

คำอธิบายรายวิชา

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

เวลาเรียน 100 ชั่วโมง จำนวน 2.5 หน่วยกิต

ศึกษา ฝึกทักษะการคิดคำนวณ ทักษะการแก้ปัญหา และทักษะการให้เหตุผลในสาระต่อไปนี้

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน การใช้ฟังก์ชันในชีวิตจริง กราฟของฟังก์ชัน การดำเนินการของฟังก์ชัน ฟังก์ชันผกผัน

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม รากที่สอง ในระบบจำนวนจริง รากที่ n ในระบบจำนวนจริง จำนวนจริงในรูปกรณฑ์ เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม การหาค่าลอการิทึม การเปลี่ยนฐานของลอการิทึม สมการและอสมการลอการิทึม การประยุกต์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

เรขาคณิตวิเคราะห์ ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย

โดยจัดประสบการณ์หรือสร้างสถานการณ์ที่ใกล้ตัวให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ด้วยกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้นักเรียนมีความรู้ ทักษะ และสมรรถนะในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ และการคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ส่งเสริมให้นักเรียนเห็นคุณค่า และมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ ใฝ่เรียนรู้ ฝึกฝนด้วยความมุ่งมั่น ซื่อสัตย์ มีระเบียบวินัย รอบคอบ มีวิจรรณญาณ และสามารถนำความรู้ ทักษะ และสมรรถนะที่ได้รับไปประยุกต์ใช้ในการศึกษาต่อและการดำรงชีวิตได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ผลการเรียนรู้

- หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ การหารฟังก์ชัน หาฟังก์ชันประกอบ และฟังก์ชันผกผัน
- ใช้สมบัติของฟังก์ชันในการแก้ปัญหา
- เข้าใจลักษณะกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- แก้สมการเอกซ์โพเนนเชียลและสมการลอการิทึม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ในการแก้ปัญหา

รวมทั้งหมด 5 ผลการเรียนรู้

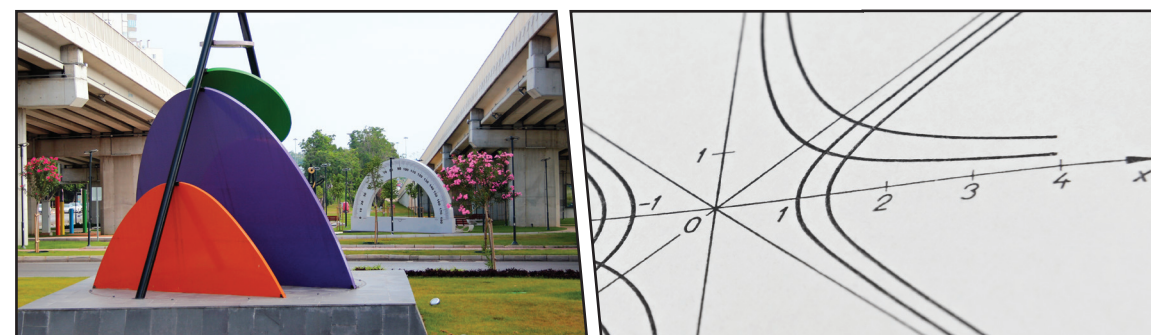
หนังสือเรียน
รายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔
เล่ม ๒



ผู้เรียบเรียง

อาจารย์สุวรรณ์ ทองพันชั่ง

ผู้ตรวจ

ดร.กิตติปกรณ อัมเถื่อน
อาจารย์เจริญ ราคาแก้ว
อาจารย์ภาณุวัฒน์ เกียรติณฤมล

บรรณาธิการ

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิรุทธ นิลสระคู

สถาบันพัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.)

๑๒๕๖/๙ ถนนนครไชยศรี แขวงถนนนครไชยศรี เขตดุสิต กรุงเทพฯ ๑๐๓๐๐

โทร. ๐-๒๒๔๓-๘๐๐๐ (อัตโนมัติ ๑๕ สาย), ๐-๒๒๔๑-๘๙๙๙

แฟกซ์ : ทุกหมายเลข, แฟกซ์อัตโนมัติ : ๐-๒๒๔๑-๔๑๓๑, ๐-๒๒๔๓-๗๖๖๖

website : www.iadth.com

สงวนลิขสิทธิ์

บริษัท พัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.) จำกัด

พ.ศ. ๒๕๖๗

พิมพ์ครั้งที่ ๑ จำนวน ๑๐,๐๐๐ เล่ม

ISBN : 978-616-05-5120-0

คำนำ

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 นี้ เป็นหนังสือที่จัดทำขึ้นตามตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 โดยเนื้อหาในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เล่มนี้ มีทั้งหมด 3 หน่วยการเรียนรู้ ได้แก่ หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม และหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรขาคณิตวิเคราะห์

เนื้อหาภายในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมจะประกอบด้วย เนื้อหาเพื่อให้เกิดการต่อยอดองค์ความรู้และเรียนรู้อย่างลึกซึ้งจากการเรียนรู้ในคณิตศาสตร์รายวิชาพื้นฐาน มีเนื้อหาที่ไม่ได้เชื่อมโยงกับการเรียนรู้ในคณิตศาสตร์รายวิชาพื้นฐาน เช่น สาระการวัดและเรขาคณิต และสาระแคลคูลัส มีสรุปความคิดรวบยอด ตัวอย่าง เกร็ดความรู้ แบบฝึกหัดที่เหมาะสม และมีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อที่จะมุ่งส่งเสริมพัฒนาความรู้ ความเข้าใจ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ โดยเน้นให้เกิดการคิดวิเคราะห์ การคิดอย่างมีวิจารณญาณ การแก้ปัญหา การคิดสร้างสรรค์ การใช้เทคโนโลยี การสื่อสารและการร่วมมือ เพื่อนำไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตจริง อีกทั้งมีการส่งเสริมการเรียนรู้ด้วยวิธีการที่หลากหลายและพัฒนาคุณภาพของผู้เรียนตามศักยภาพ ซึ่งแสดงให้เห็นถึงการเน้นบทบาทของผู้เรียนเป็นสำคัญ

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 นี้ จะเป็นประโยชน์ในการเรียนรู้ ส่งเสริมพัฒนาเด็กไทยให้รักและมีความสุขในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ที่เพียงพอในการพัฒนาคุณภาพชีวิต สามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และเป็นพื้นฐานสำคัญในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ขั้นสูงต่อไปได้เป็นอย่างดี

อาจารย์สุวรรณ์ ทองพันชั่ง
สถาบันพัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.)

สารบัญ

หน้า

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1

1

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

5

1. ความสัมพันธ์ 6
2. ฟังก์ชัน 19
3. การใช้ฟังก์ชันในชีวิตจริง 36
4. กราฟของฟังก์ชัน 44
5. การดำเนินการของฟังก์ชัน 55
6. ฟังก์ชันผกผัน 65

แบบฝึกหัดท้ายหน่วยการเรียนรู้ที่ 1

70

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2

2

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

74

1. เลขยกกำลัง 75
 - 1.1 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม 75
 - 1.2 รากที่สองในระบบจำนวนจริง รากที่ n ในระบบจำนวนจริง และจำนวนจริงในรูปกรณฑ์ 77
 - 1.3 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ 87
2. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล 94
3. ฟังก์ชันลอการิทึม 101
4. การหาค่าลอการิทึม 111
5. การเปลี่ยนฐานของลอการิทึม 114
6. สมการและอสมการลอการิทึม 117
7. การประยุกต์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม 124

แบบฝึกหัดท้ายหน่วยการเรียนรู้ที่ 2

131

ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

หน้า

หน่วยการเรียนรู้ที่

3

เรขาคณิตวิเคราะห์

133

1. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ 134
 - 1.1 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด 134
 - 1.2 จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง 139
 - 1.3 ความชันของเส้นตรง 142
 - 1.4 เส้นขนาน 146
 - 1.5 เส้นตั้งฉาก 149
 - 1.6 ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง 154
 - 1.7 ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด 164
2. ภาคตัดกรวย 170
 - 2.1 วงกลม 172
 - 2.2 วงรี 182
 - 2.3 พาราโบลา 189
 - 2.4 ไฮเพอร์โบลา 198
 - 2.5 การเลื่อนกราฟ 208

แบบฝึกหัดท้ายหน่วยการเรียนรู้ที่ 3

222



แผนผังสาระการเรียนรู้



ผลการเรียนรู้

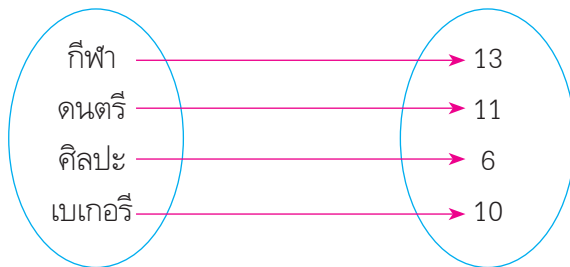
- หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ การหารฟังก์ชัน หาฟังก์ชันประกอบ และฟังก์ชันผกผัน
- ใช้สมบัติของฟังก์ชันในการแก้ปัญหา

1. ความสัมพันธ์

ในการเลือกชุมนุมของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/1 จำนวน 30 คน มีนักเรียนที่เลือกชุมนุมกีฬา 13 คน เลือกชุมนุมดนตรี 11 คน เลือกชุมนุมศิลปะ 6 คน และเลือกชุมนุมเบเกอรี่ 10 คน สามารถเขียนตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่างชุมนุมและจำนวนนักเรียนที่เลือกแต่ละชุมนุมได้ ดังนี้

ชุมนุม	กีฬา	ดนตรี	ศิลปะ	เบเกอรี่
จำนวนนักเรียน (คน)	13	11	6	10

เขียนแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างชุมนุมและจำนวนนักเรียนที่เลือกแต่ละชุมนุมได้ ดังนี้



ในทางคณิตศาสตร์ เราสามารถเขียนคู่อันดับแสดงความสัมพันธ์โดยให้สมาชิกตัวที่หนึ่งแทนชื่อชุมนุม และสมาชิกตัวที่สองแทนจำนวนนักเรียนที่เลือกแต่ละชุมนุมได้ ดังนี้

(กีฬา, 13), (ดนตรี, 11), (ศิลปะ, 6), (เบเกอรี่, 10)

คู่อันดับ (ordered pairs) หมายถึง การจับคู่สิ่งสองสิ่งโดยถือลำดับเป็นสำคัญ ถ้า a, b เป็นสิ่งสองสิ่ง คู่อันดับ a, b เขียนแทนด้วย (a, b)

กำหนด (a, b) และ (c, d) เป็นคู่อันดับ และ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงใด ๆ $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$ กล่าวคือ สมาชิกตัวหน้าเท่ากันและสมาชิกตัวหลังเท่ากัน

ความสัมพันธ์ (relation) หมายถึง เซตของคู่อันดับ (a, b) โดยที่ a และ b มีความเกี่ยวข้องหรือมีความสัมพันธ์กันบางประการ จากสถานการณ์ข้างต้น จะได้ความสัมพันธ์ที่สมาชิกตัวหลังเป็นจำนวนนักเรียนที่เลือกชุมนุมที่เป็นสมาชิกตัวหน้า คือ $\{(กีฬา, 13), (ดนตรี, 11), (ศิลปะ, 6), (เบเกอรี่, 10)\}$



บทนิยาม

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือ เซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมด โดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย $A \times B$

ซึ่งเขียน $A \times B$ ในรูปแบบบอกเงื่อนไขได้ ดังนี้ $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$

ถ้าเซต A และเซต B เป็นเซตจำกัด แล้วจำนวนสมาชิกของ $A \times B = n(A) \times n(B)$

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ หา

- 1) $A \times B$
- 2) $B \times A$
- 3) $A \times A$
- 4) $B \times B$



ชวนคิด

$A \times B = B \times A$ หรือไม่

- ตอบ
- 1) $A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$
 - 2) $B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$
 - 3) $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
 - 4) $B \times B = \{(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$



ข้อสังเกต

เนื่องด้วย $n(A) = 3$, $n(B) = 2$ ทำให้ได้ว่า

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 3 \times 2 = 6$$

$$n(B \times A) = n(B) \times n(A) = 2 \times 3 = 6$$

$$n(A \times A) = n(A) \times n(A) = 3 \times 3 = 9$$

$$n(B \times B) = n(B) \times n(B) = 2 \times 2 = 4$$

สมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน

ให้ A, B, C, D เป็นเซตใด ๆ

1. $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$ หรือ $A = \emptyset$ หรือ $B = \emptyset$
2. $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$
3. ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัด แล้ว $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$
4. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
5. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
6. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
7. $A \cup (B \times C) \neq (A \cup B) \times (A \cup C)$
8. $A \cap (B \times C) \neq (A \cap B) \times (A \cap C)$
9. $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$
10. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \times C \subset B \times C$



บทนิยาม

r เป็นความสัมพันธ์ (relation) จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$



ควรรู้

1. ถ้า $r \subset A \times B$ แล้ว r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B
2. ถ้า $r \subset A \times A$ แล้ว r เป็นความสัมพันธ์ใน A
3. เนื่องจาก $\emptyset$ เป็นสับเซตของทุกเซต จะได้ $\emptyset \subset A \times B$
แสดงว่า $\emptyset$ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ด้วย
4. เนื่องจาก $A \times B \subset A \times B$
แสดงว่า $A \times B$ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ด้วยเช่นกัน

ตัวอย่างที่

2

กำหนดให้ $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6\}$

จะได้ว่า $A \times B = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6)\}$

ถ้า r_1 เป็นความสัมพันธ์น้อยกว่าจาก A ไป B

จะได้ว่า $r_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid x < y\}$ หรือ $r_1 = \{(2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 6), (4, 6)\}$

ถ้า r_2 เป็นความสัมพันธ์กำลังสองจาก A ไป B

จะได้ว่า $r_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid x^2 = y\}$

หรือ $r_2 = \{(2, 4)\}$

ถ้า r_3 เป็นความสัมพันธ์มากกว่าอยู่ 1 จาก A ไป B

จะได้ว่า $r_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid x = y + 1\}$

หรือ $r_3 = \{(3, 2)\}$



ควรระวัง

ในการเขียนความสัมพันธ์แบบ
แจกแจงสมาชิก จะต้องดูว่าความสัมพันธ์นั้น
เป็นความสัมพันธ์จากเซตใดไปเซตใด

ตัวอย่างที่

3

กำหนดให้ $A = \{a, b\}$ และ $B = \{1\}$ แสดงความสัมพันธ์ต่าง ๆ ที่ได้จาก $A \times B$

วิธีทำ

เนื่องจาก $A \times B = \{(a, 1), (b, 1)\}$

จากบทนิยาม r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times B$
นั่นคือ สับเซตทั้งหมดของ $A \times B$ ถือว่าเป็นความสัมพันธ์ทั้งสิ้น

จะได้ว่า $r_1 = \emptyset$ เพราะ $\emptyset$ เป็นสับเซตของทุกเซต

$r_2 = \{(a, 1)\}$

$r_3 = \{(b, 1)\}$

$r_4 = \{(a, 1), (b, 1)\} = A \times B$



ข้อสังเกต

จำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดที่เกิดจาก $A \times B = 2^{n(A) \times n(B)}$

จากตัวอย่างที่ 3 จะได้ว่า จำนวนความสัมพันธ์ที่เกิดจาก $A \times B = 2^{2 \times 1} = 4$ ความสัมพันธ์

กราฟของความสัมพันธ์



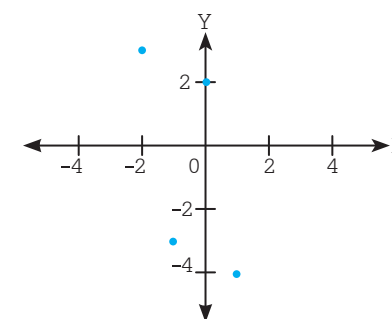
บทนิยาม

ให้ r เป็นสับเซตของ $R \times R$ กราฟของความสัมพันธ์ r คือ เซตของจุดในระนาบ โดยที่แต่ละจุด
แทนคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ r

กราฟของความสัมพันธ์ r ใด ๆ จะมีอยู่ 3 ลักษณะ ได้แก่

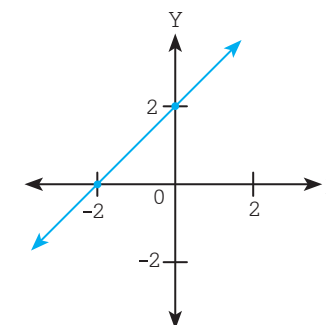
1) ความสัมพันธ์ที่เป็นเซตแบบแจกแจงสมาชิกที่มีสมาชิกเป็นคู่อันดับ จะมีกราฟเป็นจุด

$$r_1 = \{(-2, 3), (0, 2), (1, -4), (-1, -3)\}$$

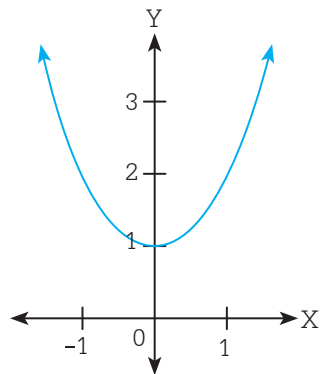


2) ความสัมพันธ์ที่เป็นเซตแบบบอกเงื่อนไขในรูปสมการ จะมีกราฟเป็นเส้นในลักษณะต่าง ๆ

$$r_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x + 2\}$$

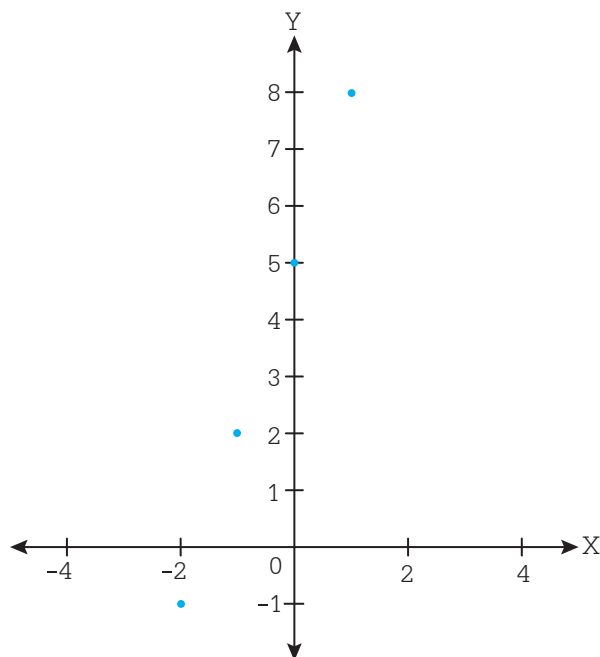


$$r_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + 1\}$$

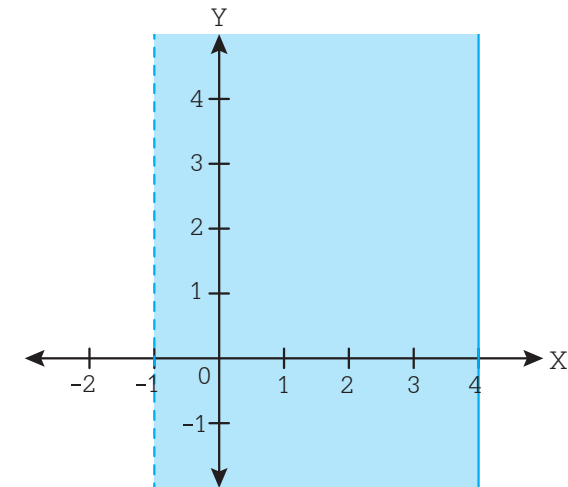


ควรระวัง

ในบางครั้งความสัมพันธ์ที่เป็นเซตแบบบอกเงื่อนไขในรูปสมการ อาจเขียนกราฟเป็นจุดได้ เช่นเดียวกัน เช่น $r_4 = \{(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \mid y = 3x + 5\}$ ทั้งนี้ เนื่องจากความสัมพันธ์ดังกล่าว กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนเต็ม จึงเขียนกราฟได้ ดังนี้



- 3) ความสัมพันธ์ที่เป็นเซตแบบบอกเงื่อนไขในรูปสมการ จะมีกราฟเป็นพื้นที่ส่วนหนึ่งของระนาบ $r_5 = \{(x, y) \mid -1 < x \leq 4\}$



ส่วนที่เป็นเส้นทึบแสดงว่าจุดทุกจุดบนเส้นนั้นรวมอยู่ในกราฟ ส่วนที่เป็นเส้นประแสดงว่าจุดทุกจุดบนเส้นประนั้นไม่รวมอยู่ในกราฟ จากกราฟด้านบนจะได้ว่า (4, 0) รวมอยู่ในกราฟ แต่ (-1, 0) ไม่รวมอยู่ในกราฟนี้

โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์



บทนิยาม

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์

โดเมนของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของทุกคู่อันดับที่อยู่ใน r

เรนจ์ของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของทุกคู่อันดับที่อยู่ใน r

เรานิยมใช้สัญลักษณ์ D_r แทน โดเมนของ r และ R_r แทน เรนจ์ของ r

$$D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$$

$$R_r = \{y \mid (x, y) \in r\}$$

การหาโดเมนและเรนจ์ในเซตแบบแจกแจงสมาชิก

ให้แจกแจงสมาชิกของความสัมพันธ์ตามเงื่อนไขที่ต้องการ และเขียนโดเมนและเรนจ์ ดังนี้

โดเมน คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของทุกคู่อันดับใน r

เรนจ์ คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของทุกคู่อันดับใน r

ตัวอย่างที่ 4 ให้ $A = \{0, 2, 4\}$ และ $B = \{1, 2, 3\}$ และ r เป็นความสัมพันธ์น้อยกว่าจาก A ไป B หาโดเมนและเรนจ์ของ r

วิธีทำ เนื่องจาก r เป็นความสัมพันธ์น้อยกว่าจาก A ไป B
 จะได้ $r = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (2, 3)\}$
 ดังนั้น $D_r = \{0, 2\}$
 $R_r = \{1, 2, 3\}$

การหาโดเมนและเรนจ์ของเซตเงื่อนไขรูปแบบต่าง ๆ

วิธีหาโดเมน จัด y ในรูปของ x แล้วหาค่าของ x ที่ทำให้ y เป็นจริงได้ตามเงื่อนไข

วิธีหาเรนจ์ จัด x ในรูปของ y แล้วหาค่าของ y ที่ทำให้ x เป็นจริงได้ตามเงื่อนไข

ตัวอย่างที่ 5 หาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x + 2\}$

วิธีทำ **หาโดเมน**
 จาก $y = 2x + 2$
 พบว่า เมื่อแทน x ด้วยจำนวนจริงใด ๆ จะสามารถหาค่า y ที่เป็นจำนวนจริงได้เสมอ
 ดังนั้น $D_r = \mathbb{R}$
หาเรนจ์
 จาก $y = 2x + 2$ จะได้ $x = \frac{y-2}{2}$
 พบว่า เมื่อแทน y ด้วยจำนวนจริงใด ๆ จะสามารถหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริงได้เสมอ
 ดังนั้น $R_r = \mathbb{R}$



ข้อสังเกต

ความสัมพันธ์ในรูปสมการเชิงเส้น จะมี $D_r = R_r = \mathbb{R}$

ตัวอย่างที่ 6 หาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{2x-1}{5x+1}\}$

วิธีทำ **หาโดเมน**
 จาก $y = \frac{2x-1}{5x+1}$
 เนื่องจากตัวส่วนต้องไม่เป็น 0 จึงได้ว่า $5x+1 \neq 0$
 $x \neq -\frac{1}{5}$
 ดังนั้น $D_r = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{1}{5}\}$ หรือ $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{5}\}$



ชวนคิด

ถ้าความสัมพันธ์นั้นมีตัวส่วนเท่ากับ 0 จะเป็นอย่างไร

หาเรนจ์

จาก $y = \frac{2x-1}{5x+1}$
 จะได้ $(5x+1)(y) = 2x-1$
 $5xy + y = 2x-1$
 $5xy - 2x = -y-1$
 $x(5y-2) = -y-1$
 $x = \frac{-y-1}{5y-2}$
 เนื่องจากตัวส่วนต้องไม่เป็น 0 จึงได้ว่า $5y-2 \neq 0$
 $y \neq \frac{2}{5}$
 ดังนั้น $R_r = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq \frac{2}{5}\}$ หรือ $\mathbb{R} - \{\frac{2}{5}\}$



ข้อสังเกต

ถ้า $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ เมื่อ } a, c \neq 0\}$ จะได้ว่า
 $D_r = \{x \mid x \neq -\frac{d}{c}\}$ หรือ $\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$
 $R_r = \{y \mid y \neq \frac{a}{c}\}$ หรือ $\mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$

ตัวอย่างที่ 7 หาโดเมนและเรนจ์ของ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x^2 - 49}\}$

วิธีทำ **หาโดเมน**
 จาก $y = \sqrt{x^2 - 49}$ จะได้ว่า $\sqrt{x^2 - 49}$ จะหาค่าได้ เมื่อ $x^2 - 49 \geq 0$
 นั่นคือ $(x+7)(x-7) \geq 0$
 จะได้ $x \leq -7$ หรือ $x \geq 7$
 นั่นคือ $D_r = \{x \mid x \leq -7 \text{ หรือ } x \geq 7\}$ หรือ $D_r = (-\infty, -7] \cup [7, \infty)$
หาเรนจ์
 เนื่องจาก $\sqrt{x^2 - 49} \geq 0$ ทุกจำนวนจริง x จะได้ว่า $y \geq 0$
 นั่นคือ $R_r = \{y \mid y \geq 0\}$ หรือ $[0, \infty)$



ควรรู้

$\sqrt{a}$ จะหาค่าได้
 เมื่อ $a \geq 0$

ตัวอย่างที่

8

หาโดเมนและเรนจ์ของ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 9x^2 + 16y^2 = 144\}$

วิธีทำ

หาโดเมน

$$\text{จาก } 9x^2 + 16y^2 = 144$$

$$\text{จะได้ } 16y^2 = 144 - 9x^2$$

$$y^2 = \frac{144 - 9x^2}{16}$$

$$\text{เนื่องจาก } y^2 \geq 0 \text{ จะได้ว่า } \frac{144 - 9x^2}{16} \geq 0$$

$$144 - 9x^2 \geq 0$$

$$9x^2 - 144 \leq 0$$

$$x^2 - 16 \leq 0$$

$$(x - 4)(x + 4) \leq 0$$

$$-4 \leq x \leq 4$$

$$\text{ดังนั้น } D_r = \{x \mid -4 \leq x \leq 4\} \text{ หรือ } D_r = [-4, 4]$$

หาเรนจ์

$$\text{จาก } 9x^2 + 16y^2 = 144$$

$$\text{จะได้ } 9x^2 = 144 - 16y^2$$

$$x^2 = \frac{144 - 16y^2}{9}$$

$$\text{เนื่องจาก } x^2 \geq 0 \text{ จะได้ว่า } \frac{144 - 16y^2}{9} \geq 0$$

$$144 - 16y^2 \geq 0$$

$$16y^2 - 144 \leq 0$$

$$y^2 - 9 \leq 0$$

$$(y - 3)(y + 3) \leq 0$$

$$-3 \leq y \leq 3$$

$$\text{ดังนั้น } R_r = \{y \mid -3 \leq y \leq 3\} \text{ หรือ } R_r = [-3, 3]$$

ตัวผกผันของความสัมพันธ์

กำหนด $r = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$ จะได้ว่า

$$D_r = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$R_r = \{2, 4, 6, 8\}$$

หากสลับที่สมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของทุกคู่อันดับในความสัมพันธ์ r จะได้ความสัมพันธ์ใหม่ ดังนี้

$$s = \{(2, 1), (4, 3), (6, 5), (8, 7)\}$$

$$D_s = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$R_s = \{1, 3, 5, 7\}$$

จะเห็นว่า $D_r = R_s$ และ $R_r = D_s$ เราเรียกความสัมพันธ์ s นี้ว่า ตัวผกผันหรืออินเวอร์สของความสัมพันธ์ r และเขียนแทนด้วย r^{-1} นั่นคือ เมื่อกำหนด $r = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$ จะได้ว่า $r^{-1} = \{(2, 1), (4, 3), (6, 5), (8, 7)\}$ 

บทนิยาม

ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r คือ ความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r

ตัวผกผันหรืออินเวอร์สของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย r^{-1} ซึ่งสามารถเขียนในรูปของเซตแบบบอกเงื่อนไขได้เป็น $r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$

จากบทนิยามจะได้ว่า

1. ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปเซต B แล้ว r^{-1} เป็นความสัมพันธ์จากเซต B ไป A
2. $D_r = R_{r^{-1}}$ และ $R_r = D_{r^{-1}}$

การหาตัวผกผันของความสัมพันธ์ r ทำได้ดังนี้

1. ถ้าความสัมพันธ์ r เป็นเซตแบบแจกแจงสมาชิก ตัวผกผันของความสัมพันธ์ คือ เซตที่ประกอบด้วยคู่อันดับที่เกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและตัวหลังของทุก ๆ คู่อันดับในความสัมพันธ์ที่กำหนด

$$\text{กำหนด } r = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$$

$$\text{จะได้ว่า } r^{-1} = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4)\}$$

$$\text{และ } D_r = R_{r^{-1}} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R_r = D_{r^{-1}} = \{a, b, c, d\}$$

2. ถ้าความสัมพันธ์เป็นเซตบอกเงื่อนไข ตัวผกผันของความสัมพันธ์สามารถหาได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1 สลับที่ x กับ y ในคู่อันดับ แต่เงื่อนไขเหมือนเดิม

$$r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 3x + 4\}$$

$$\text{จะได้ } r^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid y = 3x + 4\}$$

วิธีที่ 2 สลับที่ x กับ y ในเงื่อนไข แล้วจัดรูป y ให้อยู่ในรูปของ x

$$r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 3x + 4\}$$

$$\text{จะได้ } r^{-1} = \{(x, y) \in A \times B \mid x = 3y + 4\}$$

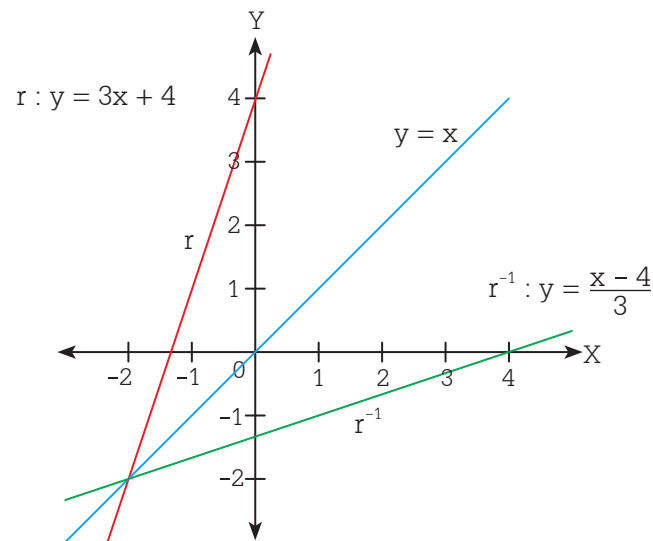
$$\text{เมื่อจัดรูป } y \text{ ในรูปของ } x \text{ จะได้ } r^{-1} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \frac{x-4}{3}\}$$

3. ถ้าความสัมพันธ์เป็นกราฟ ตัวผกผันของความสัมพันธ์ คือ กราฟที่สมมาตรกับกราฟของความสัมพันธ์ โดยมีเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตร

$$\text{กำหนด } r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 3x + 4\}$$

$$\text{จะได้ } r^{-1} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \frac{x-4}{3}\}$$

เขียนกราฟของ r และ r^{-1} ได้ดังนี้



แบบฝึกหัดที่ 1

- หา $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ และ $B \times B$ เมื่อกำหนดเซต A และเซต B ให้อยู่ในแต่ละข้อ
 - $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{0, 4\}$
 - $A = \{-1, 0, 1\}$ และ $B = \{2, 3, 4\}$
 - $A = \{a, b\}$ และ $B = \emptyset$
- ให้ $A = \{0, 1, 2\}$ และ $B = \{1, 2, 4\}$ หาความสัมพันธ์ต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก และแบบบอกเงื่อนไข
 - r_1 เป็นความสัมพันธ์หารลงตัว จากเซต A ไปเซต B
 - r_2 เป็นความสัมพันธ์น้อยกว่าอยู่ 1 จากเซต A ไปเซต B
 - r_3 เป็นความสัมพันธ์กำลังสอง จากเซต B ไปเซต A
 - r_4 เป็นความสัมพันธ์เป็นสองเท่า จากเซต B ไปเซต A
- ให้ $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 9\}$ เขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข
 - $\{(0, 0), (2, 2)\}$
 - $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
 - $\{(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$
 - $\{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (3, 2)\}$
- กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4\}$ โดยที่ r_1 , r_2 และ r_3 เป็นความสัมพันธ์ใน A เขียนความสัมพันธ์แต่ละข้อในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก
 - $r_1 = \{(x, y) \mid y = x - 2\}$
 - $r_2 = \{(x, y) \mid x = 2 \text{ และ } y < 4\}$
 - $r_3 = \{(x, y) \mid y = \frac{x}{2}\}$
- หาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้
 - $r = \{(-2, 7), (-1, 7), (5, 9)\}$
 - $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x < 6 \text{ และ } y = 1\}$
 - $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y = 8\}$
 - $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3x - y = 4\}$

$$5) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{-3+5x}{4x+7}\}$$

$$6) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{4x-5}{2x+7} + 1\}$$

$$7) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x^2 - 121}\}$$

$$8) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{4-x^2}\}$$

6. หาตัวผกผันของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งระบุโดเมนและเรนจ์ของตัวผกผันของความสัมพันธ์

$$1) r = \{(-3, 1), (-2, 3), (-1, 5), (0, 7), (1, 9)\}$$

$$2) r = \{(x, y) \mid y = 5x - 7\}$$

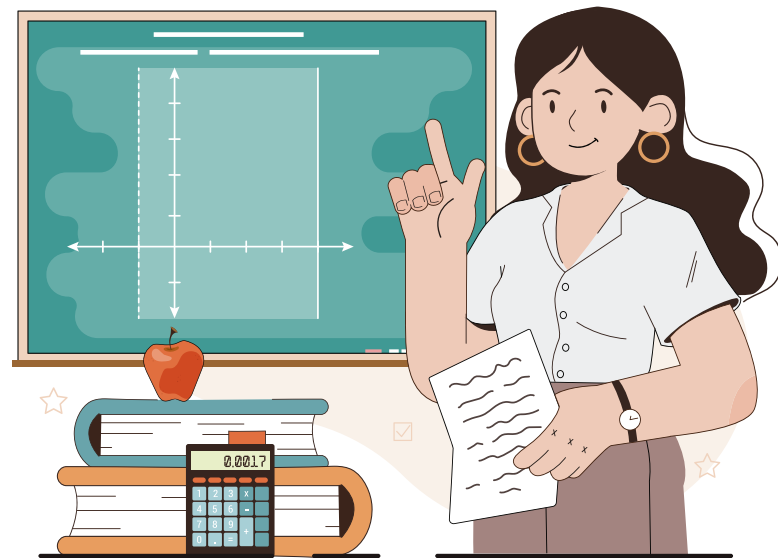
$$3) r = \{(x, y) \mid y = \frac{4x-5}{3}\}$$

7. เขียนกราฟของ r และ r^{-1} บนระบบพิกัดฉากเดียวกัน

$$1) \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x + 3y = 6\}$$

$$2) \{(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \mid y = x^2\}$$

$$3) \{(x, y) \mid y < x + 2\}$$



2. ฟังก์ชัน



บทนิยาม

ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ r ใด ๆ โดยที่ ถ้า $(x, y) \in r$ และ $(x, z) \in r$ แล้ว $y = z$

หรืออาจกล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน (function) คือ ความสัมพันธ์ใด ๆ ที่ถ้าสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับเหมือนกัน แล้วสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับจะต้องไม่ต่างกัน

การพิจารณาว่าความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชันหรือไม่ สามารถพิจารณาได้ ดังนี้

1. ความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก

• พิจารณาว่าสมาชิกตัวหน้าของบางคู่อันดับซ้ำกันหรือไม่ ถ้าไม่มีซ้ำกันเลย ก็สามารถสรุปได้ว่า ความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน

• ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าบางคู่อันดับซ้ำกัน ให้พิจารณาว่า สมาชิกตัวหลังของคู่อันดับต่างกันหรือไม่ ถ้าต่างกัน ความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน

$$r_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\} \quad \text{เป็นฟังก์ชัน}$$

$$r_2 = \{(ก, 1), (ข, 1), (ค, 1), (ง, 1)\} \quad \text{เป็นฟังก์ชัน}$$

$$r_3 = \{(1, 2), (3, 5), (6, 7), (1, 8)\} \quad \text{ไม่เป็นฟังก์ชัน}$$

เพราะมีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าซ้ำกัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกัน นั่นคือ $(1, 2)$

และ $(1, 8)$

2. ความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข ให้พิจารณาเงื่อนไขของความสัมพันธ์ ดังนี้ เมื่อแทนค่า x หนึ่งค่าลงในสมการเงื่อนไขแล้วจะได้ค่า y เพียงค่าเดียว

$$r_1 = \{(x, y) \mid 3x - 2y = 6\}$$

เป็นฟังก์ชัน เนื่องจากเมื่อแทน x ด้วยจำนวนใด ๆ แล้วจะได้ y เพียง 1 ค่าเสมอ

$$r_2 = \{(x, y) \mid y = |x - 1| + 5\}$$

เป็นฟังก์ชัน เนื่องจากเมื่อแทน x ด้วยจำนวนใด ๆ แล้วจะได้ y เพียง 1 ค่าเสมอ

$$r_3 = \{(x, y) \mid y = 2x^2\}$$

เป็นฟังก์ชัน เนื่องจากเมื่อแทน x ด้วยจำนวนใด ๆ แล้วจะได้ y เพียง 1 ค่าเสมอ

$$r_4 = \{(x, y) \mid x = y^2\}$$

ไม่เป็นฟังก์ชัน เนื่องจากหากลองแทน x ด้วย 4 จะได้ y มีค่าเป็น ± 2

เขียนเป็นคู่อันดับได้เป็น $(4, -2)$ และ $(4, 2)$ ซึ่งขัดแย้งกับบทนิยามของฟังก์ชัน

$$r_5 = \{(x, y) \mid x = |y - 1| + 4\}$$

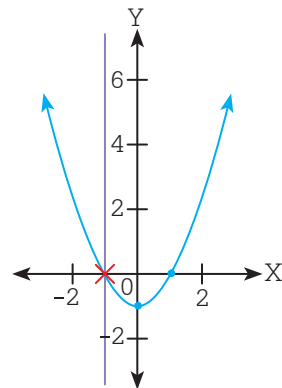
ไม่เป็นฟังก์ชัน เนื่องจากหากลองแทน x ด้วย 8 จะได้ y มีค่าเป็น -3 หรือ 5

เขียนเป็นคู่อันดับได้เป็น $(8, -3)$ และ $(8, 5)$ ซึ่งขัดแย้งกับบทนิยามของฟังก์ชัน

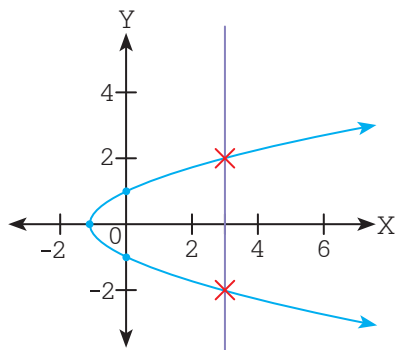
3. ความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปกราฟ

จากบทนิยามที่ว่า ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ใด ๆ ที่สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับเหมือนกัน แล้วสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับจะต้องไม่ต่างกัน นั่นหมายความว่า กราฟที่เป็นฟังก์ชันจะต้องไม่มีพิกัดที่ใช้ค่า x ซ้ำกัน เราจึงสามารถตรวจสอบได้โดย

- 1) ลากเส้นตรงขนานกับแกน Y
- 2) พิจารณาว่าเส้นตรงนั้นตัดกราฟของความสัมพันธ์ที่เรากำลังพิจารณากี่จุด
 - ถ้าตัดเพียงจุดเดียว แสดงว่าความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน
 - ถ้าตัดมากกว่า 1 จุดขึ้นไป แสดงว่าความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน



จะเห็นว่าเมื่อลากเส้นตรงขนานแกน Y (เส้นตั้ง) ตัดกราฟไม่ว่าจะเป็นที่ตำแหน่งใด ๆ จะตัดกราฟเพียงแค่จุดเดียวเสมอ กราฟนี้จึงเป็นฟังก์ชัน

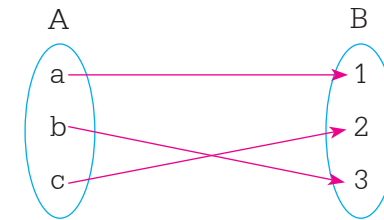


จะเห็นว่าเมื่อลากเส้นตรงขนานแกน Y (เส้นตั้ง) จะเกิดจุดตัด 2 จุด กราฟนี้จึงไม่เป็นฟังก์ชัน

ข้อตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์ของฟังก์ชัน

ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x เขียนแทนด้วย $f(x)$ อ่านว่า เอฟของเอกซ์ หรือ เอฟเอกซ์

พิจารณา



ถ้า f แทนฟังก์ชัน แล้ว $f(a) = 1$, $f(b) = 3$ และ $f(c) = 2$

การหาค่าของฟังก์ชัน

กำหนด $f(x)$ แทนฟังก์ชัน เราสามารถหาค่าของฟังก์ชันได้จากการแทนจำนวนที่ต้องการเข้าไปใน x

$$f(x) = 2x - 3$$

จะได้ว่า $f(1) = 2(1) - 3 = -1$

$$f(-5) = 2(-5) - 3 = -13$$

$$f(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2}) - 3 = 2\sqrt{2} - 3$$

ตัวอย่างที่ 1

ให้ $f(x) = x^2 - 2x$ หา

1) $f(0)$

2) $f(\sqrt{2})$

3) $f(a)$

4) $f(a + b)$

วิธีทำ

จาก $f(x) = x^2 - 2x$

1) $f(0) = 0^2 - 2(0) = 0$

2) $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$

3) $f(a) = a^2 - 2(a) = a(a - 2)$

4) $f(a + b) = (a + b)^2 - 2(a + b) = a^2 + 2ab + b^2 - 2a - 2b$

ตัวอย่างที่ 2

ให้ $f(2x + 1) = x^2 + 2x + 3$ หา

- 1) $f(x)$
- 2) $f(2)$
- 3) $f\left(\frac{3}{2}\right)$

วิธีทำ

- 1) ใช้วิธีการเปลี่ยนตัวแปร เพื่อหา $f(x)$ โดยกำหนดให้ $2x + 1 = a$

$$\text{จะได้ว่า } x = \frac{a-1}{2}$$

$$\text{แทนค่า } x = \frac{a-1}{2} \text{ ใน } f(2x+1) = x^2 + 2x + 3$$

$$\text{จะได้} \quad f(a) = \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a-1}{2}\right) + 3$$

$$f(a) = \frac{a^2 - 2a + 1}{4} + a - 1 + 3$$

$$f(a) = \frac{a^2 + 2a + 9}{4}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 9}{4}$$

$$2) \text{ จาก } f(x) = \frac{x^2 + 2x + 9}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } f(2) &= \frac{2^2 + 2(2) + 9}{4} \\ &= \frac{17}{4} \end{aligned}$$

$$3) \text{ จาก } f(x) = \frac{x^2 + 2x + 9}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } f\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{2}\right) + 9}{4} \\ &= \frac{\frac{9}{4} + 3 + 9}{4} \\ &= \frac{9 + 12 + 36}{4} \\ &= \frac{57}{4} \\ &= \frac{57}{16} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3

หาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1) f(x) = x^2 + 3$$

$$2) f(x) = |x - 2| + 5$$

$$3) f(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{x-10}$$

$$4) f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-2}}$$

วิธีทำ

$$1) f(x) = x^2 + 3$$

จะเห็นว่า f สามารถหาค่าได้เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$\text{ดังนั้น } D_f = \mathbb{R}$$

$$\text{เนื่องจาก } x^2 \geq 0 \text{ ดังนั้น } x^2 + 3 \geq 0 + 3$$

$$\text{และจากที่ } x^2 + 3 \geq 3 \text{ ทำให้ได้ว่า } y \geq 3$$

$$\text{ดังนั้น } R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 3\} \text{ หรือ } [3, \infty)$$

$$2) f(x) = |x - 2| + 5$$

จะเห็นว่า f สามารถหาค่าได้เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$\text{ดังนั้น } D_f = \mathbb{R}$$

$$\text{เนื่องจาก } |x - 2| \geq 0 \text{ ดังนั้น } |x - 2| + 5 \geq 0 + 5$$

$$\text{และจากที่ } |x - 2| + 5 \geq 5 \text{ ทำให้ได้ว่า } y \geq 5$$

$$\text{ดังนั้น } R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 5\} \text{ หรือ } [5, \infty)$$

$$3) f(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{x-10}$$

จะเห็นว่า f สามารถหาค่าได้เมื่อ $x - 10 \neq 0$ และ $x - 5 \geq 0$

$$\text{นั่นคือ } x \neq 10 \text{ และ } x \geq 5$$

$$\text{ดังนั้น } D_f = [5, \infty) - \{10\}$$

$$\text{เนื่องจาก } y = \frac{\sqrt{x-5}}{x-10} \text{ ดังนั้น } y = \mathbb{R}$$

$$\text{ดังนั้น } R_f = \mathbb{R}$$

$$4) f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-2}}$$

จะเห็นว่า f สามารถหาค่าได้เมื่อ $x - 2 > 0$

$$\text{นั่นคือ } x > 2$$

$$\text{ดังนั้น } D_f = (2, \infty)$$

$$\text{เนื่องจาก } y = \frac{3}{\sqrt{x-2}} \text{ ดังนั้น } y > 0$$

$$\text{ดังนั้น } R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\} \text{ หรือ } (0, \infty)$$

ฟังก์ชันจาก A ไป B (function from A to B)



บทนิยาม

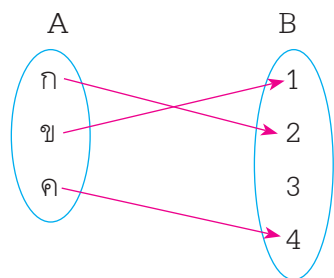
f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเท่ากับ A และมีเรนจ์เป็นสับเซตของ B
 f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เขียนแทนด้วย $f : A \rightarrow B$



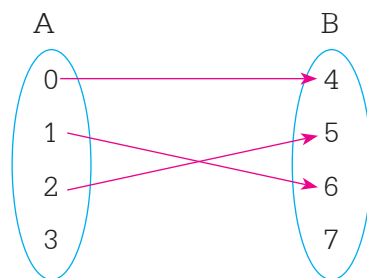
ควรรู้

เมื่อกล่าวถึงฟังก์ชันที่ไม่ได้ระบุว่าฟังก์ชันจากเซตใดไปเซตใด จะหมายถึงฟังก์ชันจากสับเซตของ R ไป R

พิจารณาแผนภาพ



$f : A \rightarrow B$



ไม่เป็น $f : A \rightarrow B$
 เนื่องจากโดเมนไม่เท่ากับ A

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ และ $B = \{-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5\}$ ตรวจสอบว่า $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = |2x - 1|\}$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หรือไม่

วิธีทำ จาก $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = |2x - 1|\}$
 จะได้ $f = \{(-2, 5), (-1, 3), (0, 1), (1, 1), (2, 3)\}$
 ซึ่ง $D_f = A$ และ $R_f \subset B$
 ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

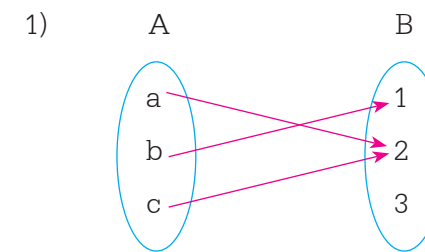
ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B (function from A onto B)



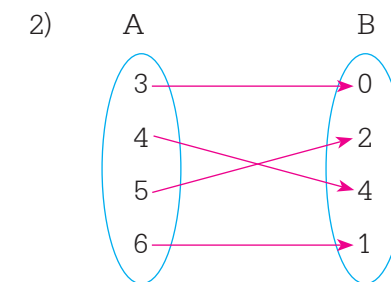
บทนิยาม

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเท่ากับ A และมีเรนจ์เท่ากับ B
 f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{\text{onto}} B$

พิจารณาแผนภาพ



ไม่เป็น $f : A \xrightarrow{\text{onto}} B$
 เนื่องจากเรนจ์ไม่เท่ากับ B



$f : A \xrightarrow{\text{onto}} B$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนด $f(x) = |x| + 2$ พิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันจาก R ไปทั่วถึง R หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = |x| + 2$ เป็นฟังก์ชันที่มี $D_f = R$
 $R_f = \{y \in R \mid y \geq 2\}$ หรือ $[2, \infty)$
 ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก R ไป R แต่ไม่เป็นฟังก์ชันจาก R ไปทั่วถึง R
 (f เป็นฟังก์ชันจาก R ไปทั่วถึง $[2, \infty)$)

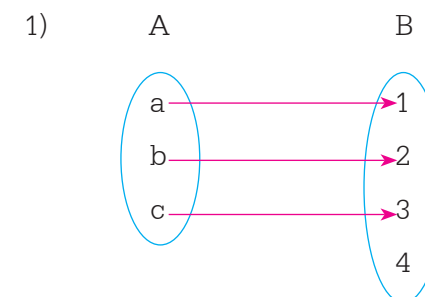
ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one function)



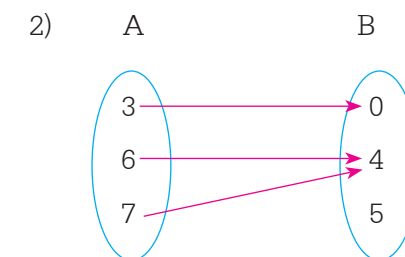
บทนิยาม

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ซึ่งสำหรับ x_1 และ x_2 ใด ๆ ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$
 f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{1-1} B$

พิจารณาแผนภาพ



เป็น $f : A \xrightarrow{1-1} B$



ไม่เป็น $f : A \xrightarrow{1-1} B$
 เนื่องจาก $f(6) = 4$ และ $f(7) = 4$
 แต่ $6 \neq 7$

ตัวอย่างที่ 6 พิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

1) $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x + 3\}$

วิธีทำ จาก $f(x) = 2x + 3$ จะได้ว่า $D_f = R_f = \mathbb{R}$
 จะเห็นว่า เมื่อแทน y ด้วยจำนวนจริงใด ๆ จะได้ x เพียงค่าเดียวเสมอ
 นั่นคือ เมื่อ $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$ ทุกจำนวนจริง x
 ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2) $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = (x - 1)^2\}$

วิธีทำ จะเห็นว่า มีกรณีที่ $x_1 \neq x_2$ แต่ $f(x_1) = f(x_2)$
 ให้ $x_1 = -1$ และ $x_2 = 3$
 จะได้ $f(x_1) = f(-1) = (-1 - 1)^2 = (-2)^2 = 4$
 $f(x_2) = f(3) = (3 - 1)^2 = (2)^2 = 4$
 ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

การพิจารณาฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจากกราฟ

ตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

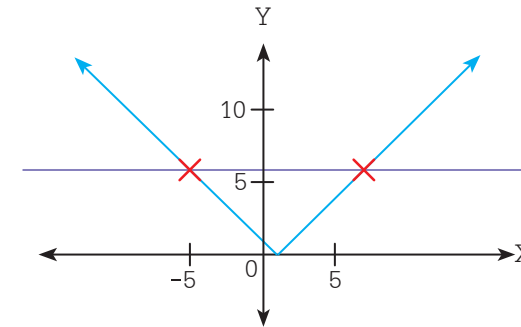
⇒ ลากเส้นตรงขนานแกน Y (เส้นตั้ง)
 เส้นนั้นต้องตัดกราฟของฟังก์ชันเพียงจุดเดียว

ตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

⇒ ลากเส้นตรงขนานแกน X (เส้นนอน)
 เส้นนั้นต้องตัดกราฟของฟังก์ชันเพียงจุดเดียว

ตัวอย่างที่ 7 ใช้กราฟในการพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

1) $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x - 1|\}$



จะเห็นว่าเมื่อลากเส้นตรงขนานแกน X (เส้นนอน) จะตัดกราฟสองจุด กราฟนี้จึงไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งหมายความว่า มีกรณีที่ $x_1 \neq x_2$ แต่ $f(x_1) = f(x_2)$

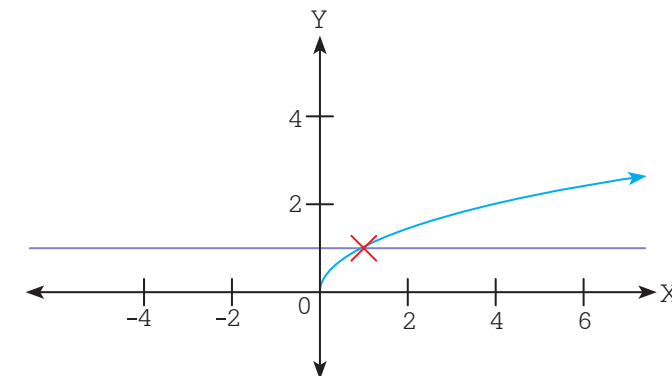
ให้ $x_1 = -5$ และ $x_2 = 7$

จะได้ $f(x_1) = f(-5) = |-5 - 1| = 6$

$f(x_2) = f(7) = |7 - 1| = 6$

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2) $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x}\}$



จะเห็นว่าเมื่อลากเส้นตรงขนานแกน X (เส้นนอน) ไม่ว่าจะทำที่ตำแหน่งใด ๆ จะตัดกราฟเพียงจุดเดียวเสมอ กราฟนี้จึงเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B (one-to-one function from A onto B)



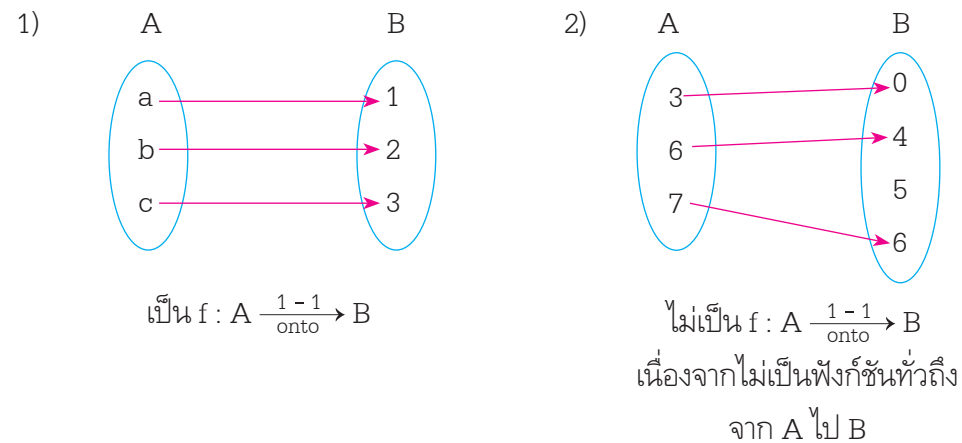
บทนิยาม

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงจาก A ไป B

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{1-1}_{\text{onto}} B$

พิจารณาแผนภาพ



แบบฝึกหัดที่ 2

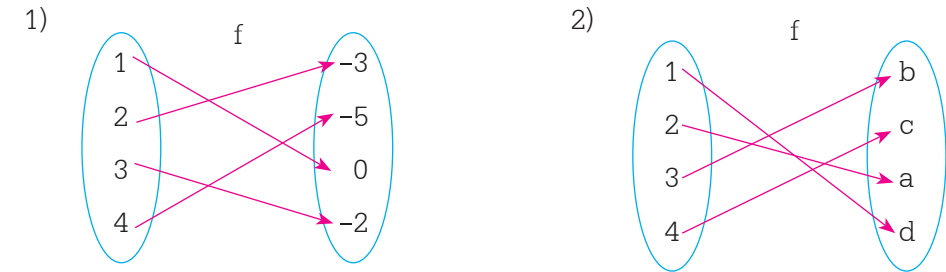
1. พิจารณาว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมระบุเหตุผล

- 1) $\{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a), (5, b)\}$
- 2) $\{(-3, 1), (-2, 2), (-1, 3), (1, 4), (-3, \sqrt{1})\}$
- 3) $\{(x, y) \in A \times A \mid y = x - 1\}$ เมื่อ $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$
- 4) $\{(x, y) \in B \times A \mid y \geq x\}$ เมื่อ $A = \{-1, 0, 1\}$ และ $B = \{0, 1, 2, 3\}$
- 5) $\{(x, y) \mid 3x + 2y = 6\}$
- 6) $\{(x, y) \mid y = \frac{3x-2}{2x}\}$
- 7) $\{(x, y) \mid 2y \leq 4\}$
- 8) $\{(x, y) \mid y = x^2 + 5\}$
- 9) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 16\}$
- 10) $\{(x, y) \mid y = |x - 1| + 2\}$

11) $\{(x, y) \mid x = |y + 5|\}$

12) $\{(x, y) \mid y = \pm\sqrt{x}\}$

2. จากแผนภาพแสดงฟังก์ชัน f หา $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ และ $f(4)$



3. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $D_f = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ เขียนฟังก์ชัน f แบบแจกแจงสมาชิก พร้อมทั้งหา R_f เมื่อ

- 1) $f(x) = -x^2$
- 2) $f(x) = \frac{3x}{x^2}$
- 3) $f(x) = \sqrt{x+5} + 8$
- 4) $f(x) = |2x - 1|$

4. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 3x - 1 & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

หา

- 1) $f(\sqrt{4})$
- 2) $f\left(\frac{10}{2}\right)$
- 3) $f(4) + f(13)$
- 4) $f(10) - f(7)$

5. กำหนดให้ $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นสับเซตของ $A \times A$ เขียนกราฟพร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

- 1) $f(x) = -3x$
- 2) $f(x) = 2x + 1$
- 3) $f(x) = x^2$
- 4) $f = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 9\}$

6. หาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

- 1) $f(x) = 3$
- 2) $f(x) = |x - 2| + 7$
- 3) $f(x) = \sqrt{2x - 5}$
- 4) $f(x) = \frac{5}{3x - 7}$
- 5) $f(x) = (x - 1)^2 + 3$

7. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{a, b, c\}$ และ

- $$\begin{aligned} f_1 &= \{(1, a), (2, b), (3, a)\} \\ f_2 &= \{(1, a), (2, b), (3, c)\} \\ f_3 &= \{(1, a), (2, a), (3, b)\} \\ f_4 &= \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\} \\ f_5 &= \{(a, 2), (b, 1), (c, 2)\} \\ f_6 &= \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\} \\ f_7 &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \\ f_8 &= \{(a, a), (b, b), (c, c)\} \end{aligned}$$

พิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดให้ว่ามีฟังก์ชันใดบ้างที่เป็น

- 1) ฟังก์ชันจาก A ไป B
- 2) ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B
- 3) ฟังก์ชันจาก B ไป A
- 4) ฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง A
- 5) ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง A
- 6) ฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง B
- 7) ฟังก์ชัน 1 - 1 จาก A ไป B
- 8) ฟังก์ชัน 1 - 1 จาก B ไป A
- 9) ฟังก์ชัน 1 - 1 จาก A ไป A
- 10) ฟังก์ชัน 1 - 1 จาก B ไป B



Math Activity

กิจกรรม

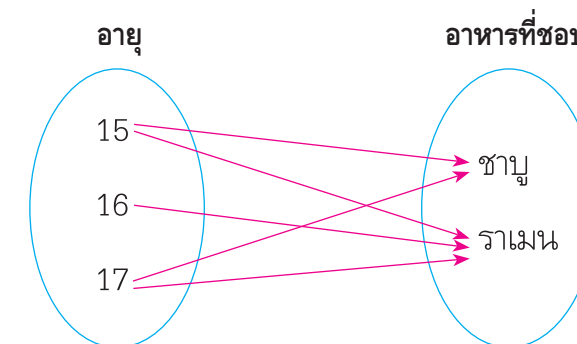
ฟังก์ชันฟังก์ชันน้อย

วัสดุ/อุปกรณ์

- 1) กระดาษ A4 กลุ่มละ 10 แผ่น
- 2) ดินสอหรือปากกา

ขั้นตอนการจัดกิจกรรม

- 1) นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 5 คน
- 2) รอบที่ 1 นักเรียนตอบคำถาม 2 ข้อ และเขียนคำตอบเป็นแผนภาพ เช่น อายุและอาหารที่นักเรียนชอบ แต่ละกลุ่มมีเวลา 3 นาทีในการเขียนแผนภาพแสดงคำตอบ เช่น



- 3) นักเรียนตอบคำถามว่า กลุ่มใดบ้างที่ได้คำตอบที่เป็นฟังก์ชัน และกลุ่มใดบ้างที่ได้คำตอบที่ไม่เป็นฟังก์ชัน และตอบเหตุผลว่าเป็นหรือไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะเหตุใด
- 4) ในรอบต่อไปสามารถเปลี่ยนคำถามไปเรื่อย ๆ เช่น เลขที่และวิธีการเดินทางมาโรงเรียน น้ำหนักและส่วนสูง ชื่อเล่นและวิชาที่ชอบ และอาจเพิ่มประเภทของการถาม เช่น เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่
- 5) นักเรียนและครูร่วมกันสรุปกิจกรรม

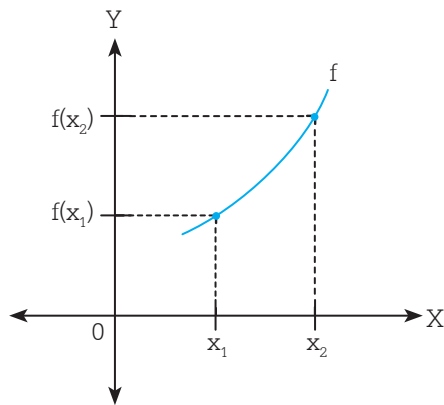
ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด



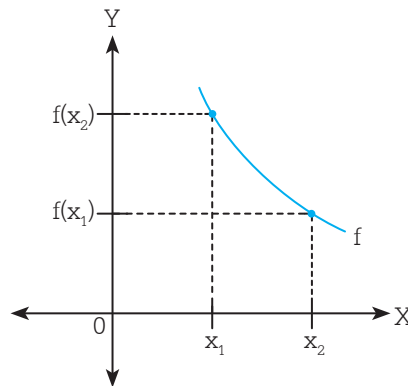
บทนิยาม

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และ A เป็นสับเซตของโดเมน

1. f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) บน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$
2. f เป็นฟังก์ชันลด (decreasing function) บน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$



ลักษณะกราฟของฟังก์ชันเพิ่ม



ลักษณะกราฟของฟังก์ชันลด

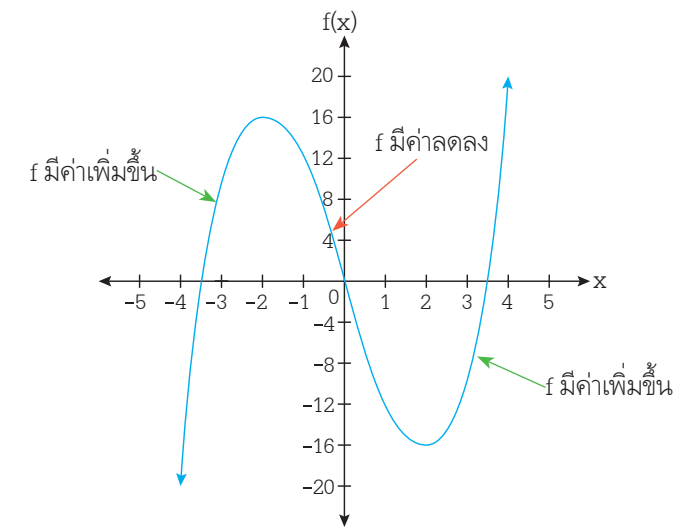


ข้อสังเกต

ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม หรือ ฟังก์ชันลดที่ไม่กำหนดโดเมน ให้หมายความว่าฟังก์ชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันเพิ่ม หรือ ฟังก์ชันลดบนโดเมน R

ตัวอย่างที่ 8

ให้ f เป็นฟังก์ชัน จากกราฟระบุช่วงที่ f มีค่าเพิ่มขึ้น และช่วงที่ f มีค่าลดลง



ตอบ

ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, -2]$ และบนช่วง $[2, \infty)$

ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-2, 2]$

ตัวอย่างที่ 9

พิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม หรือ ฟังก์ชันลด บนเซตที่กำหนดให้

1) $f(x) = 2x + 3$ บนเซต R

2) $g(x) = -2x^3 + 1$ บนเซต R

วิธีทำ 1) สำหรับ $f(x) = 2x + 3$

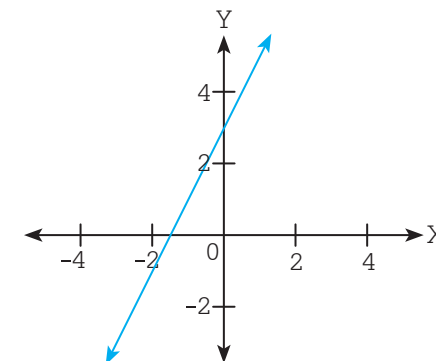
ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $x_1 < x_2$

$$\text{จะได้ว่า } 2x_1 < 2x_2$$

$$2x_1 + 3 < 2x_2 + 3$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม บน R



2) สำหรับ $g(x) = -2x^3 + 1$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $x_1 < x_2$

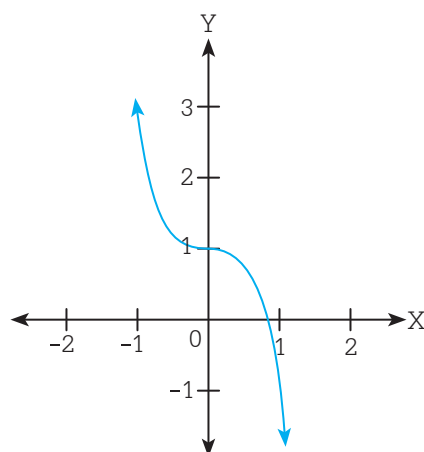
จะได้ว่า $x_1^3 < x_2^3$

$$-2x_1^3 > -2x_2^3$$

$$-2x_1^3 + 1 > -2x_2^3 + 1$$

$$g(x_1) > g(x_2)$$

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันลด บน $\mathbb{R}$



ตัวอย่างที่ 10 พิจารณาว่า $f(x) = \sqrt{4-x}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม หรือ ฟังก์ชันลด บนช่วง $(-\infty, 3]$

วิธีทำ กำหนดให้ $x_1 = 2$ และ $x_2 = 3$ โดยที่ $x_1 < x_2$

$$f(x_1) = f(2) = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$$

$$f(x_2) = f(3) = \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1$$

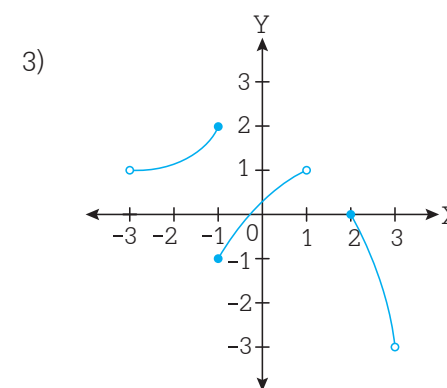
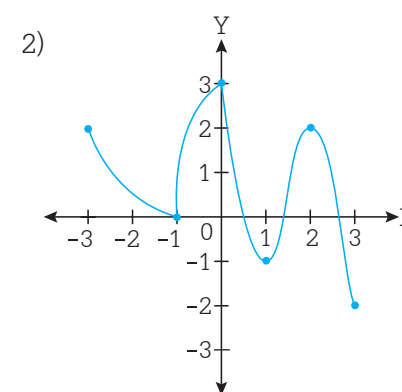
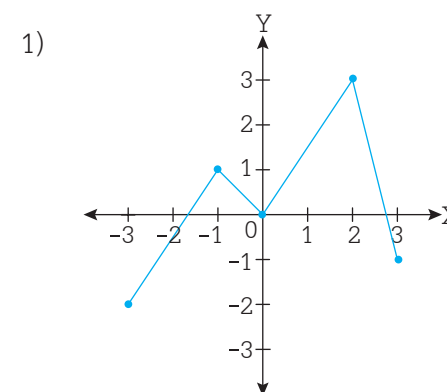
เนื่องจาก $f(x_1) > f(x_2)$

$f(x) = \sqrt{4-x}$ จึงเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty, 3]$



แบบฝึกหัดที่ 3

1. จากกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ หาช่วงที่ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันเพิ่มและช่วงที่ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันลด



2. พิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนเซตที่กำหนดให้

- 1) $f(x) = -2(x-3)^2 + 5$ บนช่วง $(-\infty, 6]$
- 2) $f(x) = (x-1)^2 + 2$ บนช่วง $[2, \infty)$
- 3) $f(x) = -2x^2 + 1$ บนช่วง $(-\infty, -1]$
- 4) $f(x) = |x+5|$ บนช่วง $[-4, \infty)$
- 5) $f(x) = \sqrt{2x}$ บนช่วง $[1, \infty)$
- 6) $f(x) = \frac{-3}{x}$ บนช่วง $[-10, -1]$

3. การใช้ฟังก์ชันในชีวิตจริง

ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax + b$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง
ฟังก์ชันคงตัว (constant function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax + b$ เมื่อ $a = 0$ จะได้ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = b$



ควรรู้

- กราฟของฟังก์ชันเชิงเส้นเป็นเส้นตรงในระบบพิกัดฉาก มีโดเมนและเรนจ์เป็นเซตของจำนวนจริง
- กราฟของฟังก์ชันคงตัวเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน X และตัดแกน Y ที่จุด $(0, b)$ โดเมนเป็นเซตของจำนวนจริงและเรนจ์ คือ $\{b\}$

ตัวอย่างที่ 1

พนักงานขายของบริษัทแห่งหนึ่งได้รับเงินเดือนจากบริษัทเดือนละ 20,000 บาท และได้รับเงินอีก 10% ของยอดขายสินค้าที่ขายได้

- เขียนความสัมพันธ์ของรายได้ของพนักงานผู้นี้กับยอดขายสินค้า
- หาว่าในเดือนที่เขามียอดขาย 50,000 บาท เขาจะมีรายได้รวมในเดือนนั้นเท่าใด

วิธีทำ

- ความสัมพันธ์ของรายได้ของพนักงานผู้นี้กับยอดขายสินค้า

กำหนดให้ x แทนยอดขายสินค้าที่ขายได้

$F(x)$ แทนรายได้รวมต่อเดือน

เนื่องจากรายได้รวมประกอบด้วยสองส่วน คือ เงินเดือนเดือนละ 20,000 บาท ซึ่งได้เท่ากันทุกเดือน และได้เงินอีก 10% ของยอดขายสินค้าที่ขายได้

$$\text{ดังนั้น } F(x) = 20,000 + \frac{10}{100}x$$

$$\text{หรือ } F(x) = 20,000 + 0.1x$$

- ในเดือนที่เขามียอดขาย 50,000 บาท เขาจะมีรายได้รวมในเดือนนั้นเท่าใด

$$\text{จาก } F(x) = 20,000 + 0.1x$$

$$F(50,000) = 20,000 + 0.1(50,000)$$

$$= 20,000 + 5,000$$

$$= 25,000$$

ดังนั้น ในเดือนที่เขามียอดขาย 50,000 บาท เขาจะมีรายได้รวมในเดือนนั้น 25,000 บาท

ตัวอย่างที่ 2

2

เชอร์เปิดร้านขายคุกกี้ โดยต้นทุนของการขายคุกกี้มีอยู่สองส่วน ได้แก่ ค่าเช่าร้านเดือนละ 6,000 บาท และต้นทุนในการทำคุกกี้กล่องละ 20 บาท ถ้าเชอร์ตั้งราคาขายคุกกี้อยู่ที่กล่องละ 50 บาท หา

- ฟังก์ชันต้นทุนในการทำคุกกี้ x กล่อง ในระยะเวลา 1 เดือน
- ฟังก์ชันรายได้จากการขายคุกกี้ x กล่อง ในระยะเวลา 1 เดือน
- เชอร์ต้องขายคุกกี้ให้ได้กี่กล่องจึงจะคุ้มทุน

วิธีทำ

- ฟังก์ชันต้นทุนในการทำคุกกี้ x กล่อง ในระยะเวลา 1 เดือน

ให้ F แทนฟังก์ชันต้นทุนในการทำคุกกี้ x กล่อง ในระยะเวลา 1 เดือน
เนื่องจากต้นทุนของการขายคุกกี้มีอยู่สองส่วน ได้แก่ ค่าเช่าร้านเดือนละ 6,000 บาท และต้นทุนในการทำคุกกี้กล่องละ 20 บาท

$$\text{ดังนั้น } F(x) = 6,000 + 20x$$

- ฟังก์ชันรายได้จากการขายคุกกี้ x กล่อง ในระยะเวลา 1 เดือน

ให้ G แทนฟังก์ชันรายได้จากการขายคุกกี้ x กล่อง ในระยะเวลา 1 เดือน
เนื่องจากราคาขายคุกกี้อยู่ที่กล่องละ 50 บาท

$$\text{ดังนั้น } G(x) = 50x$$

- จุดคุ้มทุนที่รายได้จะเท่ากับต้นทุน คือ

$$G(x) = F(x)$$

$$50x = 6,000 + 20x$$

$$30x = 6,000$$

$$x = 200$$

ดังนั้น เชอร์ต้องขายคุกกี้ให้ได้ 200 กล่องจึงจะคุ้มทุน

ตัวอย่างที่

3

ฟังก์ชันแสดงราคาบ้านหลังหนึ่งเมื่อเวลาผ่านไปเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ถ้าปัจจุบันบ้านหลังหนึ่งมีราคา 5,000,000 บาท และในอีก 3 ปีข้างหน้าบ้านหลังนี้จะมียราคา 6,800,000 บาท หา

- 1) ฟังก์ชันแสดงราคาของบ้านเมื่อเวลาผ่านไป x ปี
- 2) เมื่อเวลาผ่านไป 5 ปี บ้านหลังนี้จะมียราคาเพิ่มขึ้นเป็นเท่าใด

วิธีทำ

- 1) ฟังก์ชันแสดงราคาของบ้านเมื่อเวลาผ่านไป x ปี

ให้ $F(x) = ax + b$ เป็นฟังก์ชันแสดงราคาของบ้านเมื่อเวลาผ่านไป x ปี โดยที่ a และ b เป็นค่าคงตัว

จากโจทย์ $F(0) = 5,000,000$ และ $F(3) = 6,800,000$

จะได้ $b = 5,000,000$

และ $6,800,000 = 3a + 5,000,000$

$$a = \frac{6,800,000 - 5,000,000}{3}$$

$$a = 600,000$$

ดังนั้น $F(x) = 600,000x + 5,000,000$

- 2) เมื่อเวลาผ่านไป 5 ปี บ้านหลังนี้จะมียราคาเพิ่มขึ้นเป็นเท่าใด

จาก $F(x) = 600,000x + 5,000,000$

$$F(5) = 600,000(5) + 5,000,000$$

$$= 8,000,000$$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 5 ปี บ้านหลังนี้จะมียราคา 8,000,000 บาท



แบบฝึกหัดที่ 4

1. เขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1) f(x) = 3x + 3$$

$$2) f(x) = 5 - x$$

$$3) f(x) = 8$$

$$4) f(x) = \frac{x+2}{3}$$

2. เขียนฟังก์ชันแทนสิ่งที่กำหนดต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

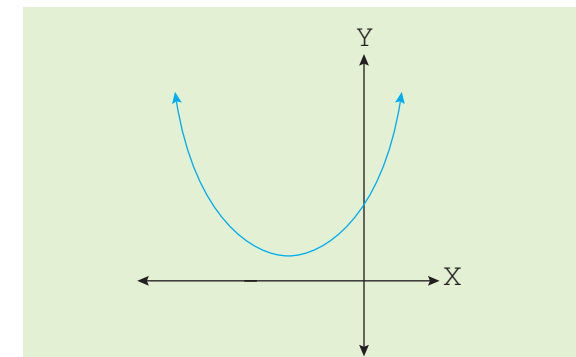
- 1) ค่ารถสปอร์อากาศแบบ VIP เดินทางจากกรุงเทพมหานครไปยังจังหวัดทางภาคเหนือของประเทศไทย ประกอบด้วยค่าบริการเริ่มต้น 200 บาท และค่าโดยสารคิดตามระยะทาง กิโลเมตรละ 10 บาท
- 2) ค่าใช้จ่ายในการเช่าห้องพักของหอพักแห่งหนึ่ง ประกอบด้วย ค่าเช่า 3,000 บาท และค่าไฟฟ้าหน่วยละ 7 บาท
- 3) ค่าบริการร้านซูชิ ประกอบด้วย ค่าบริการพื้นฐาน 150 บาท และค่าซูชิทุกหน้าราคาเท่ากัน หน้าละ 10 บาท

3. ร้านค้าขายสินค้าชิ้นละ 200 บาท โดยมีต้นทุนการผลิตคือ 5,000 บาท ตอบคำถามต่อไปนี้

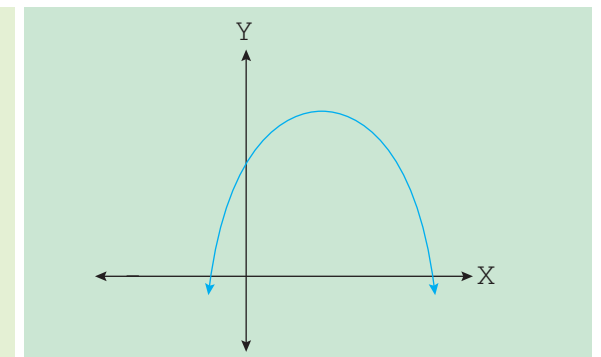
- 1) เขียนฟังก์ชันเชิงเส้นแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกำไรและจำนวนสินค้า
- 2) ร้านค้าขายสินค้า 40 ชิ้น ได้กำไรเท่าไร
- 3) ร้านค้าได้กำไร 6,000 บาท เมื่อขายสินค้ากี่ชิ้น

ฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic function)

คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$ โดยที่



ถ้าค่า $a > 0$ จะได้กราฟเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น ซึ่งมีจุดยอดหรือจุดวกกลับเป็น จุดต่ำสุด ซึ่งเป็นจุดที่ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุด



ถ้าค่า $a < 0$ จะได้กราฟรูปเส้นโค้งคว่ำลง ซึ่งมีจุดยอดหรือจุดวกกลับเป็น จุดสูงสุด ซึ่งเป็นจุดที่ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุด

กราฟของฟังก์ชันกำลังสองมีชื่อเรียกว่า **พาราโบลา** โดยสามารถแบ่งลักษณะของกราฟออกเป็น 3 ลักษณะ คือ

1. $y = ax^2 + b$ จะเป็นกราฟพาราโบลาที่มีจุดวกกลับหรือจุดยอดที่ $(0, b)$
2. $y = a(x - h)^2 + k$ จะเป็นกราฟพาราโบลาที่มีจุดวกกลับหรือจุดยอดที่ (h, k)
3. $y = ax^2 + bx + c$ จะเป็นกราฟพาราโบลาที่มีจุดวกกลับหรือจุดยอดที่ $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ หรือ $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

ตัวอย่างที่ 4

4

เขียนกราฟของ $f(x) = x^2 - 2x - 2$ พร้อมทั้งหา

- 1) จุดวกกลับหรือจุดยอด
- 2) จุดวกกลับของกราฟเป็นจุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุด และมีค่าเท่าใด
- 3) โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน f
- 4) จุดที่กราฟตัดแกน X

วิธีทำ

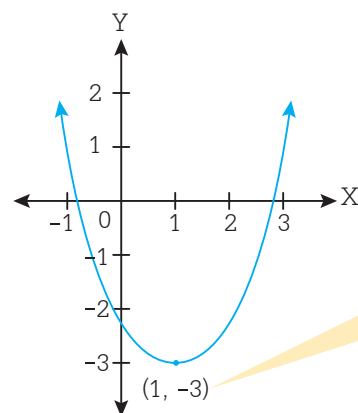
$$\text{จาก } f(x) = x^2 - 2x - 2$$

จัดรูป $f(x)$ ให้อยู่ในรูป $a(x - h)^2 + k$

$$\begin{aligned}\text{ได้เป็น } f(x) &= (x^2 - 2x + 1) - 1 - 2 \\ &= (x - 1)^2 - 3\end{aligned}$$

$$\text{จะได้ } a = 1, h = 1, k = -3$$

เนื่องจาก $a > 0$ ดังนั้น กราฟของ f จะเป็นกราฟพาราโบลาหงายที่มีจุดวกกลับหรือจุดยอดที่ $(1, -3)$ และเขียนกราฟได้ ดังนี้



จุดต่ำสุด จะตอบเป็น
คู่อันดับ นั่นคือ $(1, -3)$
แต่ค่าต่ำสุด จะตอบเฉพาะค่า v
ซึ่งเท่ากับ -3

ตอบ

- 1) จุดวกกลับหรือจุดยอด อยู่ที่ $(1, -3)$
- 2) เนื่องจากกราฟนี้เป็นกราฟพาราโบลาหงาย จุดวกกลับหรือจุดยอดของกราฟเป็นจุดต่ำสุด และมีค่าต่ำสุดเท่ากับ -3
- 3) จากกราฟจะได้ว่า $D_f = R$ และ $R = \{y \mid y \geq -3\} = [-3, \infty)$
- 4) จุดที่กราฟตัดแกน X หาได้โดยแทน $y = 0$

$$\text{นั่นคือ } x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{3}$$

ดังนั้น กราฟตัดแกน X ที่จุด $(1 + \sqrt{3}, 0)$ และ $(1 - \sqrt{3}, 0)$

เนื่องจากไม่สามารถ
แยกตัวประกอบของพหุนามได้
ให้ใช้สูตร
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ตัวอย่างที่ 5

5

เมื่อโยนก้อนหินขึ้นไปในอากาศในเวลา t ใด ๆ ซึ่งมีหน่วยเป็นวินาที ระยะความสูงของก้อนหินซึ่งมีหน่วยเป็นเมตร เป็นไปตามสมการ $f(t) = -3t^2 + 15t$ หาว่า

- 1) เวลาเท่าใดก้อนหินจะขึ้นไปสูงสุด
- 2) ระยะสูงสุดเป็นเท่าใด
- 3) เมื่อเวลาผ่านไปนานเท่าใด ก้อนหินจึงจะตกลงพื้น

วิธีทำ

- 1) เวลาที่ก้อนหินขึ้นไปสูงสุด

$$\text{จาก } f(t) = -3t^2 + 15t$$

$$\text{ให้ } a = -3, b = 15 \text{ และ } c = 0$$

เนื่องจาก $a < 0$ กราฟเป็นกราฟพาราโบลาคว่ำที่มีค่าสูงสุดเมื่อ $t = -\frac{b}{2a}$

$$\text{จะได้ } t = \frac{-15}{2(-3)} = \frac{5}{2} \text{ วินาที}$$

- 2) หาระยะสูงสุดที่ก้อนหินขึ้นไปได้

$$\text{เมื่อ } t = \frac{5}{2} \text{ จะได้ } f\left(\frac{5}{2}\right) = -3\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 15\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{75}{4} + \frac{75}{2} = \frac{75}{4} \text{ เมตร}$$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป $\frac{5}{2}$ วินาที วัตถุจะขึ้นไปสูงสุดและมีระยะสูงสุดคือ $\frac{75}{4}$ เมตร

- 3) หาเวลาที่ก้อนหินจะตกลงพื้น

ก้อนหินจะตกลงพื้น เมื่อ $f(t) = 0$

$$\text{จะได้ } -3t^2 + 15t = 0$$

$$t(-3t + 15) = 0$$

$$\text{ดังนั้น } t = 0 \text{ หรือ } -3t + 15 = 0$$

$$\text{นั่นคือ } t = 0 \text{ หรือ } t = 5$$

เนื่องจากระยะเวลาที่โยนก้อนหินขึ้นไปจนกระทั่งก้อนหินตกถึงพื้นจะต้องมากกว่า 0

ดังนั้น ก้อนหินจะตกลงพื้น เมื่อโยนก้อนหินขึ้นไปนาน 5 วินาที

ตัวอย่างที่ 6

นายชูชัยรับขนมมาขายครั้งละ 220 กล่อง เขาพบว่าเขาขายกล่องละ 50 บาท เขาจะขายได้หมด แต่ถ้าเขาเพิ่มราคาขายกล่องละ 5 บาท เขาจะเหลือขนม 10 กล่อง เช่น ถ้าเขาขายกล่องละ 55 บาท เขาจะขายได้ 210 กล่อง ถ้าเขาขายกล่องละ 60 บาท เขาจะขายได้ 200 กล่อง เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ถ้าเขาต้องการขายให้ได้เงินมากที่สุด เขาต้องขายขนมกล่องละกี่บาท และจะขายได้เงินมากที่สุดเท่าใด

วิธีทำ สมมติให้ชูชัยตั้งราคาขายเกิน 50 บาท ไป x บาท
จะได้ราคาขายต่อกล่อง คือ $50 + x$ บาท จำนวนกล่องที่ขายได้ คือ $220 - 2x$ กล่อง
ให้ $f(x)$ แทนรายรับที่ได้
จะได้ $f(x) = (50 + x)(220 - 2x)$
 $f(x) = -2x^2 + 120x + 11,000$
นั่นคือ $a = -2$, $b = 120$ และ $c = 11,000$
เนื่องจาก $a < 0$ กราฟนี้เป็นพาราโบลาคว่ำที่ให้ค่าสูงสุด
เมื่อ $x = -\frac{b}{2a}$ หรือ $x = -\frac{120}{2(-2)} = 30$
ดังนั้น เขาต้องตั้งราคาขายกล่องละ $50 + 30 = 80$ บาท จึงจะขายได้เงินมากที่สุด
และได้เงินมากที่สุดเท่ากับ
$$\begin{aligned} f(30) &= -2(30)^2 + 120(30) + 11,000 \\ &= 12,800 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7

7

หาค่าต่ำสุดของ $x^2 + y^2$ เมื่อ $x + y = 12$

วิธีทำ จาก $x + y = 12$ จะได้ $y = 12 - x$
จะได้ $x^2 + y^2 = x^2 + (12 - x)^2$
 $= x^2 + (x^2 - 24x + 144)$
 $= 2x^2 - 24x + 144$
พิจารณา $f(x) = 2x^2 - 24x + 144$
นั่นคือ $a = 2$, $b = -24$ และ $c = 144$
เนื่องจาก $a > 0$ กราฟนี้เป็นพาราโบลาหงายที่ให้ค่าต่ำสุด
เมื่อ $x = -\frac{b}{2a}$ หรือ $x = -\frac{-24}{2(2)} = 6$
เนื่องจาก $f(6) = 2(6)^2 - 24(6) + 144$
 $= 72$
ดังนั้น เมื่อ $x + y = 12$ ค่าต่ำสุดของ $x^2 + y^2$ คือ 72



ข้อสังเกต

เมื่อลองแทน x และ y ที่
 $x + y = 12$ ด้วยจำนวนอื่นๆ
ที่ไม่ใช่ $x = 6$, $y = 6$ จะได้ค่า
ของ $x^2 + y^2$ ที่มากกว่า 72
เสมอ



ควรรู้

ฟังก์ชันกำลังสองเป็นกรณีเฉพาะของฟังก์ชันพหุนาม ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

เมื่อ $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์



แบบฝึกหัดที่ 5

1. เติมข้อมูลในตารางให้ถูกต้อง

ข้อ	สมการ	ลักษณะกราฟ	จุดยอดหรือจุดวกกลับ	จุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุด	ค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุด
1)	$y = (x - 1)^2 + 4$	☒ พาราโบลาหงาย ☐ พาราโบลาคว่ำ	(1, 4)	☒ มีจุดต่ำสุด ที่ (1, 4) ☐ มีจุดสูงสุด ที่ _____	☒ ค่าต่ำสุด คือ 4 ☐ ค่าสูงสุด คือ _____
2)	$y = -(x + 3)^2 - 2$	☐ พาราโบลาหงาย ☐ พาราโบลาคว่ำ		☐ มีจุดต่ำสุด ที่ _____ ☐ มีจุดสูงสุด ที่ _____	☐ ค่าต่ำสุด คือ _____ ☐ ค่าสูงสุด คือ _____
3)	$y = \frac{2}{5}(x + 2)^2 - 1$	☐ พาราโบลาหงาย ☐ พาราโบลาคว่ำ		☐ มีจุดต่ำสุด ที่ _____ ☐ มีจุดสูงสุด ที่ _____	☐ ค่าต่ำสุด คือ _____ ☐ ค่าสูงสุด คือ _____
4)	$y = -2(x + 5)^2$	☐ พาราโบลาหงาย ☐ พาราโบลาคว่ำ		☐ มีจุดต่ำสุด ที่ _____ ☐ มีจุดสูงสุด ที่ _____	☐ ค่าต่ำสุด คือ _____ ☐ ค่าสูงสุด คือ _____
5)	$y = -\frac{1}{3}(x)^2 + 4$	☐ พาราโบลาหงาย ☐ พาราโบลาคว่ำ		☐ มีจุดต่ำสุด ที่ _____ ☐ มีจุดสูงสุด ที่ _____	☐ ค่าต่ำสุด คือ _____ ☐ ค่าสูงสุด คือ _____
6)	$y = x^2 + 8x + 13$	☐ พาราโบลาหงาย ☐ พาราโบลาคว่ำ		☐ มีจุดต่ำสุด ที่ _____ ☐ มีจุดสูงสุด ที่ _____	☐ ค่าต่ำสุด คือ _____ ☐ ค่าสูงสุด คือ _____
7)	$y = -2x^2 - 4x + 1$	☐ พาราโบลาหงาย ☐ พาราโบลาคว่ำ		☐ มีจุดต่ำสุด ที่ _____ ☐ มีจุดสูงสุด ที่ _____	☐ ค่าต่ำสุด คือ _____ ☐ ค่าสูงสุด คือ _____

2. เขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาจุดวกกลับของกราฟ หาค่าจุดวกกลับของกราฟ เป็นจุดที่ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน และจุดที่กราฟตัดแกน X

$$1) y = x^2 - 4x + 9$$

$$2) y = -x^2 - 6x - 12$$

$$3) y = -x^2 - 4x$$

$$4) y = 2x^2 + 4x + 5$$

3. ต้องการล้อมรั้วรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านหนึ่งอยู่ติดกับแม่น้ำ รวมความยาวรั้ว 80 เมตร หาความกว้างและความยาวที่ทำให้มีพื้นที่ที่ล้อมรั้วมากที่สุด

4. ถ้ารายได้เฉลี่ยของการขายอาหาร (ต่อกล่อง) หลังหักค่าใช้จ่ายแล้วเท่ากับ $80 - 0.2x$ บาท เมื่อ x แทนจำนวนอาหารที่ขายได้

1) เขียนสมการแสดงรายได้จากการขายอาหาร x กล่อง

2) หาวว่าต้องขายอาหารกี่กล่องจึงจะมีรายได้มากที่สุด และมีรายได้มากที่สุดเท่าใด

5. ให้ x แทนจำนวนนับ ซึ่งเมื่อนำมารวมกับจำนวนนับจำนวนที่สองแล้วมีผลบวกเท่ากับ 28 หาผลคูณที่มากที่สุดของจำนวนนับทั้งสองจำนวน

4. กราฟของฟังก์ชัน

กราฟของฟังก์ชัน กำหนดโดยสมการ $y = f(x)$ ในระบบพิกัดฉาก ซึ่งจะประกอบด้วยจุดที่มีคู่อันดับเป็น (x, y) โดยที่สมาชิกตัวหน้า คือ x เป็นสมาชิกในโดเมนของฟังก์ชัน และสมาชิกตัวหลัง คือ y หรือ $f(x)$ ซึ่งเป็นค่าของฟังก์ชันที่สอดคล้องกับ x

การเขียนกราฟของฟังก์ชันทำได้โดยการคำนวณหาจุดอันดับที่อยู่บนกราฟจากสมการ $y = f(x)$ ให้เพียงพอ แล้วลากเส้นตรงหรือเส้นโค้งเชื่อมจุดเหล่านั้น



ควรรู้

1. เราสามารถหาจุดที่กราฟตัดแกน X โดยการแทนค่า $y = 0$ แล้วคำนวณหาค่า x
2. เราสามารถหาจุดที่กราฟตัดแกน Y โดยการแทนค่า $x = 0$ แล้วคำนวณหาค่า y
3. ถ้าเราทราบพิกัดของคู่อันดับที่อยู่บนกราฟมากเท่าใด กราฟที่เราเขียนได้ก็จะต้องมากยิ่งขึ้นเท่านั้น

ตัวอย่างที่

1

เขียนกราฟของ $f(x) = x^3 - 9x$

หาจุดตัดแกน Y : แทน $x = 0$

$$y = 0^3 - 9(0)$$

$$y = 0$$

จะได้จุดตัดแกน Y คือ $(0, 0)$

หาจุดตัดแกน X : แทน $y = 0$

$$0 = x^3 - 9x$$

$$0 = x(x^2 - 9)$$

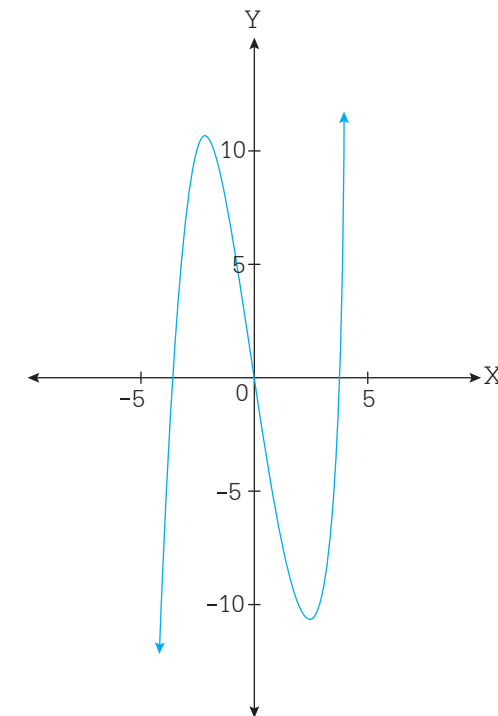
$$0 = x(x + 3)(x - 3)$$

จะได้ $x = 0$ หรือ $x = -3$ หรือ $x = 3$

จะได้จุดตัดแกน X คือ $(0, 0)$, $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$

เพื่อให้เขียนกราฟได้ถูกต้องมากยิ่งขึ้น เราจึงคำนวณหาจุดอันดับที่อยู่บนกราฟจากสมการ $y = x^3 - 9x$ ดังตาราง

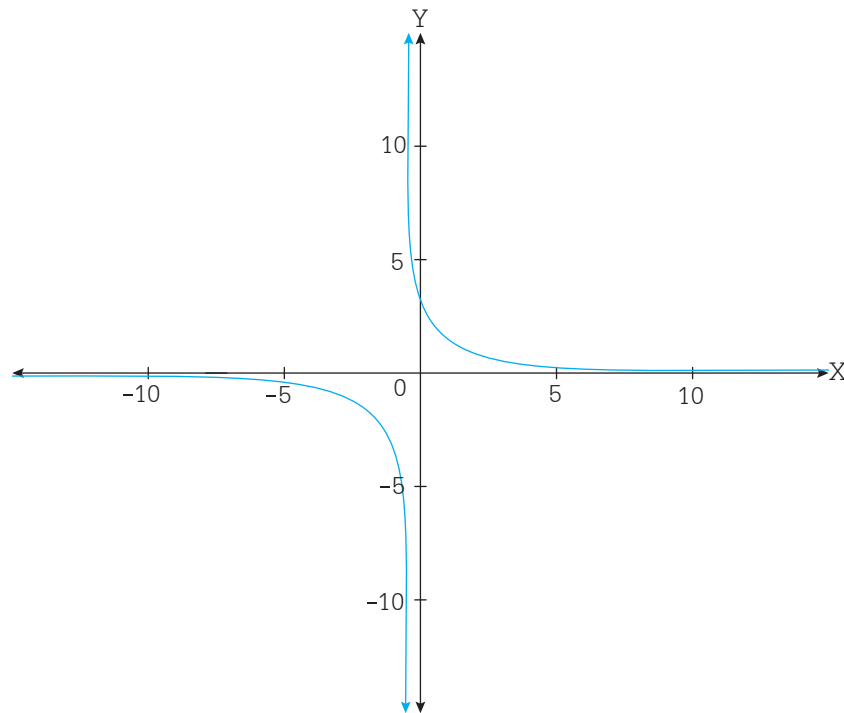
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0	10	8	0	-8	-10	0



ตัวอย่างที่ 2 เขียนกราฟของ $f(x) = \frac{1}{x+1}$

เพื่อให้เขียนกราฟได้ถูกต้อง เราจึงคำนวณหาจุดอันดับที่อยู่บนกราฟจากสมการ $y = \frac{1}{x+1}$ ดังตาราง

x	-11	-3	-2	-1.5	-1.1	-0.9	-0.5	0	1	9
y	-0.1	-0.5	-1	-2	-10	10	2	1	0.5	0.1



จากกราฟจะเห็นว่า

เมื่อ $x > -1$ และ x มีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ ค่า y จะน้อยลง และกราฟจะเข้าใกล้แกน X มากขึ้นเรื่อย ๆ แต่ไม่ตัดแกน X

เมื่อ $x < -1$ และ x มีค่าน้อยลงเรื่อย ๆ ค่า y จะมากขึ้น และกราฟจะเข้าใกล้แกน X มากขึ้นเรื่อย ๆ แต่ไม่ตัดแกน X

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า กราฟตัดแกน Y ที่ $(0, 1)$ แต่ไม่ตัดแกน X

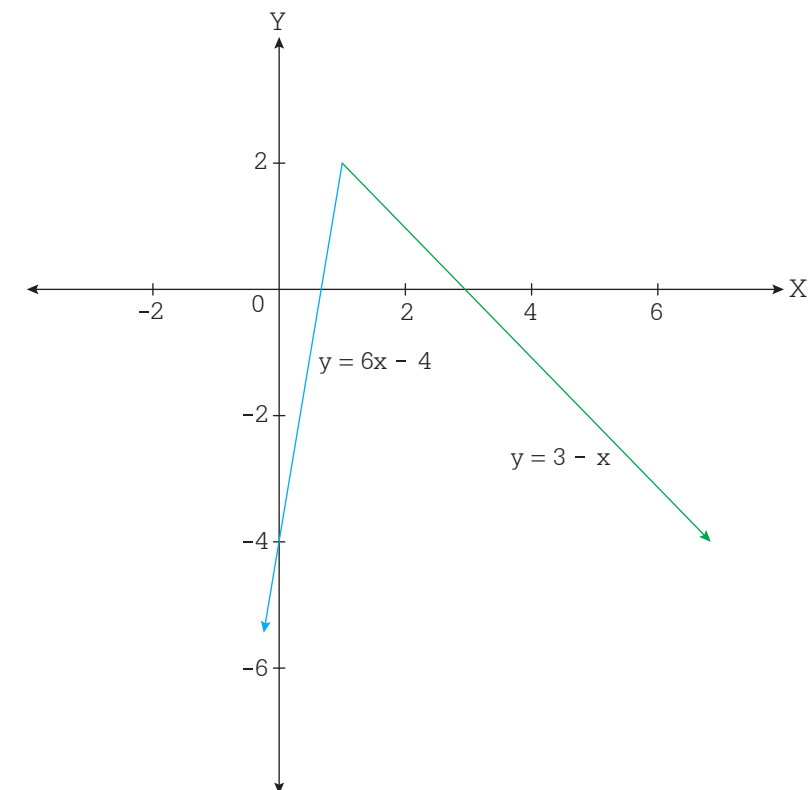
ตัวอย่างที่ 3 เขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{เมื่อ } x \geq 1 \\ 6x-4 & \text{เมื่อ } x < 1 \end{cases}$

กราฟของ f ประกอบด้วยสองส่วน คือ

1) กราฟของเส้นตรง $y = 3 - x$ เมื่อ $x \geq 1$

2) กราฟของเส้นตรง $y = 6x - 4$ เมื่อ $x < 1$

เขียนกราฟของ f ได้ ดังนี้



ตัวอย่างที่

4

เขียนกราฟของ $f(x) = |x - 1|$

จากบทนิยามของค่าสัมบูรณ์ จะได้ว่า $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{เมื่อ } x < 1 \end{cases}$

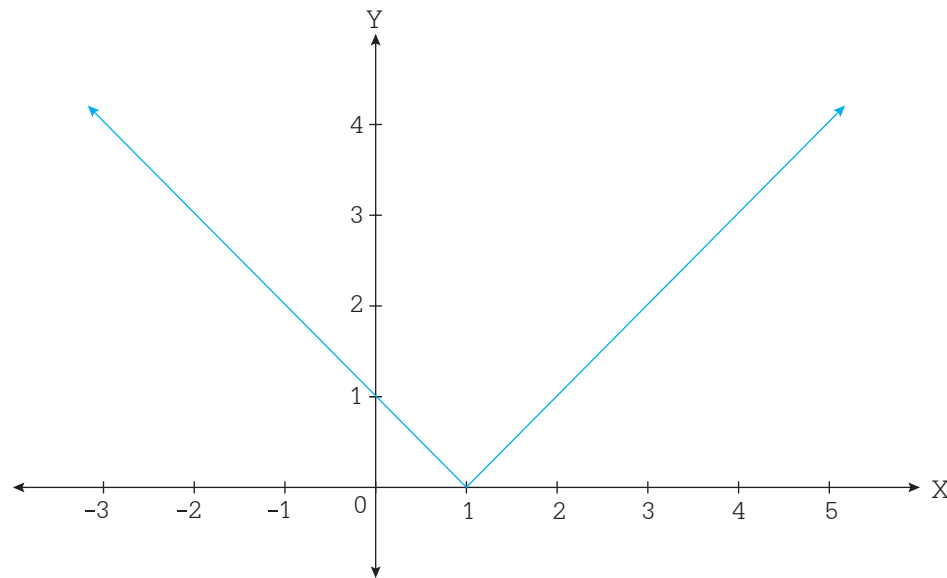
ดังนั้น กราฟของ $f(x) = |x - 1|$ ประกอบด้วยสองส่วน คือ

1) กราฟของเส้นตรง $y = x - 1$ เมื่อ $x \geq 1$

2) กราฟของเส้นตรง $y = -x + 1$ เมื่อ $x < 1$

เพื่อให้เขียนกราฟได้ถูกต้องมากยิ่งขึ้น เราจึงคำนวณหาจุดอันดับที่อยู่บนกราฟจากสมการ $y = |x - 1|$ ดังตาราง

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	3	2	1	0	1	2	3



ฟังก์ชันขั้นบันได (step function)

ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และโดเมนถูกแบ่งออกเป็นช่วงย่อยมากกว่าหนึ่งช่วง โดยที่ค่าของฟังก์ชันในแต่ละช่วงย่อยเป็นค่าคงตัวที่เป็นลำดับที่เพิ่มขึ้นหรือลำดับที่ลดลงอย่างใดอย่างหนึ่ง ซึ่งจะทำให้กราฟของฟังก์ชันจะมีลักษณะคล้ายขั้นบันได ตัวอย่างที่เราพบเห็นได้ในชีวิตประจำวัน คือ อัตราค่าบริการในการส่งจดหมาย ส่งพัสดุ หรืออัตราค่าบริการขนส่งที่คิดตามช่วงระยะทาง

ตัวอย่างที่

5

เขียนฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชันแสดงอัตราค่าบริการส่งพัสดุภายในประเทศ ซึ่งกำหนดอัตราค่าบริการ ดังนี้

พิกัดน้ำหนัก	ค่าบริการ (บาท)
ไม่เกิน 30 กรัม	10
เกิน 30 กรัม แต่ไม่เกิน 100 กรัม	20
เกิน 100 กรัม แต่ไม่เกิน 300 กรัม	30
เกิน 300 กรัม แต่ไม่เกิน 500 กรัม	50
เกิน 500 กรัม แต่ไม่เกิน 1,000 กรัม	100
1,000 กรัมขึ้นไป	150

วิธีทำ

เขียนฟังก์ชันในรูป $f(x)$ เมื่อ x แทนน้ำหนักของพัสดุ (กรัม) และ $f(x)$ แทนอัตราค่าบริการส่งพัสดุภายในประเทศ (บาท)

$$f(x) = 10 \quad ; \quad 0 < x \leq 30$$

$$f(x) = 20 \quad ; \quad 30 < x \leq 100$$

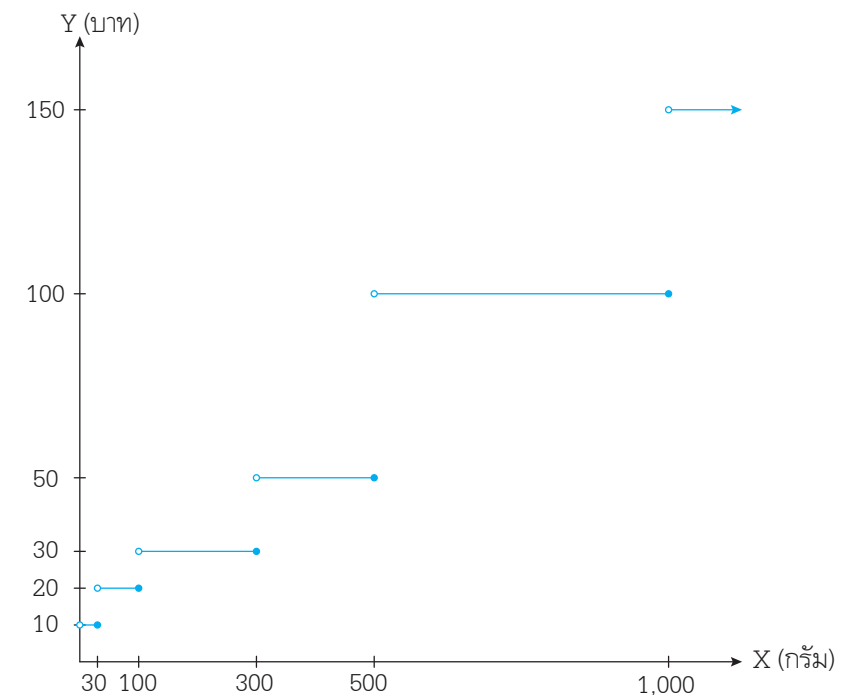
$$f(x) = 30 \quad ; \quad 100 < x \leq 300$$

$$f(x) = 50 \quad ; \quad 300 < x \leq 500$$

$$f(x) = 100 \quad ; \quad 500 < x \leq 1,000$$

$$f(x) = 150 \quad ; \quad x > 1,000$$

เขียนกราฟของฟังก์ชัน f ได้ ดังนี้





แบบฝึกหัดที่ 6

1. เขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งระบุโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

1) $f(x) = x^3 - x$

2) $f(x) = x^3 + 2$

3) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

4) $f(x) = \frac{1}{2x}$

5) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{เมื่อ } x \geq 2 \\ 4x-4 & \text{เมื่อ } x < 2 \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} 7-2x & \text{เมื่อ } x \geq 5 \\ 3x-8 & \text{เมื่อ } x < 5 \end{cases}$

7) $f(x) = |x-3|$

8) $f(x) = |x+2| - 1$

2. เขียนฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชันแสดงอัตราค่าบริการในการส่งจดหมายของบริษัทแห่งหนึ่ง ซึ่งกำหนดอัตราค่าบริการ ดังนี้

พิกัดน้ำหนัก	ค่าบริการ (บาท)
ไม่เกิน 20 กรัม	8
เกิน 20 กรัม แต่ไม่เกิน 50 กรัม	10
เกิน 50 กรัม แต่ไม่เกิน 100 กรัม	15
เกิน 100 กรัม แต่ไม่เกิน 500 กรัม	30
500 กรัมขึ้นไป	50

เทคนิคการเขียนกราฟด้วยการเลื่อนกราฟ

1. การเลื่อนขนานในแนวนอน

ตัวอย่างที่

6

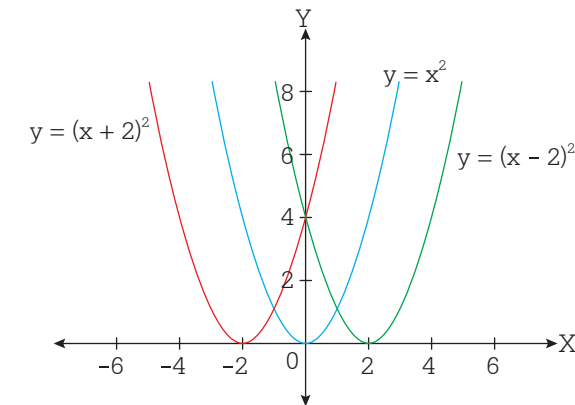
เขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน

$$y = x^2$$

$$y = (x+2)^2$$

$$y = (x-2)^2$$

จะได้กราฟของทั้งสามฟังก์ชัน ดังนี้

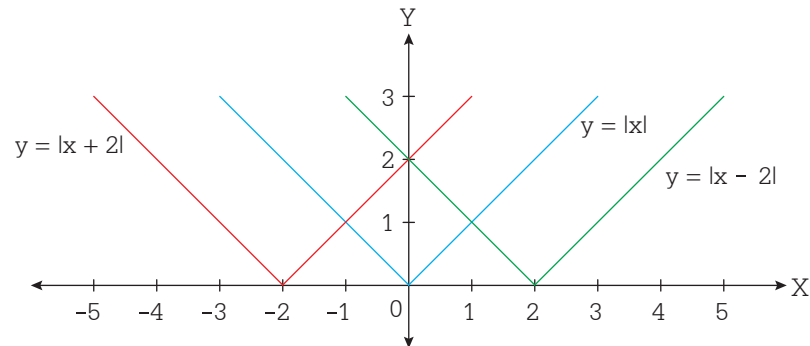


จากตัวอย่างที่ 6 เราจึงสามารถสรุปเกี่ยวกับการเขียนกราฟด้วยการเลื่อนขนานในแนวนอนได้ ดังนี้

สมการ	วิธีเขียนกราฟ
$y = f(x - c)$, $c > 0$	เลื่อนกราฟของ $y = f(x)$ ไปทางขวาตามแนวแกน X เป็นระยะ c หน่วย
$y = f(x + c)$, $c < 0$	เลื่อนกราฟของ $y = f(x)$ ไปทางซ้ายตามแนวแกน X เป็นระยะ c หน่วย

ตัวอย่างที่ 7 เขียนกราฟของ $f(x) = |x - 2|$ และ $g(x) = |x + 2|$

วิธีทำ กราฟของ f ได้จากการเลื่อนกราฟของ $y = |x|$ ไปทางขวาตามแนวแกน X เป็นระยะ 2 หน่วย
กราฟของ g ได้จากการเลื่อนกราฟของ $y = |x|$ ไปทางซ้ายตามแนวแกน X เป็นระยะ 2 หน่วย



2. การเลื่อนขนานในแนวตั้ง

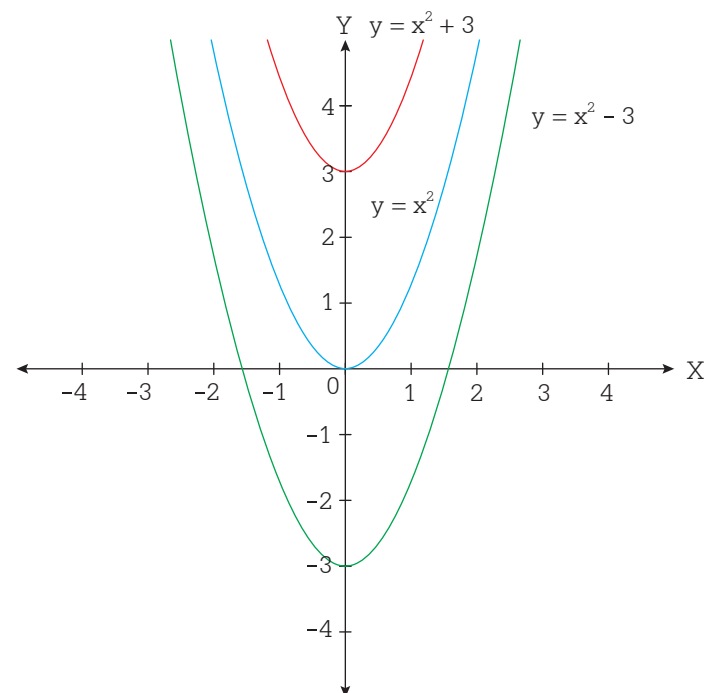
ตัวอย่างที่ 8 เขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน

$$y = x^2$$

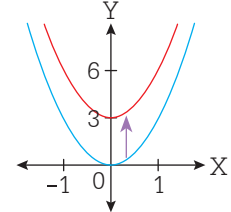
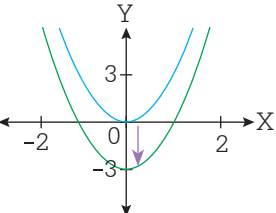
$$y = x^2 + 3$$

$$y = x^2 - 3$$

จะได้กราฟของทั้งสามฟังก์ชัน ดังนี้

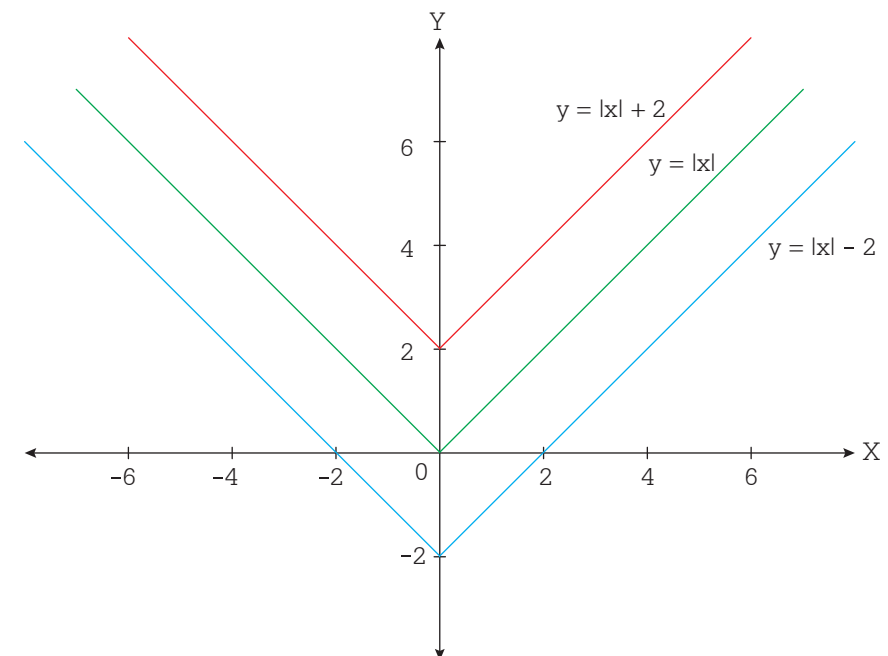


จากตัวอย่างที่ 8 เราจึงสามารถสรุปเกี่ยวกับการเขียนกราฟด้วยการเลื่อนขนานในแนวตั้งได้ ดังนี้

สมการ	วิธีเขียนกราฟ
$y = f(x) + c, c > 0$	เลื่อนกราฟของ $y = f(x)$ ขึ้นตามแนวแกน Y เป็นระยะ $ c $ หน่วย 
$y = f(x) - c, c < 0$	เลื่อนกราฟของ $y = f(x)$ ลงตามแนวแกน Y เป็นระยะ $ c $ หน่วย 

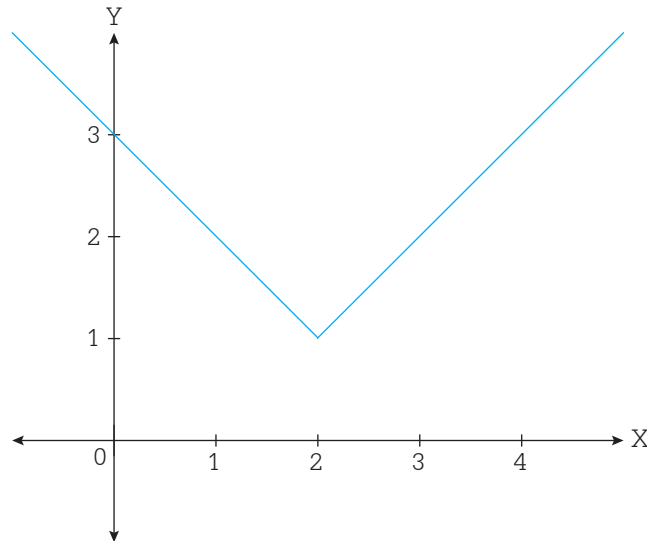
ตัวอย่างที่ 9 เขียนกราฟของ $f(x) = |x| + 2$ และ $g(x) = |x| - 2$

วิธีทำ กราฟของ f ได้จากการเลื่อนกราฟของ $y = |x|$ ขึ้นตามแนวแกน Y เป็นระยะ 2 หน่วย
กราฟของ g ได้จากการเลื่อนกราฟของ $y = |x|$ ลงตามแนวแกน Y เป็นระยะ 2 หน่วย



ตัวอย่างที่ 10 เขียนกราฟของ $f(x) = |x - 2| + 1$

วิธีทำ จะได้กราฟของ $y = |x - 2| + 1$ จะเป็นกราฟที่เกิดจากการเลื่อนขนานกราฟ $y = |x|$ ไปทางขวาตามแนวแกน X เป็นระยะ 3 หน่วย และเลื่อนขึ้นไปตามแนวแกน Y เป็นระยะ 3 หน่วย ดังนี้



แบบฝึกหัดที่ 7

1. เขียนกราฟของแต่ละฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้การเลื่อนขนานในแนวตั้งหรือในแนวนอน

- 1) $f(x) = x^2 - 2$
- 2) $f(x) = (x - 1)^2 + 3$
- 3) $f(x) = |x| - 2$
- 4) $f(x) = |x - 3|$
- 5) $f(x) = |x - 4| + 1$

2. เขียนกราฟของ f และระบุสมการของกราฟตามเงื่อนไขที่กำหนด

- 1) $f(x) = x^2$ เลื่อนกราฟขึ้น 3 หน่วย แล้วเลื่อนไปทางซ้ายอีก 3 หน่วย
- 2) $f(x) = |x|$ เลื่อนกราฟขึ้น 5 หน่วย แล้วเลื่อนไปทางขวาอีก 1 หน่วย
- 3) $f(x) = -x^2$ เลื่อนกราฟลง 1 หน่วย แล้วเลื่อนไปทางขวาอีก 2 หน่วย
- 4) $f(x) = -|x|$ เลื่อนกราฟลง 4 หน่วย แล้วเลื่อนไปทางซ้ายอีก 2 หน่วย

5. การดำเนินการของฟังก์ชัน

พีชคณิตของฟังก์ชัน คือ การบวก การลบ การคูณ และการหารฟังก์ชันตั้งแต่ 2 ฟังก์ชันขึ้นไป โดยค่าของฟังก์ชันใหม่ได้มาจากการนำค่าของแต่ละฟังก์ชันเหล่านั้นมาบวก ลบ คูณ หรือหารกัน



บทนิยาม

กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ แล้ว $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชัน ผลบวก ผลลบ ผลคูณ และผลหาร ตามลำดับ ซึ่งกำหนดโดย

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ เมื่อ } g(x) \neq 0$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

สำหรับเรนจ์ฟังก์ชัน $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$ นั้น หาไม่ได้จากเรนจ์ของ f และ g จะหาจากเงื่อนไขใหม่ $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$ ตามลำดับ โดยต้องพิจารณาร่วมกับโดเมนของ f และ g ด้วย

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้ $f = \{(1, -2), (2, 4), (3, 6), (4, 0), (5, 8)\}$

$g = \{(0, 1), (1, -1), (2, 0), (3, 2), (4, 4), (5, 4)\}$

หา $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งระบุโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

วิธีทำ $D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$D_g = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$D_f \cap D_g = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

จะได้ว่า

$$f + g = \{(1, -3), (2, 4), (3, 8), (4, 4), (5, 12)\}$$

$$f - g = \{(1, -1), (2, 4), (3, 4), (4, -4), (5, 4)\}$$

$$f \cdot g = \{(1, 2), (2, 0), (3, 12), (4, 0), (5, 32)\}$$

เราหาผลบวก ผลลบ ผลคูณ และผลหารของฟังก์ชัน โดยนำสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับแต่ละคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้ามีค่าเท่ากัน มาบวก ลบ คูณ หรือหารกัน

จากคู่อันดับ (2, 4) ใน f และคู่อันดับ (2, 0) ใน g
เมื่อหาผลหารเฉพาะสมาชิกตัวหลังจะได้เป็น $\frac{4}{0}$
ซึ่งไม่นิยามทางคณิตศาสตร์

$$\frac{f}{g} = \{(1, 2), (3, 3), (4, 0), (5, 2)\}$$

$$\text{และ } D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = \{1, 2, 3, 4, 5\} = D_f \cap D_g$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{1, 3, 4, 5\} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

ตัวอย่างที่

2

กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 1$ และ $g(x) = x + 2$

1) $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ พร้อมทั้งบอกโดเมนของฟังก์ชันที่เป็นผลลัพธ์

2) $(f + g)(0)$, $(f - g)(-1)$, $(f \cdot g)(2)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(3)$

วิธีทำ

1) เนื่องจาก $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$$\text{จะได้ } D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = \mathbb{R} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$\text{และ } D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 - 1) + (x + 2) = x^2 + x + 1$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2 - 1) - (x + 2) = x^2 - x - 3$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$$

$$2) (f + g)(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$$

$$(f - g)(-1) = (-1)^2 - (-1) - 3 = -1$$

$$(f \cdot g)(2) = (2)^3 + 2(2)^2 - 2 - 2 = 12$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{3^2 - 1}{3 + 2} = \frac{8}{5}$$

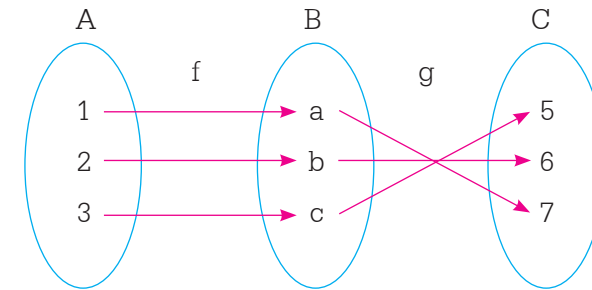


ชวนคิด

นักเรียนคิดว่า $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$ มีค่าเท่าใด

ฟังก์ชันประกอบ

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ดังแผนภาพ



จากแผนภาพจะได้ $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$
 $g(a) = 7$, $g(b) = 6$, $g(c) = 5$

จาก f และ g ที่กำหนดให้ จะได้

$$g(f(1)) = g(a) = 7$$

$$g(f(2)) = g(b) = 6$$

$$g(f(3)) = g(c) = 5$$

ฟังก์ชันที่สร้างขึ้นใหม่นี้ เรียกว่า ฟังก์ชันประกอบ (composite function) เขียนแทนด้วย $g \circ f$ (อ่านว่า จีโอเอฟ) ซึ่งเป็นฟังก์ชันจาก A ไป C กำหนดโดย $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ หรือ $g \circ f(x) = g(f(x))$

$$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(a) = 7$$

$$g \circ f(2) = g(f(2)) = g(b) = 6$$

$$g \circ f(3) = g(f(3)) = g(c) = 5$$

ดังนั้น

$$g \circ f(1) = 7$$

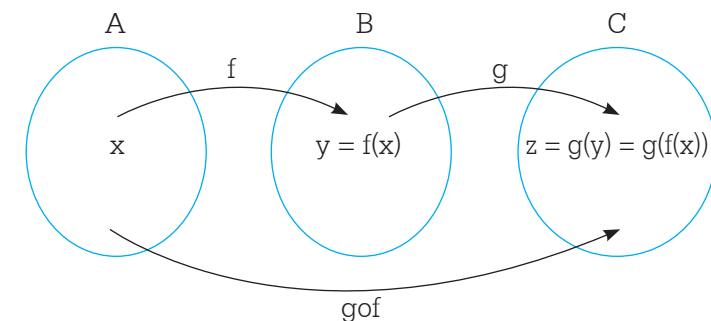
$$g \circ f(2) = 6$$

$$g \circ f(3) = 5$$

และสามารถเขียนคำตอบทั้งหมดในรูปเซตได้เป็น

$$g \circ f(x) = \{(1, 7), (2, 6), (3, 5)\}$$

จากแผนภาพด้านบน
จะเห็นว่า
เมื่อเริ่มต้นด้วย 1
เส้นจะลากผ่าน a
ไปจบที่ 7



จากแผนภาพ y เป็นสมาชิกของ R_f และขณะเดียวกันก็เป็นสมาชิกของ D_g y จึงทำหน้าที่เป็นตัวกลางจาก x ไป z



บทนิยาม

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน และ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$

ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย $g \circ f$ คือ ฟังก์ชันที่มี

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

และ $g \circ f(x) = g(f(x))$ สำหรับทุก x ใน $D_{g \circ f}$



ควรรู้

- ฟังก์ชัน $g \circ f$ จะเกิดได้ก็ต่อเมื่อ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ (มีตัวเชื่อม)
- $g \circ f$ จะต้องเกิดความสัมพันธ์กับฟังก์ชัน f ก่อน และต่อด้วยความสัมพันธ์กับฟังก์ชัน g ดังนั้น $f \circ g$ จะต้องเกิดความสัมพันธ์กับฟังก์ชัน g ก่อน และต่อด้วยความสัมพันธ์กับฟังก์ชัน f

ตัวอย่างที่

3

กำหนดให้ $f(x) = 4x^2$ และ $g(x) = 2x - 5$ จะมี $g \circ f$ และ $f \circ g$ หรือไม่ เพราะเหตุใด ถ้ามี หา $g \circ f$ และ $f \circ g$ พร้อมทั้งบอกโดเมน

วิธีทำ หา $g \circ f$

จาก $f(x) = 4x^2$ จะได้ว่า $D_f = R$ และ $R_f = [0, \infty)$

และ $g(x) = 2x - 5$ จะได้ว่า $D_g = R$ และ $R_g = R$

ดังนั้น $R_f \cap D_g = [0, \infty) \neq \emptyset$ นั่นคือเราสามารถหา $g \circ f$ ได้

จะได้ว่า $g \circ f(x) = g(f(x))$ — แทนจากข้างในออกไปข้างนอก นั่นคือทำ $f(x)$ ก่อน

$$= g(4x^2) \text{ — เปลี่ยน } f(x) \text{ เป็น } 4x^2$$

$$= 2(4x^2) - 5 \text{ — นำ } 4x^2 \text{ ไปแทนที่ } x \text{ ใน } g(x) = 2x - 5$$

นั่นคือ $g \circ f(x) = 8x^2 - 5$

$$\text{และ } D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in R \mid 4x^2 \in R\}$$

$$= R$$

หา $f \circ g$

จาก $g(x) = 2x - 5$ จะได้ว่า $D_g = R$ และ $R_g = R$

และ $f(x) = 4x^2$ จะได้ว่า $D_f = R$ และ $R_f = [0, \infty)$

ดังนั้น $R_g \cap D_f = R \neq \emptyset$ นั่นคือเราสามารถหา $f \circ g$ ได้

จะได้ว่า $f \circ g(x) = f(g(x))$ — แทนจากข้างในออกไปข้างนอก นั่นคือทำ $g(x)$ ก่อน

$$= f(2x - 5) \text{ — เปลี่ยน } g(x) \text{ เป็น } 2x - 5$$

$$= 4(2x - 5)^2 \text{ — นำ } 2x - 5 \text{ ไปแทนที่ } x \text{ ใน } f(x) = 4x^2$$

$$= 4(4x^2 - 20x + 25)$$

นั่นคือ $f \circ g(x) = 16x^2 - 80x + 100$

$$\text{และ } D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in R \mid 2x - 5 \in R\}$$

$$= R$$

ตัวอย่างที่

4

กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x+1}$ และ $g(x) = x^2 - 1$ จะมี $g \circ f$ และ $f \circ g$ หรือไม่ เพราะเหตุใด ถ้ามี หา $g \circ f$ และ $f \circ g$ พร้อมทั้งบอกโดเมน

วิธีทำ หา $g \circ f$

จาก $f(x) = \sqrt{x+1}$ จะได้ว่า $D_f = [-1, \infty)$ และ $R_f = [0, \infty)$

และ $g(x) = x^2 - 1$ จะได้ว่า $D_g = R$ และ $R_g = [-1, \infty)$

ดังนั้น $R_f \cap D_g = [0, \infty) \neq \emptyset$ นั่นคือเราสามารถหา $g \circ f$ ได้

จะได้ว่า $g \circ f(x) = g(f(x))$ — แทนจากข้างในออกไปข้างนอก นั่นคือทำ $f(x)$ ก่อน

$$= g(\sqrt{x+1}) \text{ — เปลี่ยน } f(x) \text{ เป็น } \sqrt{x+1}$$

$$= (\sqrt{x+1})^2 - 1 \text{ — นำ } \sqrt{x+1} \text{ ไปแทนที่ } x \text{ ใน } g(x) = x^2 - 1$$

$$= (x+1) - 1$$

นั่นคือ $g \circ f(x) = x$

$$\text{และ } D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in [-1, \infty) \mid \sqrt{x+1} \in R\}$$

$$= [-1, \infty)$$

หา fog

จาก $g(x) = x^2 - 1$ จะได้ว่า $D_g = \mathbb{R}$ และ $R_g = [-1, \infty)$

และ $f(x) = \sqrt{x+1}$ จะได้ว่า $D_f = [-1, \infty)$ และ $R_f = [0, \infty)$

ดังนั้น $R_g \cap D_f = [-1, \infty) \neq \emptyset$ นั่นคือเราสามารถหา fog ได้

จะได้ว่า $fog(x) = f(g(x))$ — แทนจากข้างในออกไปข้างนอก นั่นคือทำ $g(x)$ ก่อน

$$= f(x^2 - 1)$$

$$= \sqrt{(x^2 - 1) + 1}$$

$$= \sqrt{x^2}$$

เปลี่ยน $g(x)$ เป็น $x^2 - 1$

นำ $x^2 - 1$ ไปแทนที่ x ใน $f(x) = \sqrt{x+1}$

นั่นคือ $fog(x) = |x|$

$$\begin{aligned} \text{และ } D_{fog} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \in [-1, \infty)\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $f(x) = 2x$ และ $g(x) = \frac{1}{x+3}$ แล้วค่า x ที่ทำให้ $(fog)(x) = (gof)(x)$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ จาก $f(x) = 2x$ จะได้ว่า $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \mathbb{R}$

$g(x) = \frac{1}{x+3}$ จะได้ว่า $D_g = \mathbb{R} - \{-3\}$ และ $R_g = \mathbb{R} - \{0\}$

พิจารณา $R_g \cap D_f = \mathbb{R} - \{0\} \neq \emptyset$ และ $R_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-3\} \neq \emptyset$

แสดงว่าเราสามารถหา fog(x) และ gof(x) ได้

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } (fog)(x) &= f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x+3}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{x+3}\right) \\ &= \frac{2}{x+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } (gof)(x) &= g(f(x)) = g(2x) \\ &= \frac{1}{2x+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จากโจทย์ } (fog)(x) &= (gof)(x) \\ \frac{2}{x+3} &= \frac{1}{2x+3} \end{aligned}$$

$$2(2x+3) = x+3$$

$$4x+6 = x+3$$

$$3x = -3$$

$$\text{ดังนั้น } x = -1$$



ควรรู้

1. fog(x) สามารถเขียนแทนด้วย (fog)(x) ได้
2. gof(x) สามารถเขียนแทนด้วย (gof)(x) ได้



ควรรู้

กำหนดให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชัน ถ้าสามารถหา $(fog)oh$ และ $fo(goh)$ ได้ แล้ว $(fog)oh = fo(goh)$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ $f(x) = x - 1$, $g(x) = x^2$ และ $h(x) = 3x + 5$ หา $(fog)oh$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } ((fog)oh)(x) &= f(g(h(x))) \\ &= f(g(3x+5)) \\ &= f((3x+5)^2) \\ &= f(9x^2 + 30x + 25) \\ &= (9x^2 + 30x + 25) - 1 \\ &= 9x^2 + 30x + 24 \end{aligned}$$



ข้อสังเกต

$$(fog)oh = fo(goh) = f(g(h(x)))$$

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ $f(x) = 3x - 5$ และ $(fog)(x) = 6x^2 + 21x + 13$ หา $g(x)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \text{เนื่องจาก } (fog)(x) &= 6x^2 + 21x + 13 \\ \text{ดังนั้น } f(g(x)) &= 6x^2 + 21x + 13 \\ 3g(x) - 5 &= 6x^2 + 21x + 13 \\ 3g(x) &= 6x^2 + 21x + 18 \\ \text{นั่นคือ } g(x) &= 2x^2 + 7x + 6 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ $g(x) = 2x - 1$ และ $(fog)(x) = 16x^2 - 18x + 13$ หาฟังก์ชัน f

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \text{เนื่องจาก } (fog)(x) &= 16x^2 - 18x + 13 \\ \text{ดังนั้น } f(g(x)) &= 16x^2 - 18x + 13 \\ f(2x-1) &= 16x^2 - 18x + 13 \end{aligned}$$

$$\text{ให้ } t = 2x - 1$$

จะได้ $x = \frac{t+1}{2}$ นำไปแทนลงในสมการ $f(2x-1) = 16x^2 - 18x + 13$ ได้เป็น

$$f\left\{2\left(\frac{t+1}{2}\right) - 1\right\} = 16\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 - 18\left(\frac{t+1}{2}\right) + 13$$

$$f\{(t+1) - 1\} = 16\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 - 18\left(\frac{t+1}{2}\right) + 13$$

$$f(t) = 16\left(\frac{t^2 + 2t + 1}{4}\right) - 18\left(\frac{t+1}{2}\right) + 13$$

ดังนั้น

$$f(t) = 4(t^2 + 2t + 1) - 9(t + 1) + 13$$

$$f(t) = 4t^2 + 8t + 4 - 9t - 9 + 13$$

$$f(t) = 4t^2 - t + 8$$

$$f(x) = 4x^2 - x + 8$$

ตัวอย่างที่ 9

กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{เมื่อ } x \leq -3 \\ 2x & \text{เมื่อ } -3 < x \leq 3 \\ |x| & \text{เมื่อ } x > 3 \end{cases}$$

$$g(x) = 2x + 1$$

หา 1) $(f \circ g)(-10)$ 2) $(g \circ f)(2)$ 3) $f(g(f(g(-5))))$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 1) (f \circ g)(-10) &= f(g(-10)) \\ &= f\{2(-10) + 1\} \\ &= f(-19) \\ &= 3(-19) - 1 \\ &= -57 - 1 \\ &= -58 \\ 2) (g \circ f)(2) &= g(f(2)) \\ &= g\{2(2)\} \\ &= g(4) \\ &= 2(4) + 1 \\ &= 9 \\ 3) f(g(f(g(-5)))) &= f(g(f(g(-5)))) \\ &= f(g(f\{2(-5) + 1\})) \\ &= f(g(f(-9))) \\ &= f(g\{3(-9) - 1\}) \\ &= f(g(-28)) \\ &= f\{2(-28) + 1\} \\ &= f(-56 + 1) \\ &= f(-55) \\ &= 3(-55) - 1 \\ &= -166 \end{aligned}$$



แบบฝึกหัดที่ 8

1. หา $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งระบุโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

1) $f(x) = x - 3$ และ $g(x) = x^2$

2) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ และ $g(x) = \frac{1}{x}$

3) $f(x) = x^2 - 3$ และ $g(x) = 3x + 2$

4) $f(x) = 3x^3 + 1$ และ $g(x) = \sqrt{4 - x}$

5) $f(x) = \frac{5}{x - 4}$ และ $g(x) = \frac{2x - 1}{3x + 1}$

2. กำหนดให้ $f(x) = \{(-2, 4), (-1, 0), (0, 3), (1, 6), (2, 10)\}$

$$g(x) = \{(-1, 1), (0, 4), (-2, 6), (2, 2)\}$$

$$h(x) = \{(2, 4), (1, 2), (0, 2), (-2, 4)\}$$

หา

1) $f + g$ 2) $f - g$

3) fg 4) $\frac{f}{g}$

5) $g + h$ 6) $h - g$

7) hg 8) $\frac{g}{h}$

3. กำหนดให้ $f(x) = -x^2 + 8$ และ $g(x) = \begin{cases} 2x & \text{เมื่อ } x < -3 \\ 3x + 8 & \text{เมื่อ } -3 \leq x < 4 \\ |7 - x| & \text{เมื่อ } x \geq 4 \end{cases}$

หา

1) $f(g(0))$

2) $g(f(g(-1)))$

3) $f(f(3)) + g(g(-4))$

4) $f(g(g(f(0))))$

5) $f \circ f(-1) + g \circ f(0)$

6) $f \circ g(2) - 4g \circ g(2) + 2g \circ f(-2)$

4. หา fog, gog, fof และ gof

1) $f(x) = 2x - 5$ และ $g(x) = 3x + 8$

2) $f(x) = 2x^2$ และ $g(x) = 4x - 1$

3) $f(x) = 7 - x$ และ $g(x) = \frac{1}{x}$

4) $f(x) = |x - 2|$ และ $g(x) = x - 5$

5. กำหนดให้ $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = x^2 - 5$, $h(x) = -x^3$ หา

1) $(fog)oh$

2) $go(foh)$

3) $ho(fog)$

4) $fo(goh)$

6. กำหนดให้ $f(x) = 4x - 3$ และ $f(g(x)) = 20x^2 - 31$ หา

1) $g(x)$

2) $g(f(x))$

3) $g(g(x))$

4) $f(f(x))$

7. กำหนดให้ $g(x) = x^2$ และ $g(f(x)) = 3x^2 + 11$ หา

1) $f(x)$

2) $f(g(x))$

3) $f(g(f(x)))$

4) $f(g(f(-1)))$

6. ฟังก์ชันผกผัน

จากที่เราเคยทราบว่าตัวผกผันของความสัมพันธ์ r คือ ความสัมพันธ์ที่เกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r

ซึ่งเขียนแทนด้วย r^{-1} และ $r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$

ตัวผกผันของฟังก์ชันเขียนแทนด้วย f^{-1} ซึ่งมีความหมายในลักษณะเดียวกันกับตัวผกผันของความสัมพันธ์

ตัวอย่างที่

1

นักเรียนพิจารณาตัวผกผันของฟังก์ชัน f และ g ต่อไปนี้

$$f = \{(0, 0), (5, 0), (2, 4), (3, 2)\}$$

$$g = \{(0, 1), (1, 7), (3, 8), (4, 4)\}$$

จะได้ว่า

$$f^{-1} = \{(0, 0), (0, 5), (4, 2), (2, 3)\}$$

$$g^{-1} = \{(1, 0), (7, 1), (8, 3), (4, 4)\}$$

จากการสังเกตจะพบว่า

1) f เป็นฟังก์ชัน แต่ f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับ $(0, 0)$

และ $(0, 5)$ อยู่ใน f^{-1}

2) ทั้ง g และ g^{-1} เป็นฟังก์ชัน



ชวนคิด

ถ้าเราไม่หาตัวผกผันของฟังก์ชัน เราจะทราบได้อย่างไรว่าฟังก์ชันที่เราสนใจนั้นมีตัวผกผันที่เป็นฟังก์ชันหรือไม่



ทฤษฎีบท

ให้ f เป็นฟังก์ชัน f มีฟังก์ชันผกผัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1 - 1

ตัวอย่างที่ 2 ฟังก์ชัน f และ g ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ มีฟังก์ชันผกผันหรือไม่

$$f(x) = |x - 7|$$

$$g(x) = \sqrt{5x - 1}$$

วิธีทำ เราจะตรวจสอบว่า ฟังก์ชัน f และ g มีฟังก์ชันผกผันหรือไม่ โดยพิจารณาว่า f และ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

$f(x) = |x - 7|$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะถ้า $x_1 = 2$ และ $x_2 = 12$ แล้ว

$$f(x_1) = f(2) = |2 - 7| = 5$$

$$f(x_2) = f(12) = |12 - 7| = 5$$

จะพบว่า $x_1 \neq x_2$ แต่ $g(x_1) = g(x_2)$

ดังนั้น f ไม่มีฟังก์ชันผกผัน

$g(x) = \sqrt{5x - 1}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะถ้า $x_1, x_2 \in D_g$ และ $g(x_1) = g(x_2)$

$$\text{แล้ว } \sqrt{5x_1 - 1} = \sqrt{5x_2 - 1}$$

$$\text{ดังนั้น } 5x_1 - 1 = 5x_2 - 1$$

$$5x_1 = 5x_2$$

$$x_1 = x_2$$

แสดงว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ดังนั้น g มีฟังก์ชันผกผัน

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{x - 1}$

1) แสดงว่า f มีฟังก์ชันผกผัน

2) หา f^{-1} พร้อมทั้งเขียนกราฟ

วิธีทำ 1) ในที่นี้จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

สมมุติให้ $x_1, x_2 \in D_f$ โดยที่ $f(x_1) = f(x_2)$

$$\text{จะได้ } \sqrt{x_1 - 1} = \sqrt{x_2 - 1}$$

$$x_1 - 1 = x_2 - 1$$

$$x_1 = x_2$$

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ดังนั้น f มีฟังก์ชันผกผัน

2) หา f^{-1}

$$\text{จาก } f(x) = \sqrt{x - 1} \quad \text{จะได้ว่า}$$

$$y = \sqrt{x - 1} \quad \text{เมื่อ } x \geq 1, y \geq 0$$

สลับตัวแปร x และ y จะได้ว่า

$$x = \sqrt{y - 1} \quad \text{เมื่อ } x \geq 0$$

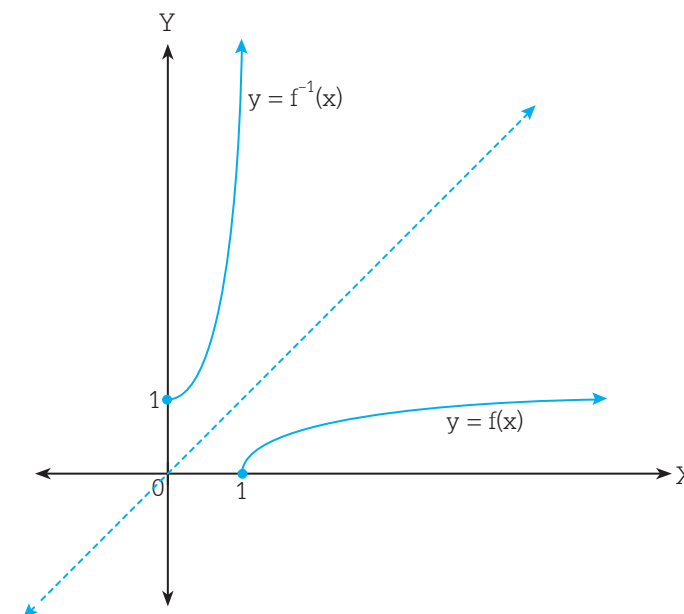
ยกกำลังสอง แล้วจัดรูป y ในรูปของ x จะได้ว่า

$$x^2 = y - 1 \quad \text{เมื่อ } x \geq 0$$

$$y = x^2 + 1 \quad \text{เมื่อ } x \geq 0$$

นั่นคือ $f^{-1}(x) = x^2 + 1$ เมื่อ $x \geq 0$

กราฟของฟังก์ชัน f และ f^{-1} เป็นดังนี้



ควรรู้

กราฟของ f^{-1} ได้จากการสะท้อนกราฟของ f ข้ามเส้นตรง $x = y$ เช่นเดียวกับการเขียนกราฟของตัวผกผันของความสัมพันธ์ r

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดฟังก์ชัน f และ g ดังนี้

$$f(x) = 2x + 7$$

$$g(x) = 4 - 5x$$

หาฟังก์ชัน $f^{-1} \circ g^{-1}$ และ $g^{-1} \circ f^{-1}$ พร้อมทั้งหาโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

วิธีทำ เนื่องจาก $f: R \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} R$ และ $g: R \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} R$

ดังนั้น $f^{-1}: R \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} R$ และ $g^{-1}: R \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} R$

จะได้ว่า $f^{-1}(x) = \frac{x-7}{2}$

และ $g^{-1}(x) = \frac{x-4}{-5} = \frac{4-x}{5}$ สำหรับทุก $x \in R$

1) $f^{-1} \circ g^{-1}$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเท่ากับ R และ

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1})(x) &= f^{-1}(g^{-1}(x)) \\ &= f^{-1}\left(\frac{4-x}{5}\right) \\ &= \frac{\frac{4-x}{5} - 7}{2} \\ &= \frac{-x-31}{10} \text{ สำหรับทุก } x \in R \end{aligned}$$



ควรรู้

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นที่อยู่ในรูป $f(x) = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$ แล้ว $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$

2) $g^{-1} \circ f^{-1}$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเท่ากับ R และ

$$\begin{aligned} (g^{-1} \circ f^{-1})(x) &= g^{-1}(f^{-1}(x)) \\ &= g^{-1}\left(\frac{x-7}{2}\right) \\ &= \frac{4 - \left(\frac{x-7}{2}\right)}{5} \\ &= \frac{-x+15}{10} \text{ สำหรับทุก } x \in R \end{aligned}$$



ข้อสังเกต

1. ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชัน 1-1 ด้วย
2. ถ้า f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว f^{-1} จะไม่เป็นฟังก์ชัน
3. ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีฟังก์ชันผกผันจะได้ $D_f = R_{f^{-1}}$ และ $R_f = D_{f^{-1}}$
4. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
5. $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$



แบบฝึกหัดที่ 9

1. ให้ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
 - 1) ถ้า $f(x) = 3 - 7x$ หาค่าของ $f^{-1}(1)$
 - 2) ถ้า $f(x) = \frac{x-5}{4}$ หาค่าของ $f^{-1}(2)$
 - 3) ถ้า $f(x) = \frac{3x+5}{8}$ หาค่าของ $f^{-1}(3)$
2. พิจารณาว่าฟังก์ชัน f มีฟังก์ชันผกผันหรือไม่ ถ้ามี หาฟังก์ชันผกผัน

1) $f(x) = 3x + 11$	2) $f(x) = \frac{3-2x}{9}$
3) $f(x) = \frac{3x-1}{4x+7}$	4) $f(x) = \sqrt{x-5}$
5) $f(x) = x-2 + 3$	6) $f(x) = (x-1)^2$
7) $f(x) = x^3$	
3. เขียนกราฟของ f และ f^{-1} จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $f(x) = 2x - 1$	2) $f(x) = x^3 + 1$
3) $f(x) = \sqrt{x+3}$	4) $f(x) = x^2 - 4$ เมื่อ $x \geq 0$

แบบฝึกหัดท้ายหน่วยการเรียนรู้ที่ 1

1. กำหนด $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ r_1, r_2 และ r_3 เป็นความสัมพันธ์ใน A เขียนความสัมพันธ์ในแต่ละข้อแบบแจกแจงสมาชิก

- 1) $r_1 = \{(x, y) \mid y - x > 2\}$ 2) $r_2 = \{(x, y) \mid x = 2\}$
 3) $r_3 = \{(x, y) \mid y = x + 1\}$

2. หาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

- 1) $r = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{4x-1}\}$ 2) $r = \{(x, y) \mid y = x^2 - \frac{1}{2}\}$
 3) $r = \{(x, y) \mid y = -2\sqrt{x}\}$ 4) $r = \{(x, y) \mid y = (x - \frac{3}{4})^2\}$
 5) $r = \{(x, y) \mid y = \sqrt{7x-9}\}$ 6) $r = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{\sqrt{3x-6}}\}$
 7) $r = \{(x, y) \mid y = |x-3| + 7\}$ 8) $r = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{|9-x|}\}$

3. หาตัวผกผันของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของตัวผกผันของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

- 1) $r = \{(1, -2), (2, -5), (3, -4), (4, -7), (5, -1)\}$
 2) $r = \{(x, y) \mid 3x - 4y = 12\}$
 3) $r = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x-5}\}$
 4) $r = \{(x, y) \mid y > x + 1\}$
 5) $r = \{(x, y) \mid y = \frac{2x-5}{19}\}$

4. เขียนกราฟของ r และ r^{-1} ในระบบพิกัดจากเดียวกัน

- 1) $r = \{(-4, 1), (-2, 5), (0, 3), (2, 4), (3, -4)\}$ 2) $r = \{(x, y) \mid y = 3x + 12\}$
 3) $r = \{(x, y) \mid y > 3x\}$ 4) $r = \{(x, y) \mid y = x^2 - 2\}$
 5) $r = \{(x, y) \mid y = |x-5|\}$

5. พิจารณาว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด

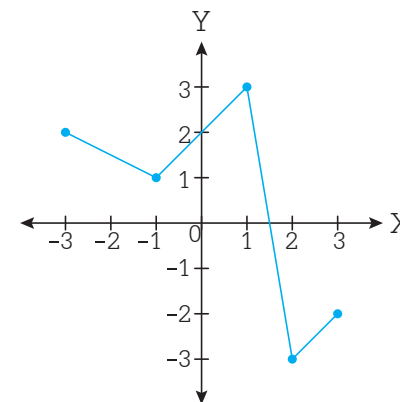
- 1) $\{(8, 2), (9, 3), (10, 4), (11, 5), (9, \sqrt{9})\}$ 2) $r = \{(x, y) \mid y = 7\}$
 3) $r = \{(x, y) \mid 3x = 11\}$ 4) $r = \{(x, y) \mid y = \sqrt{2x-5}\}$
 5) $r = \{(x, y) \mid y = 4x^2\}$ 6) $r = \{(x, y) \mid y \leq 7x\}$
 7) $r = \{(x, y) \mid |y| = x\}$ 8) $r = \{(x, y) \mid x = y^2 - 5\}$

6. หาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชัน

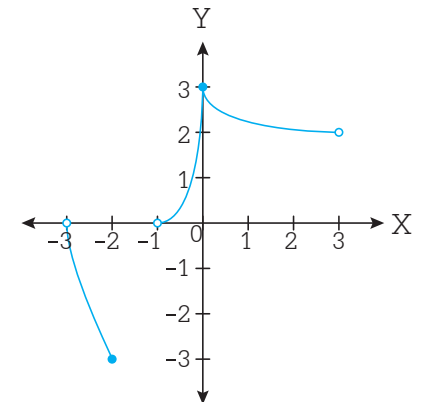
- 1) $f(x) = 3x - 12$ 2) $f(x) = -2x + 7$
 3) $f(x) = \sqrt{5x-10}$ 4) $f(x) = (x-3)^2 + 5$
 5) $f(x) = x^2 - 6x + 13$ 6) $f(x) = -x^2 + 4x - 12$
 7) $f(x) = |x-3| + 11$ 8) $f(x) = -|x-1| + 1$
 9) $f(x) = |5x-5|$ 10) $f(x) = x^3 - 10$

7. ระบุช่วงที่กราฟต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

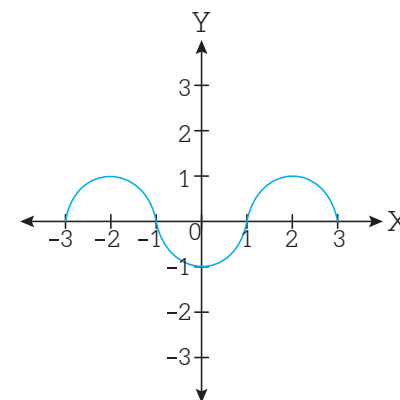
1)



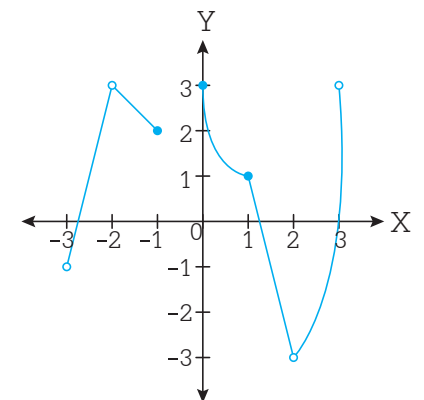
2)



3)



4)



8. พิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้นี้เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนเซตที่กำหนดให้

- 1) $f(x) = -4x + 8$ บนช่วง $[-4, \infty)$ 2) $f(x) = -x^2 + 5$ บนช่วง $[4, \infty)$
 3) $f(x) = x^2 - 4x + 7$ บนช่วง $(-\infty, 1]$ 4) $f(x) = x^3 + 7$ บนช่วง $[7, \infty)$

9. หา $f + g$, $f - g$, fg และ $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งระบุโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

- 1) $f(x) = -5x + 10$ และ $g(x) = x^2 - 3$ 2) $f(x) = x^2 - 1$ และ $g(x) = 4 - 2x^2$
 3) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ และ $g(x) = -3x^2 - 1$ 4) $f(x) = \sqrt{x - 5}$ และ $g(x) = \sqrt{2x - 8}$
 5) $f(x) = 4x - 3$ และ $g(x) = \frac{2 - x}{3x - 1}$

10. หา $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ และ $g \circ g$ พร้อมทั้งระบุโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

- 1) $f(x) = 3x + 5$ และ $g(x) = 1 - 7x$
 2) $f(x) = -x + 4$ และ $g(x) = -3x^2 + 1$
 3) $f(x) = x^3 + 3$ และ $g(x) = 4 - x$
 4) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ และ $g(x) = 3x$
 5) $f(x) = \sqrt{x - 5}$ และ $g(x) = 2x^2$
 6) $f(x) = |3x - 5|$ และ $g(x) = x + 11$
 7) $f(x) = 4x$ และ $g(x) = \frac{8}{3x - 5}$
 8) $f(x) = \frac{3}{x}$ และ $g(x) = \frac{x}{x + 3}$

11. หาฟังก์ชันผกผันของ f พร้อมทั้งเขียนกราฟ

- 1) $f(x) = 7x - 11$
 2) $f(x) = 5(2x - 1)$
 3) $f(x) = \frac{1}{7x - 3}$
 4) $f(x) = |2x - 10|$
 5) $f(x) = x^2 - 4$
 6) $f(x) = -x^2 + 2x + 4$
 7) $f(x) = \sqrt{x - 2}$
 8) $f(x) = -x^3 - 1$

12. กำหนด $f(x) = 3 - 7x$ และ $g(x) = \frac{4x - 7}{11}$

- 1) $f \circ g$ 2) $g \circ f$
 3) f^{-1} 4) g^{-1}
 5) $(f \circ g)^{-1}(x)$ 6) $(g \circ f)^{-1}(x)$
 7) $f^{-1}(g^{-1}(1))$ 8) $g^{-1}(f^{-1}(0))$
 9) $f^{-1}(g^{-1}(g(f(0))))$ 10) $g^{-1}(g^{-1}(g(g(0)))) + 5f(g(1))$

13. พนักงานของบริษัทนายหน้าแห่งหนึ่งได้รับเงินเดือนจากบริษัทเดือนละ 35,000 บาท และได้รับค่านายหน้าอีก 15% ของยอดเงินที่ขายหรือปล่อยเช่าอสังหาริมทรัพย์ได้

- 1) เขียนความสัมพันธ์ของรายได้ของพนักงานผู้นี้กับยอดเงินที่ขายหรือปล่อยเช่าอสังหาริมทรัพย์ได้
 2) หาวว่าในเดือนที่เขาขายยอดเงินที่ขายหรือปล่อยเช่าอสังหาริมทรัพย์ได้ 125,000 บาท เขาจะมีรายได้รวมในเดือนนั้นเท่าใด

14. ฟังก์ชันแสดงราคาารถคันหนึ่งเมื่อเวลาผ่านไปเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ถ้าปัจจุบันรถคันหนึ่งมีราคา 1,290,000 บาท และในอีก 4 ปีข้างหน้ารถคันนี้จะมีราคา 1,050,000 บาท หา

- 1) ฟังก์ชันแสดงราคาของรถเมื่อเวลาผ่านไป x ปี
 2) เมื่อเวลาผ่านไป 7 ปี รถคันนี้จะมีราคาลดลงเป็นเท่าใด

15. เมื่อโยนก้อนหินขึ้นไปในอากาศในเวลา t ใด ๆ ซึ่งมีหน่วยเป็นวินาที ระยะความสูงของก้อนหิน ซึ่งมีหน่วยเป็นเมตร เป็นไปตามสมการ $f(t) = -2t^2 - 4t$ หาวว่า

- 1) เวลาเท่าใดก้อนหินจะขึ้นไปสูงสุด
 2) ระยะสูงสุดเป็นเท่าใด
 3) เมื่อเวลาผ่านไปนานเท่าใด ก้อนหินจึงจะตกลงพื้น