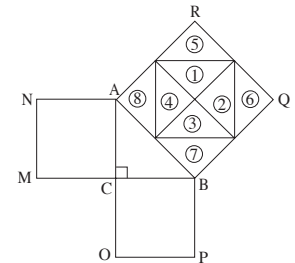
- ตัด $\square ACMN$ และ $\square BCOP$ แต่ละรูปออกเป็น 4 ชิ้น ดังรูป



นำรูปสามเหลี่ยมทั้ง 8 ชิ้น ไปวางซ้อนทับ $\square ABQR$ จะวางซ้อนทับ $\square ABQR$ ได้สนิทพอดีหรือไม่



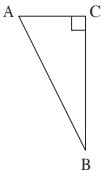
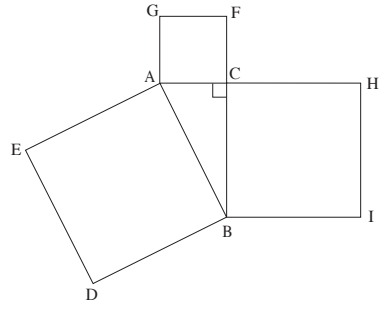
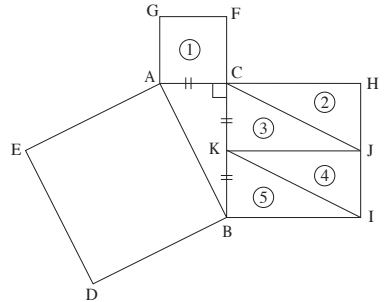
จากกิจกรรมข้างต้น เมื่อนำชิ้นส่วนจากพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉากไปวางซ้อนทับพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากจะวางได้เต็มรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากพอดี ดังรูป



การทำกิจกรรมที่ 1 พบว่าผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉากเท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



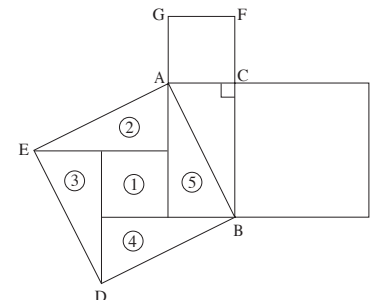
กิจกรรมที่ 2

1. ให้นักเรียนใช้กระดาษสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยมี $\hat{A}CB$ เป็นมุมฉาก และ $\overline{BC}$ ยาวเป็นสองเท่าของ $\overline{AC}$	
2. สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบน $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ กำหนดชื่อเป็น $\square ABDE$, $\square ACFG$ และ $\square BCHI$ ตามลำดับ	
3. ตัด $\square ACFG$ และตัด $\square BCHI$ โดยแบ่ง $\square BCHI$ ออกเป็น 4 ส่วน โดยมีจุด J และจุด K เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{HI}$ และ $\overline{BC}$ ตามลำดับ	

นำกระดาษทั้ง 5 ชิ้น (คือชิ้นที่ ①, ②, ③, ④ และ ⑤) ไปวางซ้อนทับ $\square ABDE$ จะวางซ้อนทับ $\square ABDE$ ได้สนิทพอดีหรือไม่

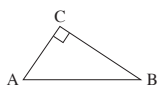
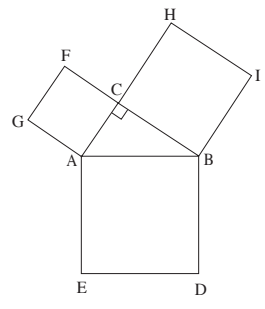


จากกิจกรรมข้างต้น เมื่อนำชิ้นส่วนจากพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉากไปวางซ้อนทับพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากจะวางได้เต็มรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากพอดี ดังรูป

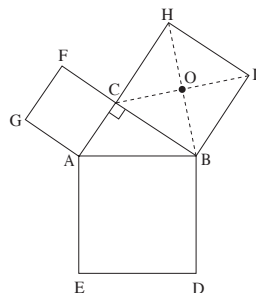


การทำกิจกรรมที่ 2 พบว่าผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉากเท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

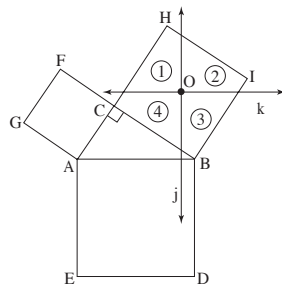
กิจกรรมที่ 3

1. ให้นักเรียนใช้กระดาษสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยมี $\hat{A}CB$ เป็นมุมฉาก และ $\overline{BC}$ ยาวกว่า $\overline{AC}$	
2. สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบน $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ กำหนดชื่อเป็น $\square ABDE$, $\square ACFG$ และ $\square BCHI$ ตามลำดับ	

3. หาจุดใน $\square BCHI$ ที่เป็นจุดตัดของเส้นทแยงมุม กำหนดจุดดังกล่าวเป็นจุด O

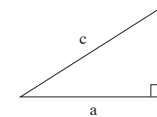


4. ที่จุด O ลากเส้นตรง j ตั้งฉากกับด้านตรงข้ามมุมฉาก $\overline{AB}$ และลากเส้นตรง k ตั้งฉากกับเส้นตรง j เส้นตรง j และเส้นตรง k แบ่ง $\square BCHI$ เป็นส่วนย่อย 4 ส่วน ดังรูป



1. ตัด $\square ACFG$ และส่วนย่อย 4 ส่วน ของ $\square BCHI$ ไปวางซ้อนทับ $\square ABDE$ จะวางซ้อนทับ $\square ABDE$ ได้สนิทพอดีหรือไม่
2. นักเรียนจะสรุปผลการทำกิจกรรมนี้ได้อย่างไร ให้นักเรียนเปรียบเทียบข้อสรุปของนักเรียนกับข้อสรุปของเพื่อนๆ

ถ้าความยาวของด้านประกอบมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป็น a และ b แล้วพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉากจะเป็น a^2 และ b^2 ตามลำดับ ถ้าความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากเป็น c แล้วพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากเป็น c^2



นั่นคือ เมื่อ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก a และ b เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉาก จะได้

$$c^2 = a^2 + b^2$$

ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส (Pythagoras' Theorem) ดังนี้

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากจะเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก



ตัวอย่างที่ 1 หาความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก c ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เมื่อกำหนด a และ b เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉาก

$$(1) a = 12, b = 5$$

$$(2) a = 1.6, b = 3$$

วิธีทำ (1) จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส $c^2 = a^2 + b^2$

(2) จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส $c^2 = a^2 + b^2$

$$\text{เมื่อ } a = 12 \text{ และ } b = 5$$

$$\text{เมื่อ } a = 1.6 \text{ และ } b = 3$$

$$\text{จะได้ } c^2 = 12^2 + 5^2$$

$$\text{จะได้ } c^2 = 1.6^2 + 3^2$$

$$= 144 + 25$$

$$= 2.56 + 9$$

$$= 169$$

$$= 11.56$$

$$= 13^2$$

$$= 3.4^2$$

$$\text{ดังนั้น } c = 13$$

$$\text{ดังนั้น } c = 3.4$$

ตอบ 13 หน่วย

ตอบ 3.4 หน่วย

เนื่องจาก a และ b เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉาก และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก ซึ่งมีค่าเป็นบวกเสมอ ดังนั้น ในหน่วยการเรียนรู้นี้จึงกล่าวถึงเฉพาะค่า a , b และ c ที่เป็นบวกเท่านั้น



ในกรณีที่โจทย์กำหนดความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก และความยาวของด้านประกอบมุมฉาก มาให้ด้านหนึ่ง สามารถหาความยาวของด้านประกอบมุมฉากอีกด้านหนึ่งได้

เนื่องจาก $c^2 = a^2 + b^2$

ถ้าโจทย์กำหนดค่า c และ a มาให้ สามารถหาค่า b ได้จาก $b^2 = c^2 - a^2$

ถ้าโจทย์กำหนดค่า c และ b มาให้ สามารถหาค่า a ได้จาก $a^2 = c^2 - b^2$

ตัวอย่างที่ 2 หาความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เมื่อกำหนดให้ a และ b เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉาก และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก

(1) $a = 24, c = 30$

(2) $b = 4.5, c = 7.5$

วิธีทำ (1) จาก $b^2 = c^2 - a^2$

เมื่อ $a = 24$ และ $c = 30$

จะได้ $b^2 = 30^2 - 24^2$

$= 900 - 576$

$= 324$

$= 18^2$

ดังนั้น $b = 18$

ตอบ 18 หน่วย

(2) จาก $a^2 = c^2 - b^2$

เมื่อ $b = 4.5$ และ $c = 7.5$

จะได้ $a^2 = 7.5^2 - 4.5^2$

$= 56.25 - 20.25$

$= 36$

$= 6^2$

ดังนั้น $a = 6$

ตอบ 6 หน่วย

ความรู้เพิ่มเติม

ตัวอย่างชุดของจำนวนที่เป็นความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีดังนี้

3, 4, 5

5, 12, 13

6, 8, 10

7, 24, 25

8, 15, 17

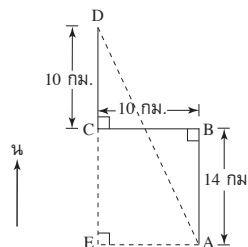
9, 40, 41

11, 60, 61

12, 35, 37

ตัวอย่างที่ 3 ชายคนหนึ่งขี่รถจักรยานไปทางทิศเหนือ 14 กิโลเมตร แล้วขี่ต่อไปทางทิศตะวันตกอีก 10 กิโลเมตร จากนั้นขี่รถขึ้นไปทางทิศเหนืออีก 10 กิโลเมตร จึงถึงที่หมาย ชายคนนี้อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นกี่กิโลเมตร

วิธีทำ



ให้จุด A เป็นจุดเริ่มต้น

AB เป็นระยะทางที่ขี่รถจักรยานไปทางทิศเหนือ 14 กิโลเมตร

BC เป็นระยะทางที่ขี่รถจักรยานไปทางทิศตะวันตก 10 กิโลเมตร

CD เป็นระยะทางที่ขี่รถขึ้นไปทางทิศเหนือ 10 กิโลเมตร

AD แทนระยะทางจากจุดเริ่มต้นถึงที่หมาย

ต่อ $\overline{DC}$ ไปทางจุด C พบส่วนของเส้นตรง $\overline{AE}$ ที่ขนานกับ $\overline{BC}$ ที่จุด E จะได้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCE และรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ADE ที่มี $\hat{AED}$ เป็นมุมฉาก

เนื่องจาก

$AE = BC = 10$

และ

$DE = DC + CE$

$= 10 + 14 \quad (CE = AB)$

$= 24$

จาก

$AD^2 = AE^2 + DE^2$

จะได้

$AD^2 = 10^2 + 24^2$

$= 100 + 576$

$= 676$

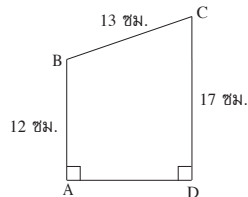
$= 26^2$

ดังนั้น

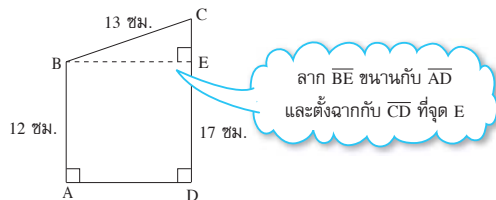
$AD = 26$

ตอบ ชายคนนี้อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้น 26 กิโลเมตร

ตัวอย่างที่ 4 จากรูป หาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ABCD ซึ่งมี $AB = 12$ เซนติเมตร $BC = 13$ เซนติเมตร และ $CD = 17$ เซนติเมตร



วิธีทำ



ดังนั้น $\triangle BCE$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และ $\square ABED$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
จะได้

$$\begin{aligned} CE &= CD - ED \\ &= 17 - 12 \quad (ED = AB) \\ &= 5 \text{ เซนติเมตร} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\triangle BCE$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\begin{aligned} BC^2 &= BE^2 + CE^2 \\ 13^2 &= BE^2 + 5^2 \\ BE^2 &= 13^2 - 5^2 \\ &= 169 - 25 \\ &= 144 \\ &= 12^2 \end{aligned}$$

จะได้

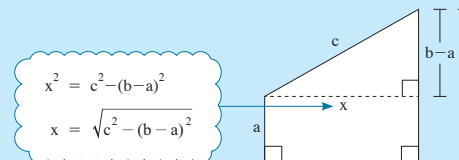
$$BE = 12 \text{ เซนติเมตร}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ABCD} &= \frac{1}{2} \times \text{ผลบวกด้านคู่ขนาน} \times \text{ความสูง} \\ &= \frac{1}{2} \times (12 + 17) \times 12 \text{ ตารางเซนติเมตร} \\ &= 29 \times 6 \text{ ตารางเซนติเมตร} \\ &= 174 \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$

ตอบ 174 ตารางเซนติเมตร

ความรู้เพิ่มเติม

เมื่อกำหนดรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่มีความยาวต่างๆ ดังรูป



อาจหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูได้โดยใช้สูตรดังนี้

$$\text{พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู} = \frac{1}{2} \times (a + b) \times \sqrt{c^2 - (b - a)^2}$$

จากตัวอย่างที่ 4 จะได้ $a = 12$ เซนติเมตร

$b = 17$ เซนติเมตร

$b - a = 17 - 12 = 5$ เซนติเมตร

และ $c = 13$ เซนติเมตร

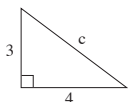
$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู} &= \frac{1}{2} \times (a + b) \times \sqrt{c^2 - (b - a)^2} \\ &= \frac{1}{2} \times (12 + 17) \times \sqrt{13^2 - 5^2} \text{ ตารางเซนติเมตร} \\ &= 174 \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$



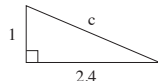
แบบฝึกหัดที่ 2

1. ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสหาค่าของ c เมื่อ c แทนความยาวของด้าน (10 คะแนน)

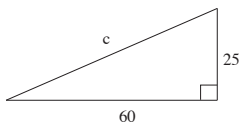
(1)



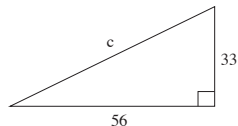
(2)



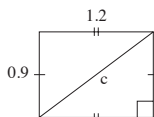
(3)



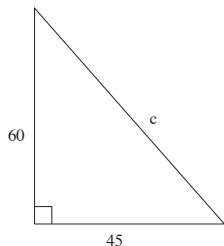
(4)



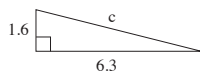
(5)



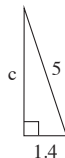
(6)



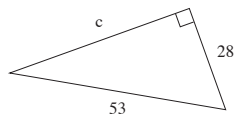
(7)



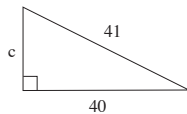
(8)



(9)

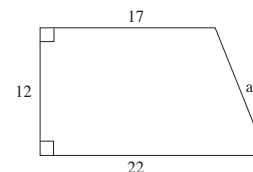


(10)

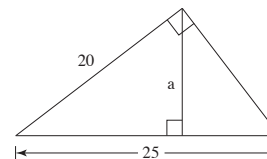


2. จากรูปที่กำหนดให้ หาค่าของ a เมื่อ a แทนความยาวของด้าน (3 คะแนน)

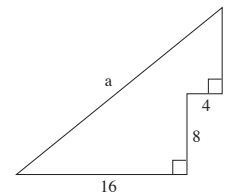
(1)



(2)



(3)



3. บ้านไดยาว 50 ฟุต ปลายบันไดข้างหนึ่งจรดกับเสาสูง 48 ฟุต ปลายบันไดอีกข้างหนึ่งอยู่ห่างจากโคนเสาที่ฟุต (2 คะแนน)

ได้

เต็ม

15

ดีมาก

80% - 100%

12 - 15 คะแนน

ดี

60% - 79%

9 - 11 คะแนน

ปานกลาง

40% - 59%

6 - 8 คะแนน

ปรับปรุง

0% - 39%

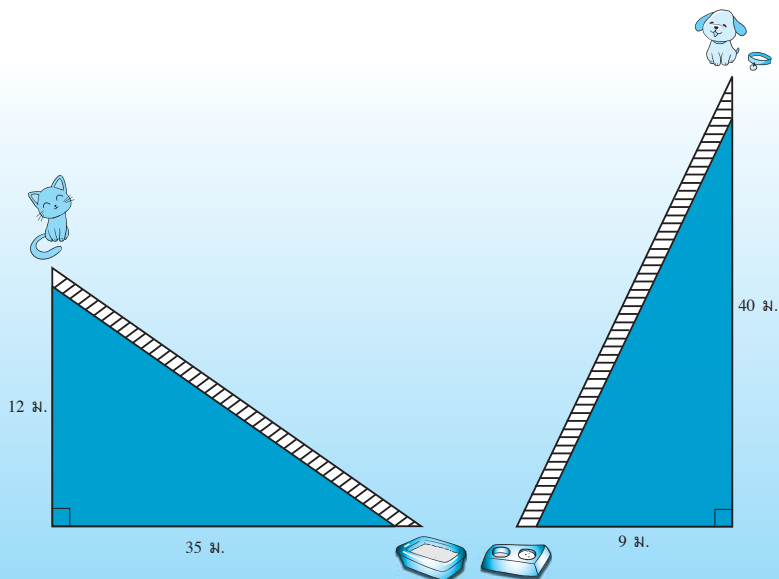
0 - 5 คะแนน

ถ้าได้น้อยกว่า 60%
ให้ทบทวนอีกครั้ง



กิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้ที่ 2

ให้นักเรียนจับคู่กัน แล้วเลือกสัตว์เลี้ยงที่กำหนดให้คนละ 1 ตัว จากนั้นหาระยะทางที่สัตว์เลี้ยงของแต่ละคนใช้เดินลงบันไดไปหาถาดอาหาร นักเรียนคนใดได้ระยะทางสั้นที่สุดเป็นฝ่ายชนะ



หลังจากทำกิจกรรมเสร็จแล้ว ให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

1. แสดงวิธีการหาค่าของตัวแปรโดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส อาจตรวจสอบคำตอบจากเพื่อนคู่กันที่เลือกสัตว์เลี้ยงชนิดเดียวกัน และมีการอภิปรายร่วมกัน
2. อธิบายประโยชน์ที่ได้จากการทำกิจกรรมนี้

3. บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ถ้าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านอีกสองด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่



ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

ขั้นที่ 1

กำหนดส่วนของเส้นตรงยาว 8 เซนติเมตร 15 เซนติเมตร และ 17 เซนติเมตร พิจารณาความสัมพันธ์ของกำลังสองของความยาวของส่วนของเส้นตรง จะเห็นว่า $17^2 = 15^2 + 8^2$

ขั้นที่ 2

ใช้วงเวียนและสันตรงสร้างรูปสามเหลี่ยมโดยใช้ส่วนของเส้นตรงที่สร้างในขั้นที่ 1

ขั้นที่ 3

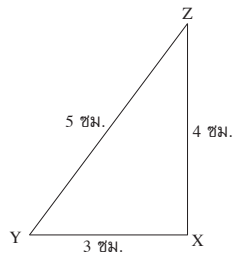
ใช้โปรแทรกเตอร์วัดขนาดของมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามด้านที่ยาวที่สุด มุมดังกล่าวมีขนาดเท่ากับ 90 องศา หรือไม่

ให้นักเรียนหาความสัมพันธ์ของกำลังสองของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ แล้วสร้างรูปสามเหลี่ยมจากความยาวส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ พร้อมตรวจสอบว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

กำหนดความยาวของส่วนของเส้นตรง ดังนี้

3 เซนติเมตร 4 เซนติเมตร และ 5 เซนติเมตร

จะเห็นว่า $5^2 = 3^2 + 4^2$



สร้าง $\triangle XYZ$ ให้ $XY = 3$ เซนติเมตร

$XZ = 4$ เซนติเมตร และ $YZ = 5$ เซนติเมตร

วัดขนาดของ $\angle YXZ$
มีขนาด 90° หรือไม่



จากกิจกรรมจะเห็นว่า

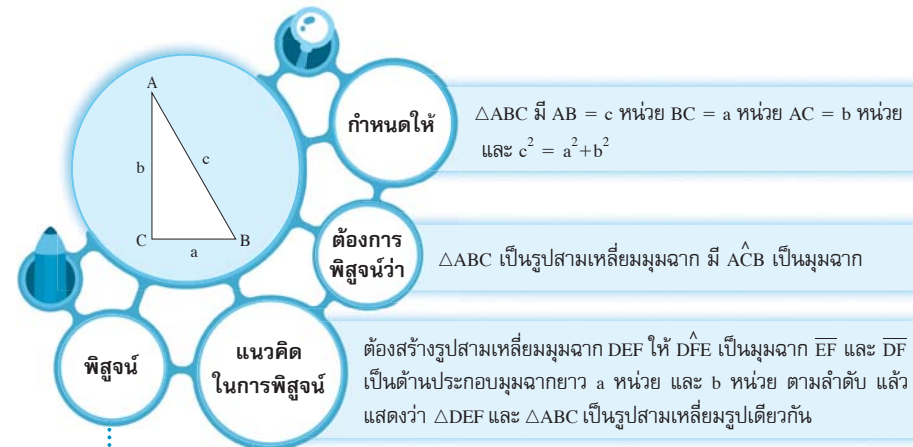
ถ้า $\triangle XYZ$ มีด้านยาว x , y และ z หน่วย ตามลำดับ และ $x^2 = y^2 + z^2$ จะได้ว่า $\triangle XYZ$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และมีด้านที่ยาว x หน่วย เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

ซึ่งเป็นจริงตาม**บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส (converse of Pythagoras' Theorem)** ที่กล่าวว่า

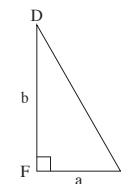
บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส

สำหรับรูปสามเหลี่ยมใดๆ ถ้ากำลังสองของความยาวของด้านด้านหนึ่งเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านอีกสองด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสนั้นเป็นจริง โดยสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้



สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF ให้ $\angle DFE$ เป็นมุมฉาก $\overline{EF}$ และ $\overline{DF}$ เป็นด้านประกอบมุมฉากยาว a หน่วย และ b หน่วย ตามลำดับ แล้วแสดงว่า $\triangle DEF$ และ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปเดียวกัน



$EF = BC = a$ และ $DF = AC = b$ (จากการสร้าง)

$\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จะได้

$$DE^2 = a^2 + b^2 \quad (\text{กำหนดให้})$$

แต่จาก $\triangle ABC$ จะได้

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (\text{กำหนดให้})$$

ดังนั้น $DE^2 = c^2$ (สมบัติการเท่ากัน)

นั่นคือ $DE = c$

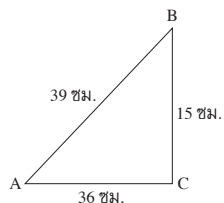
จะได้ $\triangle DEF$ และ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันสนิท

ดังนั้น $\angle DFE = \angle ACB = 90^\circ$ ($\triangle DEF$ และ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันสนิท)

นั่นคือ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\angle ACB$ เป็นมุมฉาก

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $\triangle ABC$ มีด้านยาว 15 เซนติเมตร 36 เซนติเมตร และ 39 เซนติเมตร $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

วิธีทำ



ให้

$$\begin{aligned} a &= 15 \text{ เซนติเมตร} \\ b &= 36 \text{ เซนติเมตร} \\ c &= 39 \text{ เซนติเมตร} \end{aligned}$$

จะได้

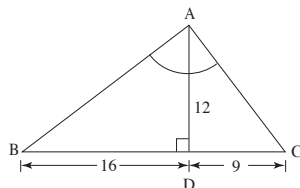
$$\begin{aligned} a^2 &= 225 \\ b^2 &= 1296 \\ c^2 &= 1521 \\ a^2 + b^2 &= 225 + 1296 \\ &= 1521 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $c^2 = a^2 + b^2$

ดังนั้น $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ตอบ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $\triangle ABC$ ดังรูป ให้แสดงว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



วิธีทำ $\triangle ABD$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จะได้

$$\begin{aligned} AB^2 &= AD^2 + BD^2 \\ &= 12^2 + 16^2 \\ &= 144 + 256 \\ AB^2 &= 400 \end{aligned}$$

$\triangle ACD$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จะได้

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + CD^2 \\ &= 12^2 + 9^2 \\ &= 144 + 81 \\ AC^2 &= 225 \end{aligned}$$

จะได้

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= 400 + 225 \\ &= 625 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} BC^2 &= (BD + DC)^2 \\ &= (16 + 9)^2 \\ &= 25^2 \\ &= 625 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

ดังนั้น $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\angle BAC$ เป็นมุมฉาก

ตอบ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\angle BAC$ เป็นมุมฉาก

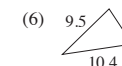
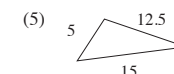
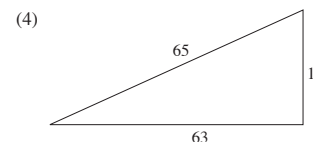
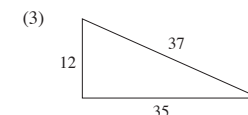
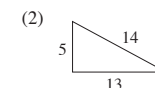
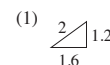
กิจกรรมเสนอแนะ

ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มตามความเหมาะสมและแจกการ์ดชุดความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมให้นักเรียนแต่ละกลุ่ม จากนั้นครูจับเวลา 30 วินาที ให้แต่ละกลุ่มตรวจสอบว่าชุดความยาวของด้านที่ได้รับเป็นชุดความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่



แบบฝึกหัดที่ 3

1. ใช้บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสตรวจสอบว่ารูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ (6 คะแนน)



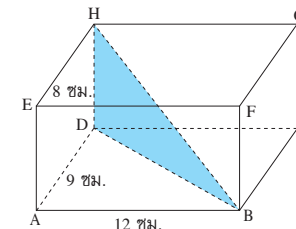
2. ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสหรือบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสแก้ปัญหาแต่ละข้อต่อไปนี้ (5 คะแนน)

- (1) รูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวของด้านเป็น 9 นิ้ว 12 นิ้ว และ 18 นิ้ว เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่
- (2) รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 13 เซนติเมตร และด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 12 เซนติเมตร รูปสามเหลี่ยมมุมฉากนี้มีพื้นที่กี่ตารางเซนติเมตร
- (3) รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีด้านยาว 9 เซนติเมตร และ 12 เซนติเมตร และเส้นทแยงมุมยาว 15 เซนติเมตร รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานนี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ ถ้าไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ความยาวเส้นทแยงมุมที่ยาว 15 เซนติเมตรนี้เป็นเส้นทแยงมุมเส้นที่สั้นกว่าหรือยาวกว่าเส้นทแยงมุมอีกเส้นหนึ่ง
- (4) รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีเส้นทแยงมุมเส้นหนึ่งยาว 26 เซนติเมตร และความยาวของด้านอีกด้านหนึ่งเป็น 10 เซนติเมตร รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากนี้มีความยาวรอบรูปกี่เซนติเมตร
- (5) รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนรูปหนึ่งมีเส้นทแยงมุมยาว 16 เซนติเมตร และ 12 เซนติเมตร รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนนี้มีความยาวรอบรูปกี่เซนติเมตร

3. แสดงวิธีทำ (12 คะแนน)

- (1) รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านกว้าง 7 เซนติเมตร ด้านยาว 24 เซนติเมตร จะมีเส้นทแยงมุมยาวกี่เซนติเมตร
- (2) รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 34 เซนติเมตร และด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 30 เซนติเมตร รูปสามเหลี่ยมมุมฉากนี้จะมีพื้นที่กี่ตารางเซนติเมตร
- (3) รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาวของเส้นทแยงมุมเป็น 16 เซนติเมตร รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสนี้มีพื้นที่กี่ตารางเซนติเมตร
- (4) รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวรอบรูป 28 เซนติเมตร และมีความกว้าง 6 เซนติเมตร จะมีเส้นทแยงมุมยาวกี่เซนติเมตร
- (5) รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีด้านประกอบมุมยอดยาวด้านละ 13 เซนติเมตร ถ้าฐานยาว 24 เซนติเมตร แล้วรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วนี้มีพื้นที่กี่ตารางเซนติเมตร
- (6) สนวนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง 12 เมตร และเส้นทแยงมุมยาว 20 เมตร สนวนแห่งนี้มีความยาวรอบสวนกี่เมตร

4. จากทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABCDEFGH มีด้าน AB ยาว 12 เซนติเมตร ด้าน AD ยาว 9 เซนติเมตร และด้าน DH ยาว 8 เซนติเมตร ด้าน BH มีความยาวกี่เซนติเมตร (2 คะแนน)



ได้
เต็ม
25

ดีมาก	80% – 100%	20 – 25 คะแนน
ดี	60% – 79%	15 – 19 คะแนน
ปานกลาง	40% – 59%	10 – 14 คะแนน
ปรับปรุง	0% – 39%	0 – 9 คะแนน

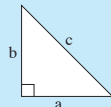
ถ้าได้น้อยกว่า 60%
ให้ทบทวนอีกครั้ง



กิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้ที่ 3

ให้นักเรียนแบ่งกลุ่มแล้วปฏิบัติกิจกรรมต่อไปนี้
ช่วยกันพิจารณาตามหัวข้อดังนี้

ถ้าจำนวนเต็มบวก a , b และ c สอดคล้องกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส
 $a^2 + b^2 = c^2$ แล้วจะเรียกจำนวนเต็มบวก a , b และ c ว่า **สามสิ่งอันดับพีทาโกรัส (Pythagorean triple)**



- แสดงว่าสามจำนวนต่อไปนี้เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสหรือไม่
 - 3, 4, 5
 - 6, 8, 10
 - 5, 12, 13
 - 7, 24, 25
 - 10, 24, 26
 - 9, 12, 15
- พิจารณาว่าข้อต่อไปนี้มีความสัมพันธ์กันอย่างไร พร้อมทั้งอภิปรายหาข้อสรุป
 - ข้อ (1), (3), (4)
 - ข้อ (1), (2), (6)
 - ข้อ (3), (5)
- หาสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสโดยกำหนดจำนวนที่มีค่าน้อยที่สุดเป็น 9 และ 11

หลังจากทำกิจกรรมเสร็จแล้ว ให้อธิบายประโยชน์ที่ได้จากการทำกิจกรรมนี้

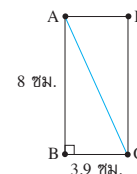
4. การนำความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับไปใช้ในชีวิตจริง

นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสไปแก้ปัญหาในชีวิตจริงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 บริษัทผู้ผลิตนมบรรจุกล่องแห่งหนึ่งต้องการติดหลอดชนิดตรงตามแนวแฉงมุมที่บริเวณด้านหลังของกล่องนมทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยต้องการให้หลอดมีความยาวพอดีกับแนวแฉงมุมดังรูป ถ้ากล่องนมนี้มีความกว้าง 3 เซนติเมตร ความยาว 3.9 เซนติเมตร และความสูง 8 เซนติเมตร แล้วบริษัทผู้ผลิตนมบรรจุกล่องจะต้องวางแผนซื้อหลอดที่มีความยาวประมาณกี่เซนติเมตร



วิธีทำ พิจารณาบริเวณด้านหลังของกล่องนมทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ต้องการติดหลอด



ให้ AC แทนความยาวของหลอดที่ต้องการติด
จากรูป $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
โดยมี $\angle B$ เป็นมุมฉาก

$$\begin{aligned}
 \text{จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้} \quad AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\
 &= 8^2 + 3.9^2 \\
 &= 64 + 15.21 \\
 &= 79.21 \\
 &= 8.9^2
 \end{aligned}$$

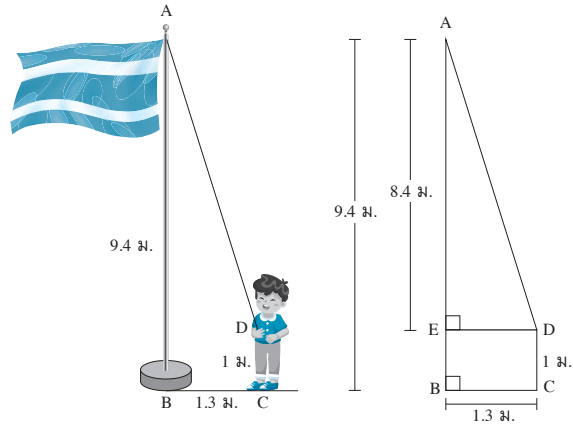
$$AC = 8.9 \text{ เซนติเมตร}$$

ดังนั้น บริษัทผู้ผลิตนมบรรจุกล่องจะต้องวางแผนซื้อหลอดที่มีความยาวประมาณ 8.9 เซนติเมตร

ตอบ บริษัทผู้ผลิตนมบรรจุกล่องจะต้องวางแผนซื้อหลอดที่มีความยาวประมาณ 8.9 เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 2 การเชิญธงชาติขึ้นสู่ยอดเสาธงที่มีความสูงจากฐาน 9.4 เมตร ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง ถ้าตำแหน่งที่นักเรียนเชิญธงชาติยืนอยู่ห่างจากตำแหน่งโคนเสาธงเป็นระยะ 1.3 เมตร และระดับมือของผู้เชิญธงชาติอยู่สูงจากพื้นราบ 1 เมตร แล้วจะต้องใช้เชือกยาวประมาณกี่เมตร (ไม่คิดความยาวเชือกที่มัดเป็นปม)

วิธีทำ



ลาก $\overline{DE}$ จะได้

$$\begin{aligned} AE &= AB - BE \\ &= 9.4 - 1 \text{ เมตร} \\ &= 8.4 \text{ เมตร} \end{aligned}$$

จากรูป $\triangle AED$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี $\angle AED$ เป็นมุมฉาก และมี $\overline{AD}$ เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

$$\begin{aligned} \text{จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ } AD^2 &= AE^2 + ED^2 \\ &= 8.4^2 + 1.3^2 \\ &= 70.56 + 1.69 \\ &= 72.25 \\ &= 8.5^2 \end{aligned}$$

$$AD = 8.5 \text{ เมตร}$$

เนื่องจากการเชิญธงชาติขึ้นสู่ยอดเสาจะต้องร้อยเชือกทบกัน ดังนั้น จะต้องใช้เชือกยาวประมาณ $8.5 \times 2 = 17$ เมตร

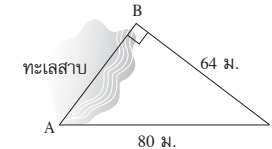
ตอบ จะต้องใช้เชือกยาวประมาณ 17 เมตร

นักเรียนคิดว่า
การยืนเคารพธงชาติ
มีความสำคัญอย่างไร

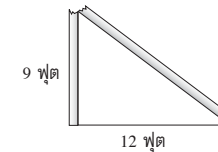


แบบฝึกหัดที่ 4

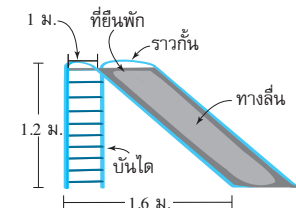
- ในการหาระยะทางระหว่างจุด A และจุด B ซึ่งเป็นจุดที่อยู่ตรงกันข้ามของทะเลสาบ ผู้สำรวจได้กำหนดจุด C เพื่อให้ $\triangle ABC$ เป็นมุมฉาก โดยการวัดพบวาระยะ AC ยาว 80 เมตร และระยะ BC ยาว 64 เมตร ระยะจากจุด A ถึงจุด B ยาวกี่เมตร (2 คะแนน)



- เสาธงต้นหนึ่งหัก ณ จุดที่สูงจากพื้นดิน 9 ฟุต และจุดปลายด้านบนของเสาธงโดนพื้นซึ่งห่างจากฐาน 12 ฟุต ดังรูป ก่อนที่เสาธงจะหักเสาธงสูงกี่ฟุต (2 คะแนน)

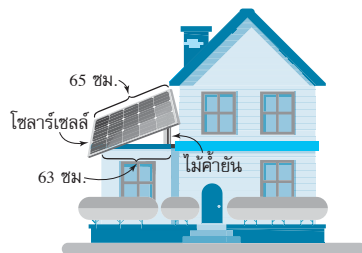


- อาคารสองหลังอยู่ห่างกัน 12 เมตร อาคารหลังหนึ่งสูง 14 เมตร อีกหลังหนึ่งสูง 23 เมตร ต้องการใช้บันไดพาตระหว่งตาดฟ้าของอาคารทั้งสอง ความยาวของบันไดจะต้องยาวอย่างน้อยกี่เมตร (2 คะแนน)
- ปรกรณ์และเพื่อนร่วมกันจัดกิจกรรมค่ายอาสาโดยเดินทางไปชนบทแห่งหนึ่ง และต้องการสร้างกระดานสไล่นในสนามเด็กเล่นของหมู่บ้านในชนบทลักษณะดังรูป



- ปรกรณ์และเพื่อนจะต้องจัดหาไม้ที่มีความยาวกี่เมตร เพื่อสร้างทางสไล่นของกระดานสไล่นนี้ (2 คะแนน)

5. ครอบครัวของปณันต้องการประหยัดค่าไฟฟ้าจึงจัดหาโซลาร์เซลล์มาติดตั้งที่บริเวณหลังคาบ้าน ถ้าหลังคาบ้านในบริเวณที่ต้องการติดโซลาร์เซลล์นี้มีความกว้าง 63 เซนติเมตร และโซลาร์เซลล์มีด้านกว้าง 65 เซนติเมตร ดังรูป แล้วในการติดตั้งโซลาร์เซลล์จะต้องใช้ไม้ค้ำยันยาวกี่เซนติเมตร (2 คะแนน)



ได้

เต็ม
10

ดีมาก	80% – 100%	8 – 10 คะแนน
ดี	60% – 79%	6 – 7 คะแนน
ปานกลาง	40% – 59%	4 – 5 คะแนน
ปรับปรุง	0% – 39%	0 – 3 คะแนน

ถ้าได้น้อยกว่า 60%
ให้ทบทวนอีกครั้ง



กิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้ที่ 4

- ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 4 – 5 คน
- แต่ละกลุ่มเขียนแผนผังการเดินทางไกลของลูกเสือกลุ่มหนึ่งจากสถานการณ์ต่อไปนี้
ในการเดินทางไกลของลูกเสือกลุ่มหนึ่ง เริ่มต้นเดินทางไปทางทิศตะวันออก 4 กิโลเมตร แล้วเดินต่อไปทางทิศเหนือ 6 กิโลเมตร เดินต่อไปทางทิศตะวันออก 3 กิโลเมตร เดินต่อไปทางทิศใต้ 1 กิโลเมตร เดินต่อไปทางทิศตะวันออก 5 กิโลเมตร จากนั้นเลี้ยวไปทางทิศเหนืออีก 11 กิโลเมตร
- ตอบคำถามต่อไปนี้ “ลูกเสือกลุ่มนี้อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นกี่กิโลเมตร” โดยหาความสัมพันธ์จากแผนผังในข้อ 2 แล้วหาคำตอบโดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส
- แต่ละกลุ่มส่งตัวแทนออกมานำเสนอหน้าชั้นเรียน

หลังจากทำกิจกรรมเสร็จแล้ว ให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

- แสดงแผนผังการเดินทางไกลของลูกเสือจากสถานการณ์ที่กำหนดให้เพื่อนในชั้นเรียนดู
- แสดงวิธีการหาคำตอบให้เพื่อนในชั้นเรียนดู และมีการอภิปรายร่วมกัน
- อธิบายประโยชน์ที่ได้จากการทำกิจกรรมนี้



กิจกรรมส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

“ปริศนาของเคอร์รี่ (Curry's Paradox)”

จุดประสงค์

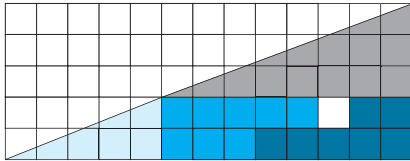
นำทฤษฎีบทพีทาโกรัสมาช่วยในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้

วัสดุอุปกรณ์

- กระดาษแข็ง
- ไม้บรรทัด
- ดินสอ

ขั้นตอนในการดำเนินกิจกรรม

- ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 3 – 4 คน
- ใช้กระดาษลอกลายคัดลอกรูปเรขาคณิตทั้ง 4 รูป ที่กำหนดให้



- แต่ละกลุ่มนำรูปเรขาคณิตทั้ง 4 รูป มาจัดเรียงเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยที่ไม่เกิดช่องว่าง
- ตอบคำถามต่อไปนี้ โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสมาช่วยอธิบาย
“จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่จัดเรียงใหม่ในข้อ 3 เพราะเหตุใดช่องว่างจึงหายไป”
- นำเสนอผลงานเพื่อแลกเปลี่ยนเรียนรู้

ปริศนา คือ ประโยคหรือกลุ่มของประโยคที่เป็นจริงอย่างชัดเจน แต่นำไปสู่ความขัดแย้งในตัวเอง หรือสถานการณ์ที่อยู่นอกความคิดทั่วไป



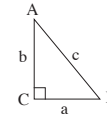
หลังจากทำกิจกรรมเสร็จแล้ว ให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

- แสดงวิธีการจัดเรียงรูปเรขาคณิตทั้ง 4 รูป ให้เกิดเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยที่ไม่เกิดช่องว่างให้เพื่อนในชั้นเรียนดู
- ตอบคำถามว่า “เพราะเหตุใดช่องว่างจึงหายไป” และมีการอภิปรายร่วมกัน
- อธิบายประโยชน์ที่ได้จากการทำกิจกรรมนี้



สรุป

รูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมภายในมุมใดมุมหนึ่งมีขนาด 90 องศา ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมฉาก เรียกว่า **ด้านตรงข้ามมุมฉาก** ซึ่งเป็นด้านที่ยาวที่สุดในรูปสามเหลี่ยม อีกสองด้าน เรียกว่า **ด้านประกอบมุมฉาก**



เรียก $\overline{AB}$ ว่าด้านตรงข้ามมุมฉาก

เรียก $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ ว่าด้านประกอบมุมฉาก

จะได้ความสัมพันธ์ของความยาวของด้านทั้งสามเป็น $c^2 = a^2 + b^2$

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากจะเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก

บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส

สำหรับรูปสามเหลี่ยมใดๆ ถ้ากำลังสองของความยาวของด้านด้านหนึ่งเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านอีกสองด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

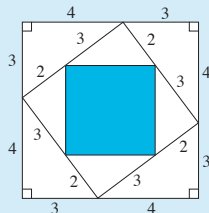
ถ้าคุณความยาวของด้านทุกด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากด้วยจำนวนบวกเดียวกัน ความยาวแต่ละด้านที่ได้จะยังคงเป็นความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



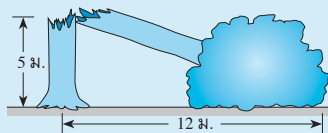


แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์

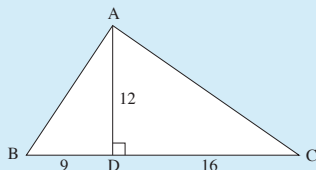
1. รูปสี่เหลี่ยมส่วนที่ระบายสีพื้นที่ี่ตารางหน่วย (1 คะแนน)



2. บ้านไฉยยาว 26 ฟุต เมื่อนำมาวางพิงอาคารโดยให้ปลายบันไดที่วางบนพื้นราบห่างจากอาคาร 10 ฟุต บ้านไฉยจะอยู่สูงจากพื้นราบกี่ฟุต (2 คะแนน)
3. ต้นไม้ต้นหนึ่งถูกพายุพัดหักเป็นสองท่อน ท่อนแรกยาว 5 เมตร ท่อนที่สองแตะพื้นดินและห่างจากโคนต้น 12 เมตร ดังรูป เดิมต้นไม้สูงกี่เมตร (2 คะแนน)

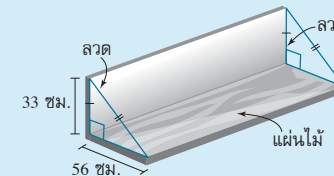


4. จากรูป $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ (2 คะแนน)



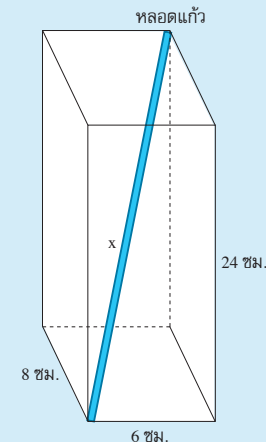
5. หมู่บ้าน B อยู่ทางทิศตะวันออกของหมู่บ้าน A และอยู่ห่างกัน 26 กิโลเมตร หมู่บ้าน C อยู่ทางทิศเหนือของหมู่บ้าน B และอยู่ห่างกัน 14 กิโลเมตร หมู่บ้าน D อยู่ทางทิศตะวันออกของหมู่บ้าน C และอยู่ห่างกัน 22 กิโลเมตร หมู่บ้าน A และหมู่บ้าน D อยู่ห่างกันกี่กิโลเมตร (2 คะแนน)

6. บ้านไฉยหนึ่งยาว 50 ฟุต ถ้าเอนไปทางทิศตะวันตกปลายบันไดจะจรดเสาสูง 48 ฟุตพอดี แต่ถ้าเอนไปทางทิศตะวันออกปลายบันไดจะจรดเสาสูง 14 ฟุตพอดี เสาทั้งสองต้นอยู่ห่างกันกี่ฟุต (2 คะแนน)
7. ถ้าน้ำฟ้าต้องการนำแผ่นไม้และเศษลวดซึ่งเป็นวัสดุเหลือใช้มาสร้างเป็นชั้นวางของแบบติดผนัง ดังรูป



แล้วน้ำฟ้าจะต้องใช้เศษลวดยาวกี่เซนติเมตร (2 คะแนน)

8. กล่องใบหนึ่งมีขนาดดังรูป หลอดแก้วที่ยาวที่สุดที่จะใส่กล่องได้มีความยาวกี่เซนติเมตร (2 คะแนน)



ได้
เต็ม
15

ดีมาก	80% - 100%	12 - 15 คะแนน
ดี	60% - 79%	9 - 11 คะแนน
ปานกลาง	40% - 59%	6 - 8 คะแนน
ปรับปรุง	0% - 39%	0 - 5 คะแนน

ถ้าได้น้อยกว่า 60%
ให้ทบทวนอีกครั้ง